6. Kompakte Operatoren

6.1. Definition. X, Y seien Banachräume. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt kompakt, falls das Bild jeder beschränkten Menge in einer kompakten Menge enthalten ist (relativ kompakt ist), mit anderen Worten

$$M \text{ beschränkt } \Rightarrow \overline{A(M)} \text{ kompakt.}$$

Schreibe: $A \in \mathcal{K}(X,Y), \mathcal{K}(X,X) = \mathcal{K}(X)$.

6.2. Bemerkung.

(a) Es langt zu fordern, dass das Bild der Einheitskugel in einer kompakten Menge enthalten ist, denn jede beschränkte Menge M ist in einer Kugel $B(0,R)$ (R hinreichend groß) enthalten. Daher

$$A(M) \subseteq A(B(0,R)) \subseteq RAB(0,1).$$

(b) $\overline{A(M)}$ ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt.

6.3. Satz. *Die Einheitskugel in einem Banachraum ist genau dann relativ kompakt, wenn dessen Dimension endlich ist.*
Speziell: $I : X \to X$ kompakt $\Leftrightarrow$ X endlich-dimensional.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Ist X endlich-dimensional, so ist $X \cong \mathbb{K}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent. Für die Euklidische Norm beispielsweise wissen wir nach Heine Borel, dass $\overline{B(0,1)}$ kompakt ist.
„$\Rightarrow$“ Nach 1.22 existieren $x_1, \ldots, x_m \in B(0,1)$ derart, dass

$$B(0,1) \subseteq \left(x_1 + B(0, \frac{1}{2})\right) \cup \ldots \cup \left(x_m + B(0, \frac{1}{2})\right).$$

Setze $Y = \text{span}\,\{x_1, \ldots, x_m\}$. Dann gilt

$$B(0,1) \subseteq Y + B(0, \frac{1}{2}). \tag{1}$$

Also $B(0, \frac{1}{2}) \subseteq Y + B(0, \frac{1}{4})$. Einsetzen in (1) liefert: $B(0,1) \subseteq Y + Y + B(0, \frac{1}{4}) = Y + B(0, \frac{1}{4})$. Durch Iteration: $B(0,1) \subseteq Y + B(0, \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, somit $B(0,1) \subseteq Y$. Daher ist $X = Y$ m-dimensional. ◁

6.4. Lemma. *X, Y, Z, W seien Banachräume. $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann gilt:*

(a) $A + B \in \mathcal{K}(X,Y)$ *für* $B \in \mathcal{K}(X,Y)$.

(b) $\lambda A \in \mathcal{K}(X,Y)$.

(c) $BA \in \mathcal{K}(X,Z)$ *für* $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$.

(d) $AB \in \mathcal{K}(W,Y)$ *für* $B \in \mathcal{L}(W,X)$.

Insbesondere ist $\mathcal{K}(X)$ ein Ideal in $\mathcal{L}(X)$.

Beweis. Es sei E_X die Einheitskugel in X.
(a) Wie wir wissen, sind $\overline{A(E_X)}$ und $\overline{B(E_X)}$ kompakt, somit auch $\overline{A(E_X)} \times \overline{B(E_X)} \subseteq Y \times Y$. Aus der Stetigkeit der Addition $+$: $Y \times Y \to Y$ folgt die Behauptung (1.12).
(b) Analog.
(c) Mit $\overline{A(E_X)}$ ist auch $B\overline{A(E_X)}$ kompakt.
(d) Da $B(E_X)$ beschränkt ist, ist $A(B(E_X))$ relativ kompakt. ◁

6.5. Satz. *$\mathcal{K}(X,Y)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Beweis. Es sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{K}(X,Y)$, $A_n \to A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeige: $A(E_X)$ ist relativ kompakt. Dazu zeige (vgl. 1.22): Jede Folge in $A(E_X)$ hat eine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist.

(Indirekt) Annahme, dies ist falsch. Dann existiert eine Folge $(x_j) \subseteq E_X$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $\|Ax_j - Ax_k\| \geq \varepsilon$ für alle k, j. Da $A_n \to A$ konvergiert, existiert N mit $\|A_n - A\| < \varepsilon/3$ für $n \geq N$.

Dann ist $\|A_n x_j - A_n x_k\| \geq \|Ax_j - Ax_k\| - \|Ax_j - A_n x_j\| - \|Ax_k - A_n x_k\| \geq \varepsilon/3$ im Widerspruch zur relativen Kompaktheit von $A_n(E_X)$. $\lhd$

6.6. Lemma. *Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild sind kompakt.*

Beweis. Hat $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ endlich-dimensionales Bild, so ist $A(E_X)$ beschränkte Teilmenge in einem endlich-dimensionalen Raum. Nach Bolzano-Weierstraß hat dort jede Folge eine Teilfolge, die Cauchy-Folge ist. $\lhd$

Das Spektrum kompakter Operatoren.

6.7. Satz. *X Banachraum, $A \in \mathcal{K}(X), \lambda \neq 0$. Dann gilt*

(a) Kern $(\lambda I - A)$ *ist endlich-dimensional.*

(b) *Es gibt eine Projektion $P \in \mathcal{L}(X)$ mit* Bild $P =$ Kern $(\lambda I - A)$.

(c) Bild $(\lambda I - A)$ *abgeschlossen.*

(d) *Ist $\dim X = \infty$, so ist $0 \in \sigma(A)$.*

Beweis. (a) Setze $X_0 = \operatorname{Kern}(\lambda I - A) \subseteq X$. Dann ist $\overline{A(E_{X_0})} \subseteq \overline{A(E_X)}$ kompakt. Andererseits ist $A|_{X_0} = \lambda I_{X_0}$, also $\overline{A(E_{X_0})} = \lambda \overline{E_{X_0}}$. Daher ist die Einheitskugel in X_0 kompakt, also nach 6.3 endlich-dimensional.

(b) Es sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)$. Definiere $x_j' : \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{K}, j = 1, \ldots, n$ durch $x_j'(x_k) = \delta_{jk}$ und setze es nach Hahn-Banach zu einem Element von X' fort. Definiere $Px = \sum_{j=1}^n x_j'(x) x_j$.

