2. Mächtigkeiten

Die Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen durch Georg Cantor, brieflich fixiert am 7.12.1873, kann man mit guten Gründen als die zweite Revolution in der Geschichte von $\mathbb{R}$ bezeichnen. Über zweitausend Jahre liegen zwischen der Entdeckung von $\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$ durch die alten Griechen und $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{Q}|$, d.h.: Es gibt keine vollständige Paarbildung zwischen den rationalen Zahlen und den reellen Zahlen. Es gibt nicht nur irrationale Zahlen, sondern fast alle – in einem sehr präzisen Sinne – reellen Zahlen sind irrational.

Die dritte Revolution aus grundlagentheoretischer Sicht bildete dann der Beweis der Unabhängigkeit der Cantorschen Kontinuumshypothese durch Kurt Gödel (1938) und Paul Cohen (1963), der den Glauben an „die eine" Struktur $\mathbb{R}$ ins Wanken brachte und für viele zerschlagen hat. Mengentheoretiker würden vielleicht noch eine vierte Revolution nennen, nämlich den Beweis der projektiven Determiniertheit aus großen Kardinalzahlaxiomen in den 1980er-Jahren, an dem wesentlich Donald Martin, John Steel und Hugh Woodin beteiligt waren. Wir kommen später auf diese Dinge noch zurück.

Mächtigkeiten

Wir wiederholen einige Grundbegriffe der von Georg Cantor im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts im Alleingang entwickelten Mächtigkeitstheorie. Vieles davon wird dem Leser wohl ähnlich bekannt sein wie der Euklidische Algorithmus im ersten Kapitel.

Eine ausführliche Darstellung der elementaren Mächtigkeitslehre unter Auswertung historischer Quellen findet der Leser in [Deiser 2004]. Aber auch dort wie an anderen Stellen musste es vielfach bei geschichtlichen Andeutungen bleiben. Das Thema ist ähnlich verwickelt wie die Entdeckung des Irrationalen. Andererseits ist jeder einführende Text zur Mengenlehre geeignet, eine durch das Folgende evtl. auftretende rein mathematische Verunsicherung des Lesers wieder zu beseitigen.

Sind A und B Mengen, so schreiben wir $|A| = |B|$, falls eine Bijektion zwischen A und B existiert, und sagen: *Die Mächtigkeit von A ist gleich der Mächtigkeit von B.* Analog schreiben wir $|A| \leq |B|$, falls eine Injektion von A nach B existiert, und sagen: *Die Mächtigkeit von A ist kleinergleich der Mächtigkeit von B.* Schließlich meint $|A| < |B|$, dass $|A| \leq |B|$ und $|A| \neq |B|$ gilt. In der Mengenlehre kann $|A|$, die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* von A, befriedigend als Objekt definiert werden – eine lange Geschichte wiederum. Für viele Anwendungen genügt aber die gegebene relationale Definition, die nur die Begriffe bijektiv und injektiv verwendet. Wir werden darüber hinaus unten eine symbolische Arithmetik einführen und verwenden, ohne uns allzu sehr um die

Schwierigkeiten einer wirklich formal befriedigenden Definition zu kümmern. Mit Hilfe einer solchen symbolischen Arithmetik lassen sich viele Mächtigkeitsberechnungen und -vergleiche elegant durchführen, und es wäre schade, nur aufgrund eines allzu strengen technischen Gewissens darauf zu verzichten.

Eine Menge A heißt *Dedekind-unendlich* oder nur *unendlich*, falls $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Andernfalls heißt A *(Dedekind-) endlich*. Man kann zeigen: Eine Menge A ist genau dann endlich, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|A| = |\{0, \ldots, n-1\}|$.

Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls A endlich ist oder $|A| = |\mathbb{N}|$ gilt. Die Abzählbarkeit von A ist äquivalent zu $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Eine nicht abzählbare Menge heißt *überabzählbar*. Es gilt: A ist überabzählbar *gdw* $|\mathbb{N}| < |A|$. Eine unendliche Menge A ist überabzählbar, wenn es keine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach A gibt.

Durchgehend verwendet wird etwa: Ist $|A| = |B|$ und $|B| < |C|$, so ist auch $|A| < |C|$. Die Mächtigkeitsschreibweise ist insgesamt so beschaffen, dass alles, was suggeriert wird, auch richtig ist. Nichttrivial ist dabei der Beweis zweier grundlegender Sätze: Der Äquivalenzsatz von Cantor-Bernstein und der Vergleichbarkeitssatz von Cantor-Zermelo.

Satz *(Äquivalenzsatz von Cantor-Bernstein)*

Seien A, B Mengen, und es gelte $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$.
Dann gilt $|A| = |B|$.

Beweis *(nach Julius König 1906)*

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv.
Für jedes $x \in A$ definieren wir rekursiv:

$$x_0 = x,$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} g^{-1}(x_n) & \textit{falls} \quad n \text{ gerade}, \\ f^{-1}(x_n) & \textit{falls} \quad n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

solange die Urbilder existieren. Sei

$$A_0 = \{ x \in A \mid x_n \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N} \text{ definiert } \textit{oder} \text{ es gibt ein letztes } x_n \text{ und dessen Index } n \text{ ist gerade} \}.$$

Wir setzen nun für $x \in A$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{falls} \quad x \in A_0, \\ g^{-1}(x) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $h : A \to B$ bijektiv (!).

Cantor vermutete den Satz in einer Arbeit von 1883. Dedekind konnte ihn dann 1887 beweisen, ließ das Licht aber unter dem Scheffel. (Die Kommunikation zwischen Cantor und Dedekind war zuweilen nicht unproblematisch.) Bernstein bewies den Satz unabhängig von Dedekind in einem Seminar von Cantor im Jahr 1897, und der Beweis wurde 1898 in einem Buch von Borel veröffentlicht. Er befreite von mühsamen Konstruktionen, ähnlich wie Beweise der Äquivalenz zweier Aussagen (i) und (ii) durch das Aufspalten in zwei Implikationen (i) $\curvearrowright$ (ii) und (ii) $\curvearrowright$ (i) oft unvergleichlich einfacher werden.

Der Beweis des Satzes zeigt:

Korollar

Seien A, B Mengen, und seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv.
Dann existieren $A_0, A_1 \subseteq A$ mit:

(i) $A_0 \cap A_1 = \emptyset, \;\; A_0 \cup A_1 = A$,

(ii) $A_1 \subseteq \mathrm{rng}(g)$,

(iii) $f|A_0 \cup g^{-1}|A_1$ ist bijektiv von A nach B.

Eine Bijektion zwischen A und B kann also aus zwei Injektionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ durch ein geeignetes zweiteiliges Zusammenbauen der beiden Abbildungen erhalten werden – ein bemerkenswert einfaches Ergebnis.

Für den Beweis des Vergleichbarkeitssatzes verwenden wir ein zum Auswahlaxiom äquivalentes Maximalprinzip (in der Tat ist der Satz äquivalent zum Auswahlaxiom). Das bekannteste Maximalprinzip ist das sog. *Zornsche Lemma:* Ist $\langle P, < \rangle$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge (eine *Kette*) eine obere Schranke besitzt, so existiert ein maximales Element der Ordnung. (Siehe z. B. [Deiser 2004] für Beweise.)

