6b. Algebraische Gleichungen (Lösungen)

Übung 1

Sei $z^2 + bz + c = 0$ eine algebraische Gleichung zweiten Grades in der Variablen z in einem Körper K. Weiter sei $w_1 \in K$ eine Lösung der Gleichung, und es sei $w_2 = -(b + w_1)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome und einfacher Folgerungen aus diesen Axiomen (Inversenregeln, binomische Formeln, Nullteilerfreiheit):

(a) w_2 ist eine Lösung der Gleichung.

(b) $w_1 + w_2 = -b, \quad w_1 w_2 = c.$ *(Regeln von Vieta)*

(c) Ist $w \in K$ eine Lösung der Gleichung, so gilt $w = w_1$ oder $w = w_2$.

Lösung zu Übung 1

zu (a):

Aufgrund der Rechenregeln in K gilt:

$$\begin{aligned} w_2^2 + bw_2 + c &= (b + w_1)^2 - b(b + w_1) + c \\ &= b^2 + 2bw_1 + w_1^2 - b^2 - bw_1 + c \\ &= w_1^2 + bw_1 + c = 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass w_2 eine Lösung der Gleichung ist.

zu (b):

Es gilt

$$w_1 + w_2 = w_1 - (b + w_1) = w_1 - b - w_1 = -b$$

$$w_1 w_2 = -w_1 (b + w_1) = -(w_1^2 + bw_1) = c$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass $w_1^2 + bw_1 + c = 0$ gilt (da w_1 die Gleichung löst).

zu (c):

Sei w eine Lösung der Gleichung. Wir zeigen die folgende zu „$w = w_1$ oder $w = w_2$" logisch äquivalente Aussage:

$$w \neq w_1 \quad \textit{impliziert} \quad w = w_2$$

Es gelte also $w \neq w_1$. Da w_1 und w die Gleichung lösen, gilt:

(I) $\quad w_1^2 + bw_1 + c = 0$

(II) $\quad w^2 + bw + c = 0$

Durch Subtraktion erhalten wir

$w_1{}^2 - w^2 + b w_1 - b w = 0.$

Die dritte binomische Formel und das Distributivgesetz liefern

$(w_1 + w)(w_1 - w) + b(w_1 - w) = 0.$

Ausklammern von $w_1 - w$ ergibt

$(w_1 - w)(w_1 + w + b) = 0.$

Da K nullteilerfrei ist, ist einer der beiden Faktoren 0. Nach Voraussetzung gilt $w_1 \neq w$, sodass $w_1 - w \neq 0$. Folglich gilt

$w_1 + w + b = 0,$

sodass

$w = -(b + w_1) = w_2.$

Bemerkung

(1) Der Beweis verwendet möglichst wenige Rechenregeln in K. Die Sätze über das Abspalten von Linearfaktoren und der Koeffizientenvergleich werden nicht verwendet. Mit Hilfe dieser Sätze können wir so argumentieren: Seien w_1, w_2 Lösungen der Gleichung. Zerlegung in Linearfaktoren liefert

$(z - w_1)(z - w_2) = 0.$

Ausmultiplizieren ergibt

$z^2 - (w_1 + w_2) z + w_1 w_2 = 0.$

Durch Koeffizientenvergleich mit $z^2 + bz + c$ erhalten wir

$b = -(w_1 + w_2) \quad c = w_1 + w_2.$

(2) Sind w_1, w_2 Lösungen der Gleichung, so erhalten wir durch Subtraktion wie im Beweis von (c) oben:

$(w_1 - w_2)(w_1 + w_2 + b) = 0.$

Im Fall $w_1 \neq w_2$ lassen sich nun die Regeln von Vieta leicht gewinnen, da

$w_1 + w_2 = -b$

$w_1 w_2 = -w_1 (b + w_1) = -(w_1{}^2 + b w_1) = c.$

Dieses Argument benötigt, dass die Lösungen verschieden sind. Die Formeln von Vieta gelten auch im Fall einer doppelten Nullstelle (d. h. $w_1 = w_2$ und es gibt keine weiteren Lösungen).

(3) Für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ ergeben sich die Formeln von Vieta auch leicht aus der Mitternachtsformel

$$2\,w_{1,2} \;=\; -\,b \pm \sqrt{b^2 - 4c}$$

für die Lösungen der Gleichung. Denn es gilt:

$$2(w_1 + w_2) \;=\; -\,b + \sqrt{b^2 - 4c} \;-\; b - \sqrt{b^2 - 4c} \;=\; -2\,b$$

$$4\,w_1\,w_2 \;=\; \left(-\,b + \sqrt{b^2 - 4c}\right)\left(-\,b - \sqrt{b^2 - 4c}\right) \;=\; b^2 - (b^2 - 4c) \;=\; 4c$$

Übung 2

Skizzieren Sie die Lösungen der komplexen Gleichung

$$(z - 1 + i)^5 - 4\sqrt{2}\, i = 0$$

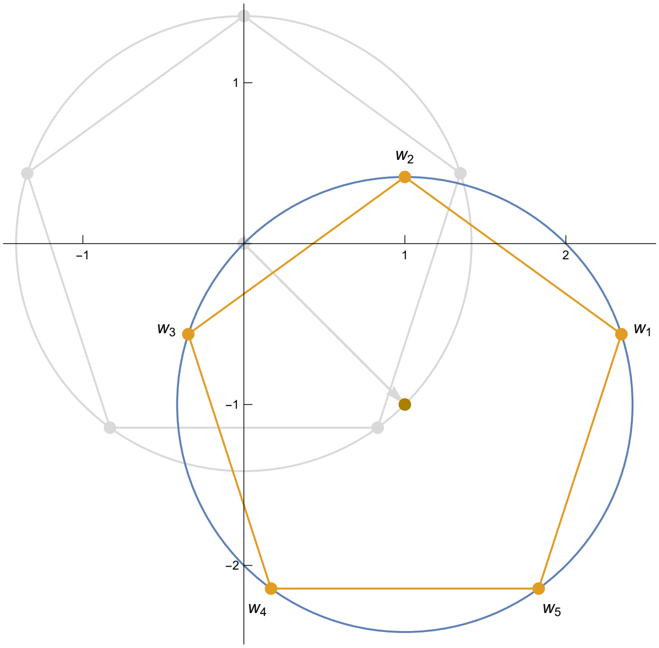
(Die Lösungen lassen sich geometrisch finden.)

Lösung zu Übung 2

Wir setzen $r = \sqrt{2}$. Dann gilt

$$r^5 = 4r = 4\sqrt{2}$$

Die Lösungen von $z^5 = r^5 i$ sind die Ecken des regelmäßigen in den zentrischen Kreis K_r mit dem Radius r einbeschriebenen Pentagons, dem die Ecke $(r, \pi/10)_{polar}$ angehört (mit $i = (1, \pi/2)_{polar}$). Die Nullstellen der Gleichung $(z - 1 + i)^5 = r^5\, i$ erhalten wir durch eine Translation der Lösungen von $z^5 = r^5\, i$ um $1 - i$.



Die komplexen Lösungen $w_1, \ldots, w_5$ der Gleichung

$$(z - i + 1)^5 - 4\sqrt{2}\, i = 0$$

Hellgrau gezeichnet das analoge Diagramm für $z^5 - 4\sqrt{2}i = 0$ und der Translationsvektor $(1, -1) = 1 - i$. Die Kreise haben den Radius $r = \sqrt{2}$.