(c) Da P eine Projektion ist, können wir schreiben $X = \operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Bild} P = M \oplus \operatorname{Kern}(\lambda I - A)$ mit $M = \operatorname{Kern} P$. Es sei $y_n = (\lambda I - A)x_n = \lambda x_n - Ax_n$, und es gelte $y_n \to y \in H$. Wir können annehmen, dass x_n in M liegt.

Annahme: (x_n) ist nicht beschränkt. Da (y_n) konvergiert und $x_n \neq 0$ ist, gilt:

$$\lambda \frac{x_n}{\|x_n\|} - A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|x_n\|} \to 0. \tag{1}$$

Da A kompakt ist, hat $A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ eine konvergente Teilfolge. Weil $\lambda \neq 0$ ist, hat auch $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ eine konvergente Teilfolge, etwa gegen m mit $m \in M$ und $\|m\| = 1$. Nun ist aber nach (1) $(\lambda I - A)m = 0$, somit $m \in M \cap \operatorname{Kern}(\lambda I - A) = \{0\}$ im Widerspruch zu $\|m\| = 1$.

Also ist (x_n) beschränkt. Wegen der Kompaktheit von A hat (Ax_n) eine konvergente Teilfolge. Weil jedoch $\lambda x_n - Ax_n = y_n$ ist und (y_n) konvergiert, hat auch (x_n) eine konvergente Teilfolge, etwa gegen x. Aus der Stetigkeit von A folgt, dass $(\lambda I - A)x = y$ und somit $y \in \operatorname{Bild}(\lambda I - A)$.

(d) Dass $0 \notin \sigma(A)$ ist, heißt, dass A invertierbar ist. Dann ist $I = A^{-1}A \in \mathcal{K}(X)$ nach 6.4(c). Aus 6.3 folgt dann $\dim X < \infty$. $\lhd$

6.8. Rieszsches Lemma. *Es sei U ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums X und $U \neq X$. Dann existiert zu $0 < \delta < 1$ ein $x_\delta \in X$ mit*

$$\|x_\delta\| = 1 \text{ und } \|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta \text{ für alle } u \in U$$

Beweis. Wähle $x \in X \setminus U$ und setze $d := \inf\{\|x-u\| : u \in U\}$. Da X abgeschlossen ist, ist $d > 0$. Nach Wahl von δ ist $d < \frac{d}{1-\delta}$. Wir finden daher ein $u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$.
Nun leistet $x_\delta = (x - u_\delta)/\|x - u_\delta\|$ das Gewünschte: Die Norm ist 1, und für $u \in U$ ist

$$\begin{aligned} \|x_\delta - u\| &= \left\| \frac{x}{\|x-u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\| \\ &= \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \|x - (u_\delta + \|x-u_\delta\| u)\| \end{aligned}$$

Nun ist $u_\delta + \|x - u_\delta\|u$ in U, und daher ist die rechte Seite größer als $1-\delta$. ◁

6.9. Satz. *Für $A \in \mathcal{K}(X)$, X Banachraum, gilt*

(a) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *besteht lediglich aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit.*

(b) *Einzig möglicher Häufungspunkt ist Null; alle anderen Spektralwerte α sind isoliert:*

$$\forall \alpha \in \sigma(A) \setminus \{0\} \; \exists \, \varepsilon > 0 : B(\alpha, \varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\alpha\}.$$

Beweis. (a) Wir zeigen: Ist $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Kern}\,(\lambda I - A) = \{0\}$ (kein Eigenwert), so ist $\mathrm{Bild}\,(\lambda I - A) = X$ (d. h. $\lambda I - A$ invertierbar).
Dazu: $R := \mathrm{Bild}\,(\lambda I - A)$ ist abgeschlossen nach 6.7(c), also Banachraum. Ferner ist $\lambda I - A : X \to R$ bijektiv. Daher ist $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(R, X)$ (Satz von der offenen Abbildung).
Annahme: $R < X$. Setze $R_N := \mathrm{Bild}\,(\lambda I - A)^N$.
Behauptung: Dann gilt $R_0 > R_1 > R_2 > \ldots$. Dazu: Es ist $R_0 = X > R = R_1$. Wäre $R_m = R_{m+1}$ so auch $X = R_0 = (\lambda I - A)^{-m} R_m = (\lambda I - A)^{-m} R_{m+1} = R$. Widerspruch!
Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ wähle nun (mit dem Rieszschen Lemma für $\delta = 1/2$) $x_m \in R_m$ mit $\|x_m\| = 1$ und $\|x - u\| \geq 1/2$ für alle $u \in R_{m+1}$. Wir erhalten eine beschränkte Folge (x_m). Wegen der Kompaktheit von A hat (Ax_m) eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt für $n > m \geq 1$:

$$\|Ax_m - Ax_n\| = \|\lambda x_m - ((\lambda I - A)x_m + \lambda x_n - (\lambda I - A)x_n)\| > \frac{|\lambda|}{2},$$

denn $(\lambda I - A)x_m + \lambda x_m - (\lambda I - A)x_m)$ liegt in R_{m+1}. Widerspruch.
Folglich ist $R = H$ und $\sigma(A) \setminus \{0\}$ besteht nur aus Eigenwerten. Die Vielfachheit ist endlich nach Satz 6.7.
(b) Annahme: Es gibt eine Folge (λ_j) paarweise verschiedener Eigenwerte mit $\lambda_j \to \lambda$. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $(\lambda_n I - A)x_n = 0$.
Bekannt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. (Annahme: Es gibt linear abhängige Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Dann existiert eine nichttriviale Linearkombination $0 = \sum_{j=1}^{k} v_j$ von Eigenvektoren $v_j \neq 0$ zum Eigenwert λ_j (paarweise verschiedene λ_j) mit minimalem k.
Es folgt

$$0 = (A - \lambda_k I)\Big(\sum_{j=1}^{k} v_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j - \sum_{j=1}^{k} \lambda_k v_j = \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_j - \lambda_k)}_{\neq 0} v_j;$$

d. h. es gibt eine kürzere Linearkombination. Widerspruch zur Annahme.) Die x_n sind daher linear unabhängig. Setze $X_n = \mathrm{span}\,\{x_1, \ldots, x_n\}$; wähle $y_n \in X_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\|y_n - u\| \geq 1/2$ für alle $u \in X_{n-1}$ (Rieszsches Lemma). Dann ist (y_n) eine beschränkte Folge, und wegen der Kompaktheit von A hat (Ay_n) eine konvergente Teilfolge.
Andererseits gilt für $n > m$

$$\|Ay_n - Ay_m\| = \|\lambda_n y_n - ((\lambda_n I - A)y_n + \lambda_m y_m - (\lambda_m I - A)y_m)\|.$$