Dieses Maximalprinzip ist relativ gut bekannt, bereitet aber vielen Anfängern große Schwierigkeiten, sodass sehr oft „sei x das maximale Element“ zu hören ist, wenn es „sei x ein maximales Element“ heißen sollte. Im Zweifel für den Kommentar:

Sei also $\langle P, < \rangle$ eine partielle Ordnung, d. h. $<$ ist irreflexiv und transitiv auf P. $M \subseteq P$ heißt *lineare Teilordnung* oder auch *<-Kette*, falls für alle $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. $s \in P$ heißt *obere Schranke von M*, falls $x \leq s$ für alle $x \in M$ gilt. Ein $m \in P$ heißt *ein maximales Element* der Ordnung, falls für alle $x \in P$ non$(m < x)$ gilt. Ein $m \in P$ heißt ein *größtes Element der Ordnung*, falls $x \leq m$ für alle $x \in P$ gilt. Im Falle der Existenz ist ein größtes Element eindeutig bestimmt, sodass man von *dem* größten Element der Ordnung reden kann. Die leere Menge ist eine lineare Teilordnung jeder partiellen Ordnung, und durch diese Konvention ist also eine partielle Ordnung, die die Bedingung des Zornschen Lemmas erfüllt, immer nichtleer.

Einige Beispiele: Ist M eine Menge, so ist $\langle \mathcal{P}(M), \subset \rangle$ eine partielle Ordnung. In dieser Ordnung ist M das größte Element. In $\langle \mathcal{P}(M) - \{ M \}, \subset \rangle$ existiert dagegen kein größtes Element, wenn M mehr als ein Element hat. Ist $a \in M$, so ist $M - \{ a \}$ maximal in der Ordnung. Umgekehrt ist jedes maximale Element der Ordnung von der Form $M - \{ a \}$ für ein $a \in M$. $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ mit der üblichen Ordnung erfüllt die Bedingung des Zornschen Lemmas nicht, da die lineare Teilordnung $\mathbb{N}$ keine obere Schranke hat.

Satz *(Vergleichbarkeitssatz von Cantor-Zermelo)*

Seien A, B Mengen. Dann gilt $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$.

Beweis

Sei $P = \{ f \mid f : A' \to B \text{ injektiv}, A' \subseteq A \}$. Wir setzen für $f, g \in P$:

$f < g$, *falls* $f \subset g$.

Dann ist $\langle P, < \rangle$ eine partielle Ordnung. Ist $M \subseteq P$ linear geordnet, so ist $\bigcup M$ ein Element von P und eine obere Schranke von M.

Nach dem Zornschen Lemma existiert also ein maximales Element f der Ordnung. Wegen Maximalität gilt $\mathrm{dom}(f) = A$ oder $\mathrm{rng}(f) = B$ (!). Also gilt $|A| \leq |B|$, bezeugt durch f, oder $|B| \leq |A|$, bezeugt durch f^{-1}.

Der Beweis verdeckt sowohl die historische als auch die mathematische Komplexität des Resultates. Cantor hatte den Satz lange Zeit als Denkgesetz vermutet, aber erst Zermelo konnte 1904 und 1908 strenge Beweise liefern. Das Zornsche Lemma (1935) ist ein allgemeines Extrakt der Zermeloschen Beweistechnik von 1908, die den Begriff der Wohlordnung vermeidet. In der axiomatischen Mengenlehre ist der Vergleichbarkeitssatz äquivalent zum Auswahlaxiom. Der Satz von Cantor-Bernstein lässt sich dagegen ohne Auswahlaxiom zeigen (wie z. B. der Beweis oben zeigt).

Bestimmung einiger Mächtigkeiten

Die Idee der Abzählbarkeit einer Menge A ist: Die Elemente von A lassen sich in einer endlichen oder unendlichen Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ anordnen. Beispiele für abzählbar unendliche Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^n$ für $n \geq 1$, $\mathbb{Q}$ und die Menge der algebraischen Zahlen. Ein wichtiger Satz ist hierbei:

Satz *(Multiplikationssatz für abzählbare Mengen)*

Seien A_n, $n \in \mathbb{N}$ abzählbar. Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Dies zeigt man durch *Wahl* je einer Aufzählung $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots$ jeder Menge A_n und Verwendung der Cantorschen Diagonalaufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (0, 4), \ldots$

Die Position eines Paares $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ in dieser Reihe wird gegeben durch das bijektive Cantorsche *Paarungspolynom* $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\pi(n, m) \;=\; 1/2(n + m)(n + m + 1) \;+\; n \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}.$$

Übung

Tragen Sie die ersten Elemente der $\mathbb{N}^2$-Aufzählung in ein Diagramm ein, und beweisen Sie, dass das Polynom π die Aufzählung beschreibt. Beweisen Sie anschließend den obigen Vereinigungssatz.

Die Diagonalaufzählung zeigt, dass $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$ gilt, und Iteration liefert den Satz $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$ für alle $n \geq 1$. Eine rationale Zahl ist im Wesentlichen ein Paar von natürlichen Zahlen – Zähler und Nenner –, und aus dieser Beobachtung gewinnt man leicht die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, evtl. unter Verwendung des Satzes von Cantor-Bernstein. Weiter folgt z. B., dass die Menge aller n-Tupel, $n \in \mathbb{N}$, gebildet aus natürlichen (oder ganzen oder rationalen) Zahlen abzählbar ist. Damit ist die „Menge aller Bücher“ bei gegebenem endlichen und selbst bei abzählbar unendlichem Vorrat an Typen abzählbar.

Die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen ergibt sich nun leicht: Jedes Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist durch ein n-Tupel aus ganzen

Zahlen bestimmt und hat maximal n verschiedene Nullstellen. Dies liefert eine Zerlegung der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ in eine abzählbare Menge von endlichen Mengen. Die Menge $\mathbb{A}$ ist als Vereinigung dieser Mengen also abzählbar.

Gegeben die Abzählbarkeit der Bibliothek aller Bücher, der gegenüber die Bibliothek von Alexandria als der Zeitschriftentisch eines Hausarztes erscheint; gegeben die Abzählbarkeit der Menge aller algebraischen Zahlen, zusammen mit der Tatsache, dass sich transzendente Zahlen gar nicht so leicht finden lassen; gegeben all dies mag man fragen: Ist der Mächtigkeitsbegriff nicht überflüssig? Ist nicht unendlich gleich abzählbar unendlich? Ist nicht unendlich gleich unendlich? Die Antwort gibt der folgende zeitlose Satz.

Satz *(Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$)*

Es gilt $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Beweis

Für ein reelles abgeschlossenes Intervall $I = [a, b]$, $a < b$, seien

$$L(I) = [a, a + (b - a)/3] \quad \text{und} \quad R(I) = [b - (b - a)/3, b]$$

das linke bzw. rechte Drittelintervall von I.

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ beliebig, und sei $f : \mathbb{N} \to [a, b]$ beliebig.

Es genügt zu zeigen, dass f nicht surjektiv ist.

Wir definieren rekursiv I_n für $n \in \mathbb{N}$ durch $I_0 = [a, b]$ und

$$I_{n+1} = \begin{cases} L(I_n) & \textit{falls} \quad f(n) \in R(I_n), \\ R(I_n) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{ d \}$. Nach Konstruktion gilt $d \notin \mathrm{rng}(f)$ und $d \in [a, b]$.

Also ist $f : \mathbb{N} \to [a, b]$ nicht surjektiv.

Obiger Beweis ist eine Variante des ersten Cantorschen Überabzählbarkeitsbeweises von 1873. Das bekannte Argument der Diagonalisierung von Nachkommastellen fand Cantor erst viel später und stellte es in Form einer verallgemeinerbaren Konstruktion, dem heutigen *Satz von Cantor*, 1891 in einem Vortrag der Öffentlichkeit vor. Wir beweisen diesen allgemeinen Satz unten.

Im Beweis wird die Vollständigkeit der reellen Zahlen entscheidend benutzt, und deshalb scheitert das Argument für $\mathbb{Q}$. Denn über $\mathbb{Q}$ kann der Schnitt über eine absteigende Folge von abgeschlossenen beschränkten Intervallen $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ leer sein.

Sei etwa $q_n = [1, \ldots, 1]$ (n Einsen), die n-te rationale Kettenbruch-Approximation an den goldenen Schnitt $[1, 1, \ldots]$, und sei $I_n = \{ x \in \mathbb{Q} \mid q_{2n} \leq x \leq q_{2n+1} \}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

In $\mathbb{R}$ ist dagegen das Supremum der linken Intervallgrenzen in einer solchen Situation immer ein Element des Durchschnitts. Wir besprechen die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ ausführlich im nächsten Kapitel, und verwenden sie hier (wie schon in Kapitel 1 bei der Diskussion der unendlichen Kettenbrüche) als eine gut bekannte Tatsache.

Für den Autor gehört die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen irrationalerweise zur Welt der alten Griechen. Es ist ihr Geist, der darin lebt, und sie waren vielleicht nicht so weit weg davon, wie wir glauben. Keiner hätte ihnen so früh die Entdeckung der irrationalen Zahlen zugetraut im Vergleich ihres Wissens zur ägyptischen „Technomathematik“ etwa. Und keiner hätte ihnen aus dem Nichts heraus die Entdeckung der axiomatischen Methode zugetraut, ein immer wieder mit Verblüffung erinnertes Ereignis. Der Zeit Galileis hätte die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ auch gut zu Gesicht gestanden, und Galilei war nun, im Gegensatz zu den Griechen nachweislich, recht nahe dran, als er über ein merkwürdiges Phänomen nachdachte, das wir heute als $|\mathbb{N}| = |\{ 2n \mid n \text{ ist gerade} \}|$ notieren würden.

Obiger Beweis zeigt direkt, dass jedes nichttriviale reelle Intervall überabzählbar ist. Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to [a, b]$ für reelle $a < b$ lässt Werte aus $[a, b]$ aus.

Aus der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen und der Abzählbarkeit der Vereinigung zweier abzählbarer Mengen folgt nun:

Korollar *(Existenz transzendenter Zahlen)*

Es gibt überabzählbar viele transzendente Zahlen. Genauer gilt:
Bis auf abzählbar viele Ausnahmen ist jede reelle Zahl transzendent.

Strikt konstruktiv denkende Mathematiker beeindruckt dieses Existenzargument kaum, da es keine einzige transzendente reelle Zahl als solche identifiziert. Alle anderen beeindruckt es dagegen seit seiner Entdeckung. Das Land hinter dem Gebirge der algebraischen Zahlen ist von einer ungeahnten Weite.

Ein allgemeines Resultat über strikt kleinere Mächtigkeiten ist der folgende Satz, und sein Beweis ist das Urbeispiel eines *Diagonalarguments*.

Satz *(Satz von Cantor)*

Sei A eine Menge. Dann gilt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Beweis

Sicher gilt $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ (denn g mit $g(a) = \{ a \}$ für $a \in A$ ist injektiv).
Sei also $f : A \to \mathcal{P}(A)$ beliebig.
Es genügt zu zeigen, dass f nicht surjektiv ist.
Sei $D = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}$.
Dann gilt für alle $x \in A$: $x \in D$ *gdw* $x \notin f(x)$.
Also ist $D \neq f(x)$ für alle $x \in A$, und also $D \notin \mathrm{rng}(f)$.

Man darf diesen Sechszeiler auch mit britischem Understatement als Jahrhundertentdeckung bezeichnen. Er zeigt, dass es im Reich der unendlichen Mächtigkeiten keine größte Mächtigkeit geben kann, und er nennt zu jeder Menge konkret eine Menge größerer Mächtigkeit. Eine Analyse des Beweises führte Bertrand Russell zu seiner Klasse $R = \{ x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x \}$. Er setzte in Cantors Beweis $A = \{ x \mid x \text{ ist Menge} \}$ und $f = \mathrm{id}_A$, die Identität auf A. Dann ist $D = R$, und $D \notin \mathrm{rng}(f) = A$. Also kann R und weiter auch A selbst keine Menge mehr sein. Man sagt heute: A und R sind *echte Klassen*. Sie sind, so die heute übliche Interpretation der Paradoxie, zu groß, um noch Mengen sein zu können.

 © Oliver Deiser

Dass A keine Menge mehr sein kann, beruht auf einer zusätzlichen Vorstellung und lässt sich nicht alleine aus der Russell-Antinomie ableiten. Die zusätzliche Vorstellung ist: Teilklassen von Mengen sind wieder Mengen.

In der axiomatischen Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel sind echte Klassen Objekte der Sprachebene, aber keine echten Objekte der mathematischen Welt mehr. Für die Allklasse A ist das ganz so, wie das Weltall selber kein Objekt eines Fernrohres mehr ist. Und für Mathematiker, die eine Art mathematisches Objektuniversum als sinnstiftende Hintergrundphilosophie annehmen, ist die Unterscheidung zwischen Mengen und echten Klassen dann auch nicht mehr besonders überraschend. Ist das All auch kein Objekt der Theorie, so können wir trotzdem sinnvoll sagen: „das Weltall ist so und so groß…“ oder „der weit entfernte Teil des Alls enthält …“. „Das All“ ist ein Element unserer Sprache.

Als Korollar erhalten wir insbesondere: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. Zusammen mit dem folgenden grundlegenden Satz ergibt sich dann ein zweiter Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen:

Satz *($\mathbb{R}$ und die Potenzmenge der natürlichen Zahlen)*

Es gilt $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis

zu $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$:

Sei $x = \pm\, a_1, a_2\, a_3 \dots$ in kanonischer Dezimaldarstellung.
Sei $f(x) = \{ \pi(i, a_i) \mid i \in \mathbb{N} \}$, mit dem Paarungspolynom $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, wobei wir das Vorzeichen von x hier durch $a_0 \in \{ 0, 1 \}$ kodieren.
Diese Zuordnung liefert ein injektives $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

zu $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$:

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ sei $g(A) \in \mathbb{R}$ der unendliche Kettenbruch $[n_0, n_1, \dots]$ mit $n_i = 2$, falls $i \in A$, und $n_i = 1$, falls $i \notin A$.
Dann ist $g : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{R}$ injektiv.

Natürlich basiert der Satz nicht wesentlich auf Kettenbrüchen. Der Leser ist aufgerufen, andere Injektionen zu konstruieren (etwa mit Hilfe von Dezimalbruchentwicklungen, unendlichen Reihen, usw.).