Nun ist $y_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ und $(\lambda_n I - A)x_n = 0$, also $(\lambda_n I - A)y_n \in X_{n-1}$. Ohnehin ist $\lambda_m y_m - (\lambda_m I - A)y_m \in X_{n-1}$. Es folgt $\|Ay_n - Ay_m\| \geq |\lambda_n|/2 \to |\lambda|/2$. Für $\lambda \neq 0$ ergib sich ein Widerspruch. Also ist Null einziger Häufungspunkt. $\lhd$

Adjungierte Operatoren. Auch für Banachräume kann man die Adjungierte eines Operators definieren:

6.10. Definition und Lemma. Es sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, X,Y normiert. Dann existiert genau ein Operator $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$ mit

(1) $$(A'y')(x) = y'(Ax), \quad y' \in Y', x \in X.$$

Alternative Schreibweise mit (X,X')- bzw. (Y,Y')-Dualität:

$$\langle x, A'y'\rangle_{X,X'} = \langle Ax, y'\rangle_{Y,Y'}.$$

A' heißt Adjungierte zu A. Es gilt

$$\|A\| = \|A'\|.$$

Beachte: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergibt sich ein Unterschied zur Hilbertraumadjungierten, weil $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ bilinear ist und nicht sesquilinear. Diese Adjungierte entspricht bei Matrizen der Transponierten. Die folgenden Aussagen gelten jedoch auch für die Hilbertraumadjungierten.

Beweis. Die Bedingung (1) heißt gerade $A'y' = y' \circ A$. Damit ist klar, dass $A'y' \in X'$.

Klar: A' ist eindeutig und linear. Zum Beweis der Stetigkeit verwenden wir, dass $\|x\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} x'(x)$. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} \|A'\| &= \sup_{\|y'\|\leq 1} \|A'y'\| = \sup_{\|y'\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |A'y'(x)| \\ &= \sup_{\|y'\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |y'(Ax)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |Ax| = \|A\|. \end{aligned}$$

$\lhd$

6.11. Satz von Arzelà-Ascoli. K sei ein kompakter metrischer Raum und $F \subseteq C(K)$ gleichstetig und punktweise beschränkt. Dann ist F relativ kompakt; d.h. jede beschränkte Folge in F hat eine konvergente Teilfolge.

Erinnerung:

(a) F ist punktweise beschränkt, falls für jedes $x \in K$ die Mengen $\{f(x) : f \in F\}$ beschränkt ist.

(b) F ist gleichstetig, falls zu jedem $x \in K$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \text{falls } d(x,x') < \delta, f \in F.$$

6.12. Satz. (Schauder) *X und Y seien Banachräume. Dann ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann kompakt, wenn $A' \in \mathcal{L}(Y',X')$ kompakt ist.*

Beweis. '$\Rightarrow$': Es sei A kompakt und $(y_n')_n$ eine Folge in Y' mit $\|y_n'\| \leq 1$. Dann bilden die y_n' eine gleichstetige Menge von Funktionalen auf Y, weil

$$|y_n'(y_1) - y_n'(y_2)| = |y_n'(y_1 - y_2)| \leq \|y_n'\|\|y_1 - y_2\|.$$

Bezeichnet $B = B(0,1)$ die Einheitskugel in X, so ist $K = \overline{A(B)}$ kompakt. Dann erfüllt (y_n') die Annahmen von Arzela-Ascoli. Wir finden also eine konvergente Teilfolge, oBdA wieder (y_n'). Es folgt:

$$\|A'y_n' - A'y_m'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |A'(y_n' - y_m')(x)| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|=\leq 1} |(y_n' - y_m')(Ax)| \leq \|y_n' - y_m'\|\|A\| \to 0.$$

Folglich ist $(A'y_n')_n$ konvergent und somit A' kompakt.

'$\Leftarrow$': analog. Der Vollständigkeit halber: Es sei A' kompakt und (x_n) eine Folge in X mit $\|x_n\| \leq 1$. Bezeichne mit B' die Einheitskugel in Y' und mit $K' = \overline{A'(B')}$ den Abschluss des Bilds, der kompakt ist. Wir können die x_n als stetige Funktionen auf K' auffassen, nämlich durch $x_n(x') := x'(x_n)$. Mit dieser Konvention erfüllt (x_n) die Annahmen von Arzela-Ascoli, denn

$$|x_n(k'_1 - k'_2)| = |(k'_1 - k'_2)(x_n)| \leq \|k'_1 - k'_2\|\|x_n\|, \quad k'_1, k'_2 \in K' \quad \text{(Gleichstetigkeit)}$$

und $x_n(x')$ ist beschränkt, da K' kompakt ist. Also existiert eine Teilfolge, oBdA wieder (x_n) mit $\sup_{k' \in K'} |(x_n - x_m)(k')| \to 0$. Es folgt

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |(Ax_n - Ax_m)(x')| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|x'\| = \leq 1} |(x_n - x_m)(A'x')| \to 0.$$

Folglich ist $(Ax_n)_n$ konvergent und A kompakt. ◁

Starke und schwache Konvergenz.

6.13. Definition. Wir nennen eine Folge (x_n) in X schwach konvergent gegen $x \in X$, geschrieben $x_n \overset{w}{\to} x$, falls

$$x'(x_n - x) \to 0 \quad \text{für alle } x' \in X'.$$

6.14. Bemerkung. Aus Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Die Umkehrung gilt nicht: Im Hilbertraum sind die Funktionale durch Paarung mit anderen Vektoren gegeben. Ist nun etwa (e_n) eine Orthonormalbasis in einem unendlich-dimensionalem Hilbertraum, so gilt $e_n \xrightarrow{w} 0$, da $\langle e_n, x\rangle \in l^2$ für $x \in H$. Offensichtlich ist aber (e_n) nicht gegen Null konvergent.

6.15. Lemma. *Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis. Es sei $x_n \overset{w}{\to} x$. Für jedes $x' \in X'$ ist dann $x'(x_n)$ konvergent, also beschränkt, durch $C(x')$. Damit ist $(x_n)_n$ schwach beschränkt, also nach Banach-Steinhaus (Folgerung 3.4) stark beschränkt. ◁

6.16. Satz. *Es sei $A : X \to Y$ linear. Dann ist äquivalent:*

(1) *A beschränkt (d. h. aus $x_n \to x$ folgt $Ax_n \to Ax$).*

(2) *Aus $x_n \overset{w}{\to} x$ folgt $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$.*

(3) *Aus $x_n \to x$ folgt $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Es ist $\langle Ax_n - Ax, y\rangle = \langle x_n - x, A'y\rangle \to 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Klar.

(3) $\Rightarrow$ (1) (mit Graphensatz) Gilt $x_n \to 0, Ax_n \to z$, so folgt nach Annahme für beliebiges y: $\langle Ax_n, y\rangle \to 0$. Andererseits gilt $\langle Ax_n, y\rangle \to \langle z, y\rangle$. Es folgt $z = 0$. ◁

6.17. Definition. Ist X ein Banachraum, so können wir X als Teilmenge des 'Bidualraums' X'' auffassen: Wir definieren die Abbildung $\iota_X : X \to X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$ durch $(\iota_X x)(x') = x'(x)$. Dies ist eine Isometrie: $\|\iota_X x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |(\iota_X x)(x')| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)| = \|x\|$ nach Satz 2.35. Insbesondere ist ι_X stets injektiv. Man nennt X reflexiv, wenn ι_X auch surjektiv ist.

Ferner können wir auf X' ein System von Halbnormen $\{p_x : x \in X\}$ definieren durch

$$p_x(x') = |x'(x)|.$$

Die erzeugte Topologie heißt schwach-*-Topologie.

6.18. Satz. *X sei ein separabler Banachraum und X' sein Dualraum. Dann hat jede beschränkte Folge $(x'_k) \subseteq X'$ eine Teilfolge (x'_{k_l}), die in der schwach-$*$-Topologie gegen ein Element $x' \in X'$ konvergiert, d.h. $\langle x'_{k_l} - x', x\rangle \to 0$ für jedes $x \in X$.*

Man formuliert das auch griffig so: Die Einheitskugel im Dualraum ist schwach-$*$-folgenkompakt. Dies ist eine schwache Version des Satzes von Banach-Alaoglu, der besagt, dass die Einheitskugel im Dualraum ist schwach-$*$-kompakt ist.

Beweis. Dass X separabel ist, heißt, dass es eine abzählbare Menge $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ gibt, die in X dicht ist. Wegen der Beschränktheit von (x'_k) gilt für jedes j:

$$|x'_k(d_j)| \le \|x'_k\| \|d_j\| \le C\|d_j\|.$$

Somit ist $x'_k(d_j)$ für festes j beschränkt in $\mathbb{C}$.
Wir extrahieren daraus die gesuchte Teilfolge mit dem Diagonalfolgen-Prinzip. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ hat eine konvergente Teilfolge. Wir finden daher eine Teilfolge A_1 von $\mathbb{N}$ so, dass $(x'_k(d_1))_{k\in A_1}$ in $\mathbb{C}$ gegen ein Element c_1 konvergiert und iterativ $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$ so, dass

$$(x'_k(d_j))_{k\in A_j} \text{ konvergent gegen } c_j \in \mathbb{C} \text{ ist.}$$

Wir bezeichnen das l-te Element von A_l mit k_l und betrachten die 'Diagonalfolge' (x'_{k_l}). Nach Konstruktion gilt $\lim_{l\to\infty} x'_{k_l}(d_j) = c_j$ für jedes j. Nun definieren wir ein Funktional x' auf $\operatorname{span} D$ durch $x'(d_j) = c_j$. Selbst wenn D nicht linear unabhängig ist, ist dies wohldefiniert: Ist nämlich $\sum \lambda_j d_j = 0$, so ist

$$0 = \lim_{l\to\infty} \langle x'_{k_l}, \sum_j \lambda_j d_j\rangle = \sum_j \lambda_j \lim_{l\to\infty} \langle x'_{k_l}, d_j\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum \lambda_j c_j.$$

Ferner ist

$$|x'(d_j)| = |c_j| = \lim_{l\to\infty} |\langle x_{k_l}, d_j\rangle| \le C\|d_j\|,$$

d.h. x' ist beschränkt auf $\operatorname{span} D$. Nach dem Fortsetzungssatz hat x' eine Fortsetzung zu einer beschränkten linearen Abbildung auf dem Abschluss $\overline{\operatorname{span} D} = X$, und $|x'(x)| \le C\|x\|$ mit demselben C.
Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ gilt: $(x'_{k_l} - x')(x) \to 0$ für $l \to \infty$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt und x fest. Zunächst finden wir ein $d_{j_0} \in D$ mit $\|x - d_{j_0}\| \le \varepsilon/(4C)$. Anschließend wählen wir ein n_0 so, dass

$$|x'_{k_l}(d_{j_0}) - c_{j_0}| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad l \ge n_0.$$

Es folgt, dass für $l \ge n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |x('_{k_l} - x')(x)| &\le |(x'_{k_l} - x')(d_{j_0})| + |(x'_{k_l} - x')(x - d_{j_0})| \\ &\le |\langle x'_{k_l}, d_{j_0}\rangle - c_{j_0}| + 2C\|x - d_{j_0}\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

◁

6.19. Bemerkung. Ist X sogar ein Hilbertraum, so braucht man die Separabilität nicht: Man wählt $D = \{x'_1, x'_2, \ldots\}$, d.h. die Folge selbst. Dann kann man x' wie oben auf $\overline{\operatorname{span} D}$ definieren; auf $\overline{\operatorname{span} D}^{\perp}$ setzt man $x' = 0$.