Korollar *(Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ mit der Diagonalmethode)*

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Beweis

Es gilt $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Die Diagonalmethode steckt hier im Beweis von $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Das bekannte Verfahren der Diagonalisierung von Nachkommastellen einer unendlichen Liste von reellen Zahlen zeigt $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ in einem Schritt. Der allgemeine Satz von Cantor bringt aber das zugrunde liegende Phänomen in seiner reinsten Form ans Licht.

Übung

Es gilt $|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Eine weitere Gleichung von nicht zu überschätzender Bedeutung ist:

Übung

Es gilt $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Wir wenden uns nun einer Arithmetik zu, die derartige Resultate fast von selbst liefert, ohne dass immer wieder Injektionen konstruiert werden müssten.

Eine symbolische Arithmetik mit Mächtigkeiten

Die Einführung einer symbolischen Arithmetik mit Mächtigkeiten vereinfacht viele weitere Resultate. Wir denken uns jeder Menge A ein Zeichen $\mathfrak{a} = |A|$ zugeordnet derart, dass gleichmächtige Mengen durch das gleiche Zeichen repräsentiert werden. $\mathfrak{a}$ heißt dann eine *Kardinalzahl*. Gilt $\mathfrak{a} = |A|$, so heißt $\mathfrak{a}$ die *Kardinalität von A*. $\mathfrak{a}$ heißt *unendlich*, falls A unendlich ist. Speziell wählen wir natürliche Zahlen n als Zeichen für Mengen mit genau n Elementen, und ω als Zeichen für die abzählbaren Mengen. Es gilt also z. B. $\omega = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. Wenn wir möchten, können wir ω mit $\mathbb{N}$ identifizieren.

Unsere Zeichenzuweisung ist keine Definition im üblichen Sinne, ist aber seit Hausdorff (1914) im nichttechnischen Umfeld gebräuchlich und völlig ausreichend. Die genaue Durchführung der Idee ist überraschend kompliziert und geschieht innerhalb der axiomatischen Mengenlehre nach der Behandlung der Ordinalzahlen oder nach der Einführung der von-Neumann-Zermelo-Hierarchie. Für unsere Zwecke genügt obige Zeichenzuweisung. Ausdrücke und Berechnungen mit Kardinalzahlen lassen sich prinzipiell immer in die relationale Mächtigkeitsschreibweise und die Manipulation von Funktionen zurückübersetzen.

Sind wir nur an einigen wenigen speziellen Mächtigkeiten interessiert, so haben wir gar keine definitorischen Probleme. Wir wählen dann einfach als Zeichen $\mathfrak{a}$ eine bestimmte Menge selber, die wir als Repräsentanten aller zu ihr gleichmächtigen Mengen ansehen.

Wir formulieren den Satz von Cantor-Bernstein und den Vergleichbarkeitssatz noch einmal in der neuen Form mit Kardinalzahlen:

Satz von Cantor-Bernstein

Für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$ *folgt* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Vergleichbarkeitssatz

Für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

Es bietet sich nun der folgende arithmetische Kalkül an [Cantor 1895]:

© Oliver Deiser

Definition *(Arithmetik mit Kardinalzahlen)*

Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Kardinalzahlen, und seien A, B Mengen mit $\mathfrak{a} = |A|$, $\mathfrak{b} = |B|$. Wir setzen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |A \times \{0\} \cup B \times \{1\}|,$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |A \times B|,$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = |{}^{B}A|.$$

Die Definitionen sind unabhängig von der Wahl von A und B. Unmittelbar einleuchtend sind Rechengesetze wie:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}, \quad \text{usw.}$$

Die eingeführte Arithmetik beinhaltet die übliche Arithmetik auf den natürlichen Zahlen, und stimmt auch in Sonderfällen wie etwa $0^0 = 1$ mit ihr überein (denn ${}^{\emptyset}\emptyset = \{\emptyset\}$).

Einige oben bewiesene Abzählbarkeitsresultate lauten nun in der neuen Schreibweise: $\omega = \omega^2 = \omega \cdot \omega$, $\omega = \omega^n$ für $n \in \mathbb{N}^+$.

Die meiste Kraft wohnt nun den Rechenregeln für die Exponentiation inne. Die folgenden Gleichungen gelten für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Sie sind leicht durch Manipulation von Bijektionen einzusehen:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}},$$
$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}},$$
$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}.$$

Die Beweise dieser Gleichungen seien dem Leser zur Übung überlassen.

Ist $\mathfrak{a} = |A|$, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{\mathfrak{a}}$, wobei eine Bijektion $f : \mathcal{P}(A) \to {}^{A}\{0, 1\}$ einfach definiert werden kann durch $f(B) = \mathrm{ind}_B$ für $B \subseteq A$, wobei ind_B die *Indikatorfunktion auf B* ist, d. h. $\mathrm{ind}_B(x) = 1$, falls $x \in B$, und $\mathrm{ind}_B(x) = 0$ sonst. Damit gilt wegen $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ die oft verwendete Gleichung

$$|\mathbb{R}| = 2^{\omega}.$$

Weiter schreibt sich jetzt der Satz von Cantor sehr elegant:

Satz von Cantor

Für alle Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Wir gewinnen nun aus den Rechenregeln der Exponentiation sehr einfach elementare Ergebnisse wie etwa $2^{\omega} = \omega^{\omega}$:

$$2^{\omega} \leq \omega^{\omega} \leq (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^{\omega}.$$

Es gilt also z. B. $|\mathbb{R}| = |{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}|$ (vgl. die Übung oben).

Die vielleicht beeindruckendste Anwendung des Kalküls ist der einzeilige Beweis des Multiplikationssatzes für $\mathbb{R}$:

Satz *(Gleichmächtigkeit der Ebene und der Linie)*

Es gilt $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Beweis

$|\mathbb{R}|^2 = (2^\omega)^2 = 2^{2 \cdot \omega} = 2^\omega = |\mathbb{R}|$.

Der Leser ist aufgerufen, eine konkrete Injektion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu finden. Die Auflösung und Neuverkettung der in der Gleichungskette des Beweises enthaltenen Einzelargumente führt im Wesentlichen zur originalen Beweisidee von Cantor 1878, nämlich der Mischung von Nachkommastellen zweier reeller Zahlen in kanonischer Darstellung: 0,1219… und 0,3278… wird z. B. abgebildet auf 0,13221798…

Cantors Mischung liefert keine direkte Bijektion, und man muss den Satz von Cantor-Bernstein bemühen. Führt man die Mischung nicht mit Ziffern, sondern mit Blöcken der Form 00…00i, $1 \leq i \leq 9$, aus, so erhält man eine direkte Bijektion zwischen $\mathbb{R}^{+2}$ und $\mathbb{R}^+$ (Trick von Julius König). Das Zahlenpaar n,001201… und m,100015… in kanonischer Darstellung wird dabei etwa abgebildet auf π(n, m),001120001015…, wobei π wieder das Paarungspolynom auf $\mathbb{N}^2$ ist.

Induktiv folgt $|\mathbb{R}|^n = |\mathbb{R}|$ für alle $n \geq 1$, und analog zum Beweis oben zeigt man, $\omega \cdot \omega = \omega$ verwendend, sogar $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. Die endlichdimensionalen Kontinua $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ und sogar noch das unendlichdimensionale Kontinuum ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ haben alle die Mächtigkeit der reellen Zahlen.