6.20. Satz. *X reflexiv $\Leftrightarrow$ X' reflexiv.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Ist $x''' \in X'''$, so ist $x' := x'''\iota_X$ in X'. Ist $x'' \in X''$, so existiert nach Annahme ein $x \in X$ mit $x'' = \iota_X x$. Dann gilt:

$$x'''(x'') = x'''(\iota_X x) = (x'''\iota_X)(x) = x'(x) = x''(x') = \iota_{X'} x'(x'').$$

Folglich ist $x''' = \iota_{X'} x'$.
"$\Leftarrow$" Wegen der Isometrie-Eigenschaft von ι_X ist $\iota_X(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von X'' und somit $X''/\iota_X(X)$ selbst ein Banachraum. Ist X nicht reflexiv, so ist $X''/\iota_X(X) \ne 0$. Daher existiert ein Element $\ne 0$ in seinem Dualraum, und dieses definiert (!) ein Element $0 \ne x''' \in X'''$

mit $x'''(x) = 0$ für alle $x \in X$. Nach Annahme ist X' reflexiv. Daher gibt es ein Element $x' \in X'$ mit $\iota_{X'} x' = x'''$. Wegen $x'''(\iota_X(X)) = 0$ folgt:

$$x'(x) = (\iota_X x)(x') = (\iota_{X'} x')(\iota_X x) = x'''(\iota_X x) = 0,$$

woraus folgt, dass $x' = 0$ und somit $x''' = \iota_{X'}(x') = 0$. Widerspruch.

6.21. Satz. *Ist X ein reflexiver Banachraum und $U < X$ ein abgeschlossener Unterraum, so sind auch X/U und U reflexiv.*

Beweis. 1. *Vorüberlegung:* Wir betrachten die Einbettungsabbildung $i_U : U \to X$. Die duale Abbildung ist $i'_U : X' \to U'$ mit $i'_U(x') = x'_{|U}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist sie surjektiv, denn jedes Element $u' \in U'$ kann zu $x' \in X'$ fortgesetzt werden mit $\|u'\| = \|x'\|$, s. Satz 2.33.
Der Kern dieser Abbildung ist

$$U^\perp := \{x' \in X' : x'(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Die Abbildung $\bar{i} : X'/U^\perp \to U'$ gegeben durch $x' + U^\perp \to x'_{|U}$ ist daher bijektiv und isometrisch.
2. *Reflexivität von $Q = X/U$.* Es sei $\pi : X \to Q$, $x \mapsto x + U$ die Quotientenabbildung. Die duale Abbildung ist $\pi' : Q' \to X'$. Dabei ist $Q' = (X/U)' = \{x' \in X' : x'_{|U} = 0\} = U^\perp \subseteq X'$ und π' eine Isometrie.
Genau wie in 1. ist dann die duale Abbildung $\pi'' : X'' \to Q''$ surjektiv. Folglich gibt es zu $q'' \in Q''$ ein $x'' \in X''$ mit $\pi''(x'') = q''$. Da X reflexiv ist, ist $x'' = \iota_X x$ für ein geeignetes $x \in X$. Setze $q = \pi x$. Dann gilt

$$\iota_Q q \stackrel{\text{def}}{=} \iota_Q \pi x \stackrel{\text{s.u}}{=} \pi'' \iota_X x \stackrel{\text{def}\, x''}{=} \pi'' x'' \stackrel{\text{def}\, q''}{=} q''.$$

Für die zweite Gleichheit beachten wir, dass beide Seiten gerade die Interpretation von x als einem Element in Q'' liefern:

$$\iota_Q(\pi x) q' = q'(\pi x) = (q'\pi)(x) = (\iota_X x)(q'\pi) = (\iota_X x)(\pi' q') = \pi''(\iota_X x)(q').$$

Somit ist $Q'' = Q$.
3. *Reflexivität von U.* Mit X ist nach Satz 6.20 auch X' reflexiv. Mit 2. folgt die Reflexivität von $X'/U^\perp = U'$ und wiederum nach Satz 6.20 die von U. ◁

6.22. Satz. *X sei ein normierter Raum und X' separabel. Dann ist auch X separabel.*

Beweis. Es sei $D = \{x'_1, x'_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X'. Wähle $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|$ (das ist möglich nach Definition der Operatornorm). Setze dann $V = \overline{\text{span}\{x_1, x_2, \ldots\}}$. Wäre $V < X$, so gäbe es nach Hahn-Banach ein Element $0 \neq q' \in (X/V)'$. Bezeichnet man mit π_V die Quotientenabbildung $x \mapsto x + V$, so ist $q' \circ \pi_V$ ein Element von X' mit $x' \neq 0$ und $x'(V) = 0$, insbesondere also $x'(x_n) = 0$. Nach Definition gibt es eine Folge (x'_{n_k}) in D mit $x'_{n_k} \to x'$. Es folgt:

$$0 \leftarrow \|x'_{n_k} - x'\| \geq |(x'_{n_k} - x')(x_{n_k})| = |x'_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|x'_{n-k}\|.$$

Daraus schließen wir zunächst, dass $x'_{n_k} \to 0$ und daraus, dass $x' = 0$. Widerspruch! ◁
Wir erhalten damit folgenden wichtigen Satz:

6.23. Satz. *In einem reflexiven Banachraum (und somit in jedem Hilbertraum) hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es sei (x_k) eine Folge in X, die wir nun als Folge in $X'' = (X')'$ auffassen.
Ist $X = X''$ separabel, so auch X' nach 6.22. Nun folgt die Aussage sofort aus Satz 6.18, angewendet auf X' in der Rolle von X und X'' in der Rolle von X'.
Im allgemeinen Fall setzen wir $U = \overline{\text{span}\ \{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$. Nach Satz 6.21 ist mit X auch U reflexiv. Also hat (x_k) eine Teilfolge, die in U schwach konvergiert. Sie konvergiert dann auch schwach in

X, weil $id : U \to X$ nach Satz 6.18 schwach konvergente Folgen in schwach konvergente Folgen überführt. $\lhd$

Damit erhalten wir eine neue Charakterisierung der kompakten Operatoren für reflexives X:

6.24. Satz. *Es sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und X reflexiv.*[1] *Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist kompakt.*

(2) *Aus $x_n \overset{w}{\to} 0$ folgt $Ax_n \to 0$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) (indirekt). Annahme: Es gibt eine Folge (x_n) mit $x_n \overset{w}{\to} 0$ aber $\|Ax_n\| \geq \varepsilon$. Wegen Lemma 6.15 ist (x_n) beschränkt und somit die Menge (Ax_n) relativ kompakt. Sie hat also eine in konvergente Teilfolge. Da nach 6.18 gilt, dass $Ax_n \overset{w}{\to} 0$, kann diese nur gegen Null konvergieren. Widerspruch!