Diese Resultate von Cantor aus dem Jahre 1884, noch per Hand ohne den bequemen Kardinalzahlkalkül und ohne den Satz von Cantor-Bernstein gewonnen, riefen zur damaligen Zeit große Irritationen hervor. Man musste eine Frage stellen, über die man sich bislang keine ernsthaften Gedanken gemacht hatte: Was macht den Dimensionsbegriff eigentlich aus? Die Frage wurde erst innerhalb der Topologie nach der Jahrhundertwende befriedigend geklärt. Wesentlich ist, dass Bijektionen zwischen verschiedendimensionalen Kontinua $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht stetig sein können. Dies wurde von Dedekind sogleich vermutet, als er den Cantorschen Beweis von $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ zu Gesicht bekam. Aber erst Brouwer gelang 1911 der erste vollständige Beweis (vgl. hierzu auch 2.2).

Übung

Zeigen Sie für alle unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$:

(i) $\mathfrak{a}^\mathfrak{a} = 2^\mathfrak{a}$, d. h. $|{}^A A| = |\mathcal{P}(A)|$ für alle unendlichen Mengen A,

(ii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ *folgt* $2^\mathfrak{a} \cdot 2^\mathfrak{a} = 2^\mathfrak{a}$.

Nichttriviale Ergebnisse der elementaren Kardinalzahlarithmetik sind der Additions- und der Multiplikationssatz: Es gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ für alle unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$. Es folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gilt für alle unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Zurückübersetzt in die Sprache der Bijektionen gilt also insbesondere: Ist M unendlich, so existiert eine Bijektion zwischen M und M^2. Siehe etwa [Deiser 2005] für die längere Geschichte dieses Satzes und des spezielleren Cantorschen Resultats über die Gleichmächtigkeit der Ebene und der Linie.

© Oliver Deiser

Das Kontinuumsproblem

Der Satz von Cantor zeigt $\omega < 2^\omega$, und die Frage ist nun einfach: Gibt es eine Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ mit $\omega < \mathfrak{a} < 2^\omega$ oder nicht? Das Cantorsche Kontinuumsproblem lautet: Welche Mächtigkeit hat $\mathbb{R}$?

Cantorsche Kontinuumshypothese (CH)

2^ω ist die auf ω folgende Mächtigkeit. Anders:
Es gibt keine Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ mit $\omega < \mathfrak{a} < 2^\omega$.

Die erste Erwähnung der Kontinuumshypothese findet sich in [Cantor 1878].

Zwei äquivalente Formulierungen der Kontinuumshypothese – und zugleich Beispiele für die Elimination der arithmetischen Notation – sind:

Ist A eine unendliche Menge mit $|A| < |\mathbb{R}|$, *so ist* $|A| = |\mathbb{N}|$.

Für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ *gilt: A ist abzählbar oder gleichmächtig zu* $\mathbb{R}$.

Die letzte Formulierung ist wohl die erfolgreichste, um das Problem einem Nichtmathematiker nahe zu bringen. Sie benutzt keine Objekte und Begriffe außer den reellen Zahlen und der Idee des Größenvergleichs durch Paarbildung.

In der Mengenlehre zeigt man: Es gibt eine kleinste Kardinalzahl, die größer als ω ist. Dies heißt nichts anderes als: Es gibt eine überabzählbare Menge A mit der Eigenschaft: Ist B eine überabzählbare Menge, so ist $|A| \leq |B|$. Die Kardinalität einer solchen Menge A ist eindeutig bestimmt und wird mit ω_1 oder gleichwertig $\aleph_1$ bezeichnet. ω_1 ist die kleinste überabzählbare Kardinalzahl, so wie ω die kleinste unendliche Kardinalzahl ist. Damit schreibt sich die Kontinuumshypothese dann einfach als $2^\omega = \omega_1$.

Cantor glaubte an die Gültigkeit der Kontinuumshypothese. Er suchte jahrelang nach einem Beweis und hielt am Ende viele wichtige Begriffe und Teilergebnisse in den Händen. Seine Suche nach einer vollständigen Lösung des Problems war aber, wie er nicht ahnen konnte, von vornherein zum Scheitern verurteilt. Es gibt keinen Weg zu seinem Ziel, den er hätte finden können. Denn: Die Kontinuumshypothese ist innerhalb der klassischen Mathematik weder beweisbar noch widerlegbar, es sei denn, die heute akzeptierten Methoden der Mathematik sind in sich widersprüchlich (dann ist (CH), wie jede andere Aussage, sowohl beweisbar als auch widerlegbar). Diese sog. *Unabhängigkeit* der Kontinuumshypothese – weder beweisbar noch widerlegbar zu sein – bewiesen, je die Hälfte mit zwei völlig verschiedenen Methoden beisteuernd, Kurt Gödel 1938 und Paul Cohen 1963. Gödel zeigte, dass (CH) nicht widerlegbar ist, während Cohen bewies, dass (CH) nicht beweisbar ist. „Beweisbar“ muss zum Beweis solcher Sätze mathematisch präzisiert werden, was eine Aufgabe der mathematischen Logik ist. Nach der Formalisierung werden dann die Unabhängigkeitsbeweise selber mit modelltheoretischen Methoden geführt. Sie sind Glasgebäude der Semantik auf einem syntaktischen Unterbau aus Beton.

Natürlich wird die Kontinuumshypothese beweisbar, wenn man eine Umformulierung oder Verstärkung von (CH) als neues mathematisches Axiom postuliert. Kein solches Axiom hat aber bislang allgemeine Akzeptanz gefunden, und das Gleiche gilt für neue Axiome, die implizieren, dass (CH) falsch ist.

Man kann in der klassischen Mathematik zwar (CH) nicht entscheiden, aber doch noch etwas mehr über die Größe von $\mathbb{R}$ beweisen als nur die eine Ungleichung $|\mathbb{R}| > \omega$. Die Gleichung $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ zwingt der Kardinalität des Kontinuums eine gewisse Stabilitätseigenschaft auf. Es gilt nämlich:

Satz *(Unzerlegbarkeitssatz von Julius König)*

Seien $A_n \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, und sei $|A_n| < |\mathbb{R}|$ für $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| < |\mathbb{R}|$.

Beweis

Sei $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, und sei $f : A \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ beliebig.
Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist.
Wegen $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}| = (2^\omega)^\omega = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^\omega = |\mathbb{R}|$ folgt hieraus die Behauptung.
Wir definieren $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch:

$$g(n) = \text{„ein } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq f(y)(n) \text{ für alle } y \in A_n\text{“ für } n \in \mathbb{N}.$$

Ein solches x existiert wegen $|\{ f(y)(n) \mid y \in A_n \}| \leq_{(!)} |A_n| < |\mathbb{R}|$.
Dann ist $g \notin \mathrm{rng}(f)$: *Andernfalls* existiert ein n mit $g = f(y)$ für ein $y \in A_n$.
Insbesondere also $g(n) = f(y)(n)$, *im Widerspruch* zur Definition von $g(n)$.

Auf einelementige A_n angewendet zeigt der Satz noch einmal die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, wobei auf die Ergebnisse $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ und $(2^\omega)^\omega = 2^\omega$ zurückgegriffen wird.

König bewies das Resultat 1904. Im gleichen Jahr wies dann Zermelo auf eine allgemeinere Form hin, die wie der Satz von Cantor auch andere Mächtigkeiten miteinbezieht.

Nehmen wir $|\mathbb{R}| = \omega_1$ an, so beinhaltet der Satz nichts Neues, denn dann sind alle A_n abzählbar mit abzählbarer Vereinigung. Aber ohne eine solche Hypothese zeigt das Argument immerhin, dass eine Folge von Kardinalzahlen $\mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_1 \leq \ldots \leq \mathfrak{a}_n \leq \ldots$ mit $\mathfrak{a}_n < |\mathbb{R}|$ für $n \in \mathbb{N}$, nicht gegen $|\mathbb{R}|$ konvergieren kann. $\mathbb{R}$ lässt sich nicht in eine abzählbare Menge von Mengen kleinerer Mächtigkeit zerlegen. Wenigstens ein interessantes Detail haben wir damit über die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ ans Licht gebracht. Vielleicht gibt es noch andere trickreiche Diagonalargumente? Dies ist leider nicht der Fall. In der Mengenlehre zeigt man mit der Methode von Cohen, dass die Zerlegungsaussage zusammen mit der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ alles ist, was wir in der üblichen Mathematik über die Größe von $\mathbb{R}$ beweisen können. Jede Kardinalzahl $\mathfrak{c} > \omega$, die nicht das Supremum von abzählbar vielen kleineren Kardinalzahlen ist, kann als Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ in einem Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZFC (= einem Modell der klassischen Mathematik) realisiert werden! Wir betrachten hierzu einige Beispiele, die wir ohne symbolische Mächtigkeiten formulieren, um sie möglichst elementar darzustellen. Wir nennen hierzu (vorübergehend) eine endliche Folge $M_0, \ldots, M_n$ eine $\mathbb{R}$-*Kette der Länge* $n + 1$, falls für alle $0 \leq i < n$ gilt:

(i) M_0 ist eine abzählbar unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(ii) $M_i \subseteq M_{i+1}$,

(iii) $|M_i| < |M_{i+1}|$,

(iv) es gibt kein $M_i \subseteq M \subseteq M_{i+1}$ mit $|M_i| < |M| < |M_{i+1}|$,

(v) $M_n = \mathbb{R}$.

Weiter nennen wir für ein $n \in \mathbb{N}$ zwei Folgen $\langle M_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle N_i \mid 0 \leq i \leq n \rangle$ eine $\mathbb{R}$-*Kette der Länge* $\omega + n + 1$, falls gilt:

(a) für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt (i) – (iv) für die Folge $M_0, \ldots, M_i$,

(b) $N_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$,

(c) (ii) – (v) gilt für die Folge $N_0, \ldots, N_n$, insbesondere also:

(d) $N_n = \mathbb{R}$.

Die Modellkonstruktionen mit Hilfe der Cohenschen Methode liefern nun für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Modell der ZFC-Mengenlehre, in dem gilt:

(A_n) Es gibt eine $\mathbb{R}$-Kette der Länge $n + 2$.

Weiter liefern sie sogar für alle $n \in \mathbb{N}$ Modelle für:

(B_n) Es gibt eine $\mathbb{R}$-Kette der Länge $\omega + n + 2$.

Die Annahme der Existenz einer Folge $\mathbb{N} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{15} = \mathbb{R}$, die alle möglichen unendlichen Mächtigkeiten kleinergleich $|\mathbb{R}|$ durchläuft, ist also widerspruchsfrei, ebenso wie die Annahme der Existenz einer solchen Folge der Länge 1789. Weiter können wir auch etwa widerspruchsfrei annehmen, dass eine unendliche Folge, gefolgt von einer endlichen Folge der Form

$$\mathbb{N} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots \subset N_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{12} = \mathbb{R}.$$

alle unendlichen Mächtigkeiten kleinergleich $|\mathbb{R}|$ darstellt, als $\mathbb{R}$-Kette der Länge $\omega + 13$. Der Unzerlegbarkeitssatz von König schließt lediglich $\mathbb{R}$-Ketten

$$\mathbb{N} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots \subset N_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \mathbb{R}$$

der Länge $\omega + 1$ aus, $\mathbb{R}$-Ketten der Länge $\omega + 2$, $\omega + 3$, usw. sind wieder möglich.

Damit sind noch längst nicht alle Möglichkeiten erschöpft, allgemeiner braucht man die sog. transfiniten Zahlen, um die Längen der möglichen, d. h. in Modellen realisierbaren, $\mathbb{R}$-Ketten angeben zu können. Insgesamt gibt es eine echte Klasse möglicher Mächtigkeiten von $\mathbb{R}$ und möglicher Längen von $\mathbb{R}$-Ketten.

Zyniker würden vielleicht sagen: Die vollständige Analyse der Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ besteht also aus den beiden Diagonalargumenten im Satz von Cantor und König-Zermelo, die zudem mehr oder weniger identisch sind. Man muss nicht zum Zyniker werden, aber es ist doch recht wenig, was uns die klassische Mathematik über die Größe von $\mathbb{R}$ wissen lässt. Wenigstens vergönnt sie uns das Wissen, dass wir nicht mehr wissen können, wenn wir nicht über sie hinausgehen.

Das Kontinuumsproblem bleibt offen, wenn man die Resultate von Gödel und Cohen nicht drastisch als negative Lösung für alle Zeiten interpretiert. Die Mathematik befindet sich bis auf unbestimmte Zeit in dem doch sehr irritierenden Zustand, dass sie die Größe ihrer zweiten Grundstruktur nicht ermitteln kann. Gödel und Cohen zeigten, dass die Mathematik sich manchmal besser kennt als die Objekte, die sie untersucht. Der Riss zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, bleibt für ihre lichtstarken Methoden dunkel, aber sie weiß darum, und die mathematische Logik kann die Ränder solcher Finsternisse scharf analysieren.

Das Kontinuumsproblem lässt sich glücklicherweise, Cantors Fußstapfen folgend, ertragreich approximieren. Für eine Menge $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definieren wir *die Kontinuumshypothese für die Punktklasse* $\mathscr{A}$ wie folgt:

(CH$_{\mathscr{A}}$)
Jedes $A \in \mathscr{A}$ ist abzählbar oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

In dieser Form ist (CH) = (CH$_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$) die stärkste unter vielen natürlichen Hypothesen. Beispiele für interessante $\mathscr{A}$ wären etwa: $\mathscr{A}$ = „die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$“, $\mathscr{A}$ = „die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$“. Mit diesen und weiteren Mengensystemen werden wir uns im zweiten Abschnitt, in der Umgebung des Baireraumes, eingehend beschäftigen. Insbesondere werden wir die Kontinuumshypothese für die abgeschlossenen Mengen beweisen, was historisch wie inhaltlich die erste schwere und erfolgreiche Attacke auf das Jahrhundertproblem bildet.

Historischer Überblick

Wir beenden dieses kurze Kapitel mit einer knappen Zusammenstellung wesentlicher Ereignisse im Umfeld der Cantorschen Entdeckung.

1873 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Cantor stellt Dedekind brieflich die Frage nach der Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$. Er kann sie eine Woche später am 7. 12. 1873 selbst negativ beantworten. Glückwünsche von Dedekind, und man darf hinzufügen: im Namen aller Mathematiker.