(2) $\Rightarrow$ (1) Es sei (Ax_k) eine Folge in $A(B(0,1))$. Die Folge (x_k) ist beschränkt und hat daher nach Satz 6.23 eine schwach konvergente Teilfolge $x_{n_j} \overset{w}{\to} x$. Es folgt $x_{n_j} - x \overset{w}{\to} 0$. Nach Voraussetzung folgt $Ax_{n_j} - Ax \to 0$. Damit hat (Ax_n) eine konvergente Teilfolge. Damit ist $A(B(0,1))$ folgenkompakt, also kompakt nach Satz 1.22. $\lhd$

Kompakte Operatoren im Hilbertraum. Im folgenden konzentrieren wir uns auf Hilberträume:

6.25. Lemma. *Für $A \in \mathcal{L}(H)$ ist äquivalent:*

(1) *A kompakt.*

(2) *AA^* kompakt.*

(3) *A^* kompakt.*

(4) *A^*A kompakt.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): 6.4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es sei $x_n \overset{w}{\to} 0$. Wegen der Kompaktheit von AA^* folgt aus 6.24, dass $AA^*x_n \to 0$ und

$$\|A^*x_n\|^2 = \langle A^*x_n, A^*x_n\rangle \leq \underbrace{\|AA^*x_n\|}_{\to 0} \quad \underbrace{\|x_n\|}_{\text{beschränkt 6.15}} \quad \to 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (4): 6.4.

(4) $\Rightarrow$ (1) wie oben.

6.26. Satz. *Für jeden kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ sind* $(\operatorname{Kern} A)^\perp$ *und* $\operatorname{Bild} A$ *separabel.*

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis $B = \{e_\alpha\}$ von $(\operatorname{Kern} A)^\perp$. Wir behaupten, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele α existieren mit $\|Ae_\alpha\| \geq \varepsilon$: Gäbe es unendlich viele, so erhielten wir eine Folge (e_{α_j}) paarweise verschiedener solcher Elemente von B. Nach der Besselschen Ungleichung (4.11) gilt jedoch $e_{\alpha_j} \overset{w}{\to} 0$ und wegen der Kompaktheit von A folgt mit 6.24, dass $Ae_{\alpha_j} \to 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Andererseits ist A injektiv auf $(\operatorname{Kern} A)^\perp$, so dass $Ae_\alpha \neq 0$ für jedes α. Folglich kann B nur abzählbar sein.

Da $\operatorname{Bild} A = A((\operatorname{Kern} A)^\perp)$, ist $A(\operatorname{span}(B))$ dicht in $\operatorname{Bild} A$. Indem wir uns auf (die abzählbar vielen) Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q}$ beschränken, sehen wir, dass $\operatorname{Bild} A$ separabel ist. $\lhd$

6.27. Satz. *Für $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ ist äquivalent:*

---

[1]Die Reflexivität ist notwendig, wie ein Beispiel von I. Schur zeigt (J. Reine Angew. Math. 151:79-111 (1920)): Die identische Abbildung $I : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ bildet schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen ab, ist aber nicht kompakt nach Satz 6.3.

(1) *A kompakt.*

(2) *Es gibt eine Folge endlich-dimensionaler Operatoren (A_n) in $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (d.h. $\dim \operatorname{Bild} A_n < \infty$) mit $A_n \to A$.*

Bemerkung: Die Aussage (2) $\Rightarrow$ (1) gilt auch im Banachraumfall.

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): 6.5.

(1) $\Rightarrow$ (2) Wähle eine abzählbare Orthonormalbasis $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ von $(\operatorname{Kern} A)^\perp$ und definiere $P_n \in \mathcal{L}(H)$ durch $P_n x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j$. Nun setze $A_n = AP_n$. Dies sind endlich-dimensionale Operatoren.

Behauptung: $A_n \to A$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (v_n) in $(\operatorname{Kern} A)^\perp$ mit $\|v_n\| = 1$ und $\|A(P_n - I)v_n\| = \|(A_n - A)v_n\| \geq \varepsilon$.

Nun gilt für beliebiges j:

$$\langle (P_n - I)v_n, e_k\rangle = \langle v_n, (P_n - I)e_k\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq k.$$

Es folgt, dass $(P_n - I)v_n \xrightarrow{w} 0$ (indem man die obige Beziehung zunächst auf $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots\}$ anwendet und dann auf H fortsetzt. Da A kompakt ist, schließen wir, dass $A(P_n - I)v_n \to 0$. Widerspruch! $\lhd$

6.28. Bemerkung. Man sagt von einem Banachraum, er habe die Approximationseigenschaft, wenn jeder kompakte Operator Grenzwert einer Folge endlichdimensionaler Operatoren ist. Der obige Satz besagt dann, dass jeder Hilbertraum die Approximationseigenschaft hat.

Nicht jeder Banachraum hat die Approximationseigenschaft (P. Enflo, Acta Math. 1973, s.auch A. Szankowski, Acta Math 1981).

6.29. Satz. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$ und α isolierter Punkt von $\sigma(A)$. Dann gilt*

(a) $\delta_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & t = \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ *ist stetig auf $\sigma(A)$, d.h. definiert ein Element von $C(\sigma(A), \mathbb{R})$.*

(b) *$P_\alpha := \delta_\alpha(A)$ (im Sinne von 5.16) ist orthonormale Projektion ($P_\alpha = P_\alpha^* = P_\alpha^2$).*

(c) *α ist Eigenwert von A und $\operatorname{Bild} P_\alpha = \{x \in H : Ax = \alpha x\}$.*

Beweis. (a) Klar, weil α isoliert.

(b) Folgt, weil $\delta_\alpha = \overline{\delta}_\alpha = \delta_\alpha^2$.