1878 Drei wichtige Dinge in einem Jahr

Entwicklung des Mächtigkeitsbegriffs, Beweis von $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$, Formulierung der Kontinuumshypothese: Alles auf 16 Seiten in „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ [Cantor, 1878].

1884 Partieller Erfolg im Kontinuumsproblem

Cantor beweist (CH$_{\mathscr{A}}$) für die Menge $\mathscr{A}$ der abgeschlossenen Mengen.

1888 Unendlichkeitsdefinition von Dedekind

Dedekind definiert „M ist unendlich“ als „M ist gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von M“, was sich als äquivalent zu „$|\mathbb{N}| \leq |M|$“ herausstellt.

1891 Diagonalverfahren

Cantor stellt auf der ersten Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung das Argument vor, das heute als „Satz von Cantor“ bekannt ist: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. Angewendet auf $\mathbb{R}$ liefert es die berühmt gewordene Diagonalisierung von Nachkommastellen.

1895 Symbolischer Kalkül mit Mächtigkeiten

Cantor stellt in seiner Gesamtdarstellung seiner Mengenlehre von 1895/1897 enthusiastisch seine Kardinalzahlarithmetik vor.

1897 Satz von Cantor-Bernstein

Bernstein zeigt den Äquivalenzsatz (veröffentlicht in [Borel 1898]). Das obige Zickzack-Argument stammt von Julius König 1906. Dedekind fand bereits 1887 den Bernsteinschen Beweis, ließ ihn aber unveröffentlicht.

1904 Zermelos Wohlordnungssatz

In einer historischen Arbeit von drei Seiten Umfang beweist Zermelo den Wohlordnungssatz und damit den Vergleichbarkeitssatz für Mächtigkeiten. Vier Jahre später gibt er einen zweiten Beweis. Die Methoden des zweiten Beweises zeigen de facto das Zornsche Lemma. Zermelo übernimmt damit, wie Kanamori einmal hübsch schreibt, von Cantor die Fackel.

1905 Ungleichung von König

Julius König veröffentlicht den Unzerlegbarkeitssatz für die reellen Zahlen (bewiesen 1904). Niemand konnte damals ahnen, dass er damit bereits die letzte im Rahmen der klassischen Mathematik beweisbare Aussage über die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ gefunden hatte.

1938 Gödels Modell

Gödel zeigt, dass in seinem „konstruktiblen Universum“, einem natürlichen Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, die Kontinuumshypothese richtig ist.

1963 Cohens Erzwingungsmethode

Cohen stellt eine sehr allgemeine Methode vor, die eine Flut von Modellen der Mengenlehre liefert, in denen die Kontinuumshypothese falsch oder auch wahr ist. (CH) ist also in der ZFC-Mengenlehre und damit in der klassischen Mathematik weder beweisbar noch widerlegbar. Cohens Methode zeigt allgemein, dass $\mathbb{R}$ jede überabzählbare Mächtigkeit haben kann, die nicht der Ungleichung von König widerspricht. („Haben kann" heißt hier „verträglich mit der klassischen Mathematik", oder gleichwertig „die Situation ist realisierbar in einem Modell von ZFC".)

Die Interpretation der Resultate von Cohen spaltet die Grundlagenforschung. Von einigen Mathematikern wird das Kontinuumsproblem als „bedeutungslos" eingestuft, als „inhärent vage Frage". Andere suchen nach Erweiterungen der ZFC-Axiomatik, die das Problem der möglichen Mächtigkeiten von Teilmengen von $\mathbb{R}$ besser ausleuchten („Gödels Programm", bereits 1947 formuliert). Hier gelingen mit der Erforschung des Themenkomplexes der „Projektiven Determiniertheit" durch Martin, Steel, Woodin und andere in den 1980er-Jahren bemerkenswerte Erfolge. Sie setzen den Weg fort, den Cantor 1884 begann (siehe den Eintrag oben).

1990er Woodins Modell

Hugh Woodin konstruiert ein kanonisches Modell, in dem (CH) falsch ist, und ändert seine Einschätzung des Kontinuums-Problems von „unlösbar" in „langfristig lösbar" – mit Spekulationen zu einer Antwort, die $|\mathbb{R}|$ die zweite überabzählbare Mächtigkeit zuweist.

Literatur

Borel, Emile 1898 *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* Gauthier-Villars, Paris.

Brouwer, Luitzen 1911 *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl.* Mathematische Annalen 70, S. 161 – 165.

Cantor, Georg 1874 *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), S. 258 – 262.

– 1878 *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), S. 242 – 258.

– 1892 *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Erster Band. 1890 – 91. 1 (1892), S. 75 – 78. Nachdruck bei Johnson, New York, 1960.

– 1991 *Briefe.* Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson, Springer, Berlin.

 © Oliver Deiser

Cantor, Georg / Dedekind, Richard 1937 *Briefwechsel Cantor – Dedekind.* Herausgegeben von E. Noether und J. Cavaillès. Hermann, Paris.

Cohen, Paul 1963 *The independence of the continuum hypothesis. Part I.* Proceedings of the National Academy of Science USA 50 (1963). S. 1143 – 1148.

– 1964 *The independence of the continuum hypothesis. Part II.* Proceedings of the National Academy of Science USA 51 (1964). S. 105 – 110.

Dedekind, Richard 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, Braunschweig (8. Auflage 1960).

Deiser, Oliver 2004 *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Entwicklung durch Ernst Zermelo.* 2. erweiterte Auflage. Springer, Berlin.

– 2005 *Der Multiplikationssatz der Mengenlehre.* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 107 (2005), S. 89 – 109.

Devlin, Keith 1993 *The Joy of Sets – Fundamentals of Contemporary Set Theory.* 2. Auflage. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter 1994 *Einführung in die Mengenlehre.* 3. Auflage. Bibliographisches Institut, Mannheim.

Gödel, Kurt 1938 *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis.* Proceedings of the National Academy of Sciences USA 24 (1938). S. 556 – 557.

– 1940 *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Annals of Mathematics Studies 3, Princeton University Press, Princeton.

– 1947 *What is Cantor's Continuum Problem?* American Mathematical Monthly 54 (1947), S. 515 – 525.

Halmos, Paul Richard 1960 *Naive Set Theory.* Van Nostrand, Princeton, NJ.

– 1976 *Naive Mengenlehre.* Vierte Auflage. Aus dem Amerikanischen übersetzt von Manfred Armbrust und Fritz Ostermann. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Hausdorff, Felix 1914 *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit & Comp., Leipzig. Nachdrucke bei Chelsea, New York 1949, 1965, 1978. Kommentierter Nachdruck bei Springer, Berlin 2002 Band II der Hausdorff-Werkausgabe.

Jech, Thomas 2003 *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded.* Springer, Berlin.

König, Julius 1905a *Zum Kontinuum-Problem. (Abgedruckt aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904.)* Mathematische Annalen 60 (1905), S. 177 – 180.

– 1905b *Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.* Mathematische Annalen 61 (1905), S. 156 – 160.

– 1906 *Sur la théorie des ensembles.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 143, S. 110 – 112.

Kunen, Kenneth 1980 *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Vol. 102, North-Holland, Amsterdam.

Martin, Donald / Steel, John 1989 *A proof of projective determinacy.* Journal of the American Mathematical Society 2 (1989), S. 71 – 125.

Moschovakis, Yiannis 1994 *Notes on Set Theory.* Springer, New York.

Purkert, Walter / Ilgauds, Hans Joachim 1987 *Georg Cantor 1845 – 1918.* Birkhäuser Verlag, Basel.

Rautenberg, Wolfgang 1987 *Über den Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatz.* Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 34 (1987), S. 71 – 88.

Woodin, W. Hugh 1999 *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal.* Walter de Gruyter, Berlin.

– 2001 *The Continuum Hypothesis, Part I and II.* Notices of the American Mathematical Society 48 (2001), S. 567 – 576 (Teil I), 681 – 690 (Teil 2).

Zermelo, Ernst 1904 *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe).* Mathematische Annalen 59 (1904), S. 514 – 516.

– 1908 *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* Mathematische Annalen 65 (1908), S. 107 – 128.

Zorn, Max 1935 *A remark on method in transfinite algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), S. 667 – 670.

 © Oliver Deiser

3. Charakterisierungen und Konstruktionen

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit den Möglichkeiten der axiomatischen Charakterisierung eines „Kontinuums", und weiter dann mit der Konstruktion von mathematischen Strukturen, die diese Axiome erfüllen – und damit dann prinzipiell gleichberechtigt als Kontinua gelten dürfen.

Die reellen Zahlen sind scheinbar untrennbar mit dem Rechnen verbunden. Denkt man bei einem Kontinuum aber zuallererst an eine „stetige Linie aus Punkten", so geht sicher das Urverhältnis der Atome der Linie untereinander, ihr „links" und „rechts", ihr „später" und „früher" ihrer Arithmetik voraus. Letztere entsteht bei dieser Sicht der Dinge erst nachträglich durch eine geeignete Unterteilung der Linie, erst durch das Messen von Abständen bei gewähltem Nullpunkt und gewählter Einheit. A posteriori kann dann ein Punkt mit seinem Abstand zum Ursprung gleichgesetzt werden (modulo eines Vorzeichens). Diese Arithmetisierung eines Kontinuums ist uns mittlerweile so selbstverständlich geworden, dass man geneigt ist, andere und vielleicht ursprünglichere Anschauungen darüber zu vergessen.

Wir wählen hier, einen Ansatz aus dem späten 19. Jahrhundert hoch achtend, statt des arithmetisch-algebraischen Zugangs denjenigen über den Ordnungsbegriff, und fragen uns also ohne Maßband und Rechenschieber in der Hand: Was ist ein Kontinuum? Was zeichnet die Ordnung der Punkte eines Kontinuums aus? Später bringen wir dann die Arithmetik mit ins Spiel und beweisen einen algebraischen Charakterisierungssatz.

Wir brauchen einige Begriffe der Ordnungstheorie. Eine lineare Ordnung $\langle M, < \rangle$ heißt *nach rechts (links) unbeschränkt*, falls für alle $x \in M$ ein $y \in M$ existiert mit $x < y$ $(y < x)$. $\langle M, < \rangle$ heißt *unbeschränkt* oder auch *eine Ordnung ohne Endpunkte*, falls $\langle M, < \rangle$ nach links und rechts unbeschränkt ist.

Ist von zwei Ordnungen $\langle M, < \rangle$ und $\langle N, < \rangle$ die Rede, so haben die beiden Kleiner-Relationen i. A. nichts miteinander zu tun. Bei Verwechslungsgefahr schreiben wir $<_M$ bzw. $<_N$. Ist $M' \subseteq M$, so schreiben wir auch $\langle M', < \rangle$ für die Einschränkung $\langle M', < \cap\ M'^2 \rangle$ der Ordnung $\langle M, < \rangle$ auf M'.

Die folgende Definition betrachtet ordnungstreue Funktionen, die zwischen zwei linearen Ordnungen vermitteln. Weiter definieren wir, wann zwei lineare Ordnungen aus ordnungstheoretischer Sicht als „gleichwertig, äquivalent, isomorph, identisch bis auf Umbenennung" anzusehen sind.

Definition *(Einbettungen, Ordnungsisomorphismen)*

Seien $\langle M, < \rangle$ und $\langle N, < \rangle$ lineare Ordnungen, und sei $M' \subseteq M$.

(i) Eine Funktion $f : M' \to N$ heißt *ordnungserhaltend* oder eine *Einbettung* von $\langle M', < \rangle$ in $\langle N, < \rangle$, falls für alle $x, y \in M'$ gilt:

$x < y$ *gdw* $f(x) < f(y)$.

(ii) $\langle M, < \rangle$ heißt *einbettbar* in $\langle N, < \rangle$, in Zeichen $\langle M, < \rangle \preccurlyeq \langle N, < \rangle$, falls eine Einbettung $f : M \to N$ existiert.

(iii) Eine Einbettung $f : M \to N$ heißt ein *Ordnungsisomorphismus*, falls $f : M \to N$ bijektiv ist. $\langle M, < \rangle$ und $\langle N, < \rangle$ heißen *ordnungsisomorph* oder auch *ähnlich*, in Zeichen $\langle M, < \rangle \equiv \langle N, < \rangle$, falls ein Ordnungsisomorphismus $f : M \to N$ existiert.

Die Ordnung der rationalen Zahlen

Eine wesentliche Eigenschaft von $\mathbb{Q}$ ist, dass zwischen zwei rationalen Zahlen $p < q$ immer eine rationale Zahl liegt, etwa $(p + q)/2$. Allgemeiner definieren wir für lineare Ordnungen:

Definition *(dichte lineare Ordnung)*

Eine lineare Ordnung $\langle M, < \rangle$ heißt *dicht*, falls für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ ein $z \in M$ existiert mit $x < z < y$.

Neben *dicht* liefert eine kurze Materialsammlung zu $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ noch *abzählbar* und *unbeschränkt*. Ein fundamentaler Satz besagt, dass diese drei Eigenschaften die Ordnung der rationalen Zahlen bereits bis auf Isomorphie festzurren:

Satz *(Cantors Isomorphiesatz für die Ordnung der rationalen Zahlen)*

Sei $\langle M, < \rangle$ eine abzählbare, dichte und unbeschränkte lineare Ordnung. Dann gilt $\langle M, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Der Satz findet sich in [Cantor 1895] und implizit in [Cantor 1884]. Wir geben das originale Argument.

Beweis

Seien $x_0, x_1, \dots$ und $q_0, q_1, \dots$ injektive Aufzählungen von M bzw. von $\mathbb{Q}$. Wir definieren rekursiv Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$ wie folgt.
Zunächst sei $f(x_0) = q_0$.
Seien nun $f(x_0), \dots, f(x_n)$ definiert. Wir setzen:

$f(x_{n+1})$ = „das erste q_i der Aufzählung von $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft:
die Funktion $f_{n+1} := \{ (x_k, f(x_k)) \mid 0 \leq k \leq n \} \cup \{ (x_{n+1}, q_i) \}$,
$f_{n+1} : \{ x_0, \dots, x_{n+1} \} \to \mathbb{Q}$, ist ordnungserhaltend.“

Anschaulich: Wir definieren $f(x_{n+1})$ derart, dass die Elemente $x_0, \dots, x_{n+1}$ in M paarweise genauso zueinander in Relation stehen wie die Elemente $f(x_0), \dots, f(x_{n+1})$ in $\mathbb{Q}$.

© Oliver Deiser