(c) Sei $f(t) = t$. Dann gilt $f\delta_\alpha = \alpha\delta_\alpha$. Mit 5.16 folgt

$$AP_\alpha = \alpha P_\alpha, \tag{1}$$

weil $f(A) = A$. Es sei also $x \in \operatorname{Bild} P_\alpha$. Dann ist $x = P_\alpha x$, also

$$Ax = AP_\alpha x \overset{(1)}{=} \alpha P_\alpha x = \alpha x.$$

Also ist

$$\operatorname{Bild} P_\alpha \subseteq \{x \in H : Ax = \alpha x\}. \tag{2}$$

Zeige „$\supseteq$“: Dazu sei $Ax = \alpha x$. Schreibe $x = m + m^\perp$ mit $m \in \operatorname{Bild} P_\alpha$ (abgeschlossen nach 4.8), $m^\perp \in (\operatorname{Bild} P_\alpha)^\perp \overset{P_\alpha = P_\alpha^*}{=} \operatorname{Kern} P_\alpha$. Dann gilt nach (2): $Am = \alpha m$, also (wegen $Ax = \alpha x$) auch $Am^\perp = \alpha m^\perp$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist nun die Funktion $t \mapsto \alpha + \varepsilon\delta_\alpha - t$ nirgends Null auf $\sigma(A)$. Daher ist $\alpha I + \varepsilon P_\alpha - A$ invertierbar. Nun ist

$$(\alpha I + \varepsilon P_\alpha - A)m^\perp = \alpha m^\perp + 0 - \alpha m^\perp = 0.$$

Wegen der Invertierbarkeit ist $m^\perp = 0$ somit $x = m \in \operatorname{Bild} P_\alpha$. $\lhd$

6.30. Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$, H ein komplexer Hilbertraum unendlicher Dimension. Dann ist nach 6.9*

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \quad \text{(eventuell nur endlich viele)},$$

$\lambda_j \neq 0$, paarweise verschieden, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \to 0$. Wir setzen $P_j = \delta_{\lambda_j}(A)$ (vgl. 6.29). Dann gilt:

(a) *Die P_j sind orthogonale Projektoren, $P_j P_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ P_j & j = k \end{cases}$.*

$$\text{Bild}\, P_j = \{x \in H : Ax = \lambda_j x\}.$$

(b) $\|A - \sum_{j=1}^k \lambda_j P_j\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$, *d. h.*

(1) $$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j.$$

Beweis. (a) Klar mit 6.29.
(b) Setze $f(t) = t$. Dann gilt $\|f - \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta_{\lambda_j}\|_{\sup} \to 0$. Mit 5.16(2) folgt (1). ◁

Wir können diesen Sachverhalt auch anders formulieren:

6.31. Entwicklungssatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$ und (λ_j) die Folge seiner von Null verschiedenen Eigenwerte mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \to 0$. Wir wählen nacheinander Orthonormalbasen für* $\text{Kern}(\lambda_j I - A)$ *und bilden damit ein Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, \ldots\}$ (möglicherweise endlich). Indem wir nun den Eigenwert λ_j genau* $\dim \text{Kern}(\lambda I - A)$*-mal wiederholen, erhalten wir: Für jedes $x \in H$ gilt*

(1) $$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Indem wir weiterhin eine Orthonormalbasis $\{\tilde{e}_j : j \in J\}$ von $\text{Kern}\, A$ *wählen, erhalten wir mit $\{e_j\} \cup \{\tilde{e}_j\}$ eine Orthonormalbasis für H.*

Beweis. Lediglich der Nachsatz ist noch nicht klar. Dazu zeige

$$\overline{\text{span}\,(e_1, e_2, \ldots)} = (\text{Kern}\, A)^{\perp}.$$

Dazu:
$\subseteq$: Da e_j Eigenvektor zum Eigenwert λ_j ist, ist $e_j \perp \text{Kern}\, A$. Folglich ist $\text{span}\,(e_1, e_2, \ldots) \subseteq (\text{Kern}\, A)^{\perp}$ und somit $\overline{\text{span}\,(e_1, e_2, \ldots)} \subseteq (\text{Kern}\, A)^{\perp}$.
$\supseteq$: Aus $x \perp e_j$ für alle j folgt mit (1): $Ax = 0$, folglich ist $\text{span}\,(e_1, e_2, \ldots)^{\perp} \subseteq \text{Kern}\, A$ und somit $(\text{Kern}\, A)^{\perp} \subseteq \overline{\text{span}\,(e_1, e_2, \ldots)}$. ◁

6.32. Folgerung. *Es sei $A = A^*$ kompakt. Dann ist $A \geq 0$ genau dann, wenn alle Eigenwerte ≥ 0 sind.*

Beweis. Schreibe $x = \sum \langle x, e_j \rangle e_j$. Dann ist $\langle Ax, x \rangle = \sum \lambda_j |\langle x, e_j \rangle|^2$, und Lemma 5.7 liefert die Behauptung. ◁

6.33. Lemma. *Jeder Operator mit einer Darstellung wie in 6.31 ist kompakt.*

Beweis. Wählt man P_n als orthogonale Projektion auf $\text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$, so gilt $(A - AP_n)x = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$. Dann ist $\|A - AP_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \to 0$, also A durch endlich-dimensionale Operatoren approximierbar (und damit kompakt nach 6.27). ◁

6.34. Lemma. *Es sei $A = A^*$ kompakt mit der Darstellung aus 6.30 und $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$ mit $f(\lambda_j) \to 0$ für $j \to \infty$. Dann ist*

$$f(A) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j) P_j.$$

Beweis. Wir wissen aus 6.29, 6.30, dass $\delta_{\lambda_j} \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$ ist und dass $\delta_{\lambda_j}(A)$ gerade P_j ist. Wir setzen $f_n = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)\delta_{\lambda_j}$. Dann gilt $\|f - f_n\|_{\sup} = \sup\{|f(\lambda_j)| : j \geq n+1\} \to 0$. Also folgt

$$0 \leftarrow \|f - f_n\|_{\sup} \stackrel{5.16}{=} \|f(A) - f_n(A)\| = \|f(A) - \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) P_j\|.$$

$\triangleleft$

6.35. Folgerung. *Insbesondere können wir die Quadratwurzel aus einem positiven kompakten Operator A mit einer Darstellung wie in 6.30 definieren durch*

$$\sqrt{A} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} P_j.$$

Dies ist wieder ein positiver Operator, wie wir aus 6.32 wissen. Er stimmt daher nach 5.18 mit der in 5.17 definierten Quadratwurzel überein.

6.36. Lemma. *Es sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal und $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$. Dann ist $A^*x = \overline{\lambda}x$.*
Ist ferner $U = \text{span}\,\{x\}$, so ist $A(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Beweis. Es sei P die orthogonale Projektion auf $U = \text{span}\,\{x\}$ Dann ist $(I - P) = (I - P)^* = (I - P)^2$ die Projektion auf $U^\perp$. Wir schreiben

$$A = PAP + PA(I - P) + (I - P)AP + (I - P)A(I - P).$$

Dabei ist $PAP = \lambda P$ und $(I - P)AP = 0$, da $Ax = \lambda x$. Wir haben also

$$\begin{aligned} A &= \lambda P + PA(I - P) + (I - P)A(I - P). \\ A^* &= \overline{\lambda} P + (I - P)A^*P + (I - P)A^*(I - P). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir berechnen nun PAA^*P und PA^*AP:

$$\begin{aligned} PAA^*P &= \lambda\overline{\lambda}P + PA(I - P)A^*P \\ PA^*AP &= \lambda\overline{\lambda}P \end{aligned}$$

Wegen der Normalität ist $PAA^*P = PA^*AP$, also

$$0 = PA(I - P)A^*P = (PA(I - P))(PA(I - P))^*.$$

Nun ist stets $\text{Kern}\, TT^* = \text{Kern}\, T^*$. Es folgt, dass

$$H = \text{Kern}(PA(I - P))(PA(I - P))^* = \text{Kern}(PA(I - P))^* = \text{Kern}(I - P)A^*P.$$

Damit ist $(I - P)A^*P = 0$. Wegen $(I - P)x = 0$ folgt aus (1), dass $A^*x = \overline{\lambda}x$.
Aus $(I - P)A^*P = 0$ folgt auch $PA(I - P) = 0$, also ist

$$A = PAP + (I - P)A(I - P).$$

$\triangleleft$

6.37. Satz. *Für $T \in \mathcal{L}(H)$ setze*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \quad \text{(Spektralradius von } T\text{)}.$$

Dann gilt

(a) *Der Grenzwert* $\lim \|T^n\|^{1/n}$ *existiert, und es gilt*

$$r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

(b) *Ist T normal und H komplexer Hilbertraum, so ist*

$$r(T) = \|T\|.$$

Beweis. (a) 1. Schritt: Existenz des Grenzwerts. Es sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren dann $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $n = mp + q$, wobei $q < m$. Mit $C = \max\{1, \|T\|, \dots, \|T^{m-1}\|\}$ gilt dann

$$\|T^n\| \leq \|T^m\|^p \|T^q\| \leq C\|T^m\|^p.$$

Nun ist $\dfrac{p}{n} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{p}{mp+q} - \dfrac{1}{m} = -\dfrac{q}{nm}$ und daher

$$\text{(1)} \qquad \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} C^{1/n} \|T^m\|^{\frac{1}{m} - \frac{q}{nm}} = \|T^m\|^{1/m}.$$

Wir erhalten die Existenz des Grenzwerts $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$, da nach (1) $\limsup_n \leq \liminf_m$.
2. Schritt '$r \leq \lim$': Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \limsup \|T^n\|^{1/n}$, so ist die Potenzreihe (vgl. 2.42)

$$\text{(2)} \qquad J(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n$$

absolut konvergent. Man rechnet nach

$$(T - zI)J(z) = J(z)(T - zI) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} T^n = I.$$

Also ist für diese z der Operator $T - zI$ invertierbar, somit $z \notin \sigma(T)$. Folglich:

$$r(T) \leq \lim \|T^n\|^{1/n}.$$

3. Schritt '$r \geq \lim$'. (Mit Funktionentheorie) $(T - zI)^{-1}$ ist eine holomorphe $\mathcal{L}(H)$-wertige Funktion auf der Resolvente, insbesondere also auf dem Außengebiet $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r(T)\}$. Wir wählen ein beliebiges Element $\ell \in \mathcal{L}(H)'$. Dann ist $\ell(J)$ eine holomorphe $\mathbb{C}$-wertige Funktion auf U. Wir kennen ihre Lauentreihe:

$$\ell(J(z)) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \ell(T^n)/z^n.$$

Aus der Funktionentheorie wissen wir (vgl. Funktionentheorieskript, 4.13): Die Laurentreihe konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von U, Insbesondere gilt für $r > r(T)$

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,r)} z^k \ell(J(z))\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(T^n)\ \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,r)} z^{k-n-1}\, dz = \ell(T^n)\delta_{kn} = \ell(T^k).$$

Setzen wir also

$$M(r) = \max\{\|J(z)\| : z \in S(0,r)\} < \infty,$$

so ist

$$|\ell(T^k)| \leq M(r)\|\ell\| r^{k+1}.$$

Somit ist $\|T^k\|^{1/k} = \left(\sup_{\|\ell\|=1} \ell(T^k)\right)^{1/k} \leq M(r)^{1/k} r^{(k+1)/k}$ und daher $\limsup \|T^n\|^{1/n} \leq r$ für alle $r > r(T)$.
(b) Es ist $T^*T = TT^*$ und $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Es folgt

$$\|T^{2n}\|^2 = \|(T^{2n})^* T^{2n}\| = \|\underbrace{(T^*T)^n}_{=((T^*T)^n)^*}(T^*T)^n\| = \|(T^*T)^n\|^2.$$

Es folgt:

$$\|T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^{n-1}}\| = \ldots = \|(T^*T)\|^{2^{n-1}} = \|T\|^{2^n},$$

und damit:

$$\lim \|T^n\|^{1/n} = \lim \|T^{2^n}\|^{1/(2^n)} = \|T\|.$$

$\triangleleft$

6.38. Entwicklungssatz für normale Operatoren. *Satz 6.30 gilt auch für normale kompakte Operatoren: Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in \mathcal{K}(H)$ normal. Dann hat A eine Darstellung*

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

mit einem Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, \ldots\}$ von Eigenvektoren von A, einer Folge (evtl. endlich viele) (λ_j) in $\mathbb{C}$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \to 0$, $\lambda_j \neq 0$. Dieses Orthonormalsystem kann durch eine Orthonormalbasis von Kern A *zu einer Orthonormalbasis von H ergänzt werden.*

Beweis. Wir wissen, dass das Spektrum keinen Häufungspunkt außer Null hat und aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht, vgl. 6.9. Ist Null der einzige Spektralwert, so ist $A = 0$ nach 6.37. Anderenfalls wählen wir $\lambda_1 \in \sigma(A)$ mit maximalem Betrag und einen Eigenvektor e_1 zu λ_1 mit $\|e_1\| = 1$..

Wir setzen $U = \text{span}\,\{e_1\}$. Dann ist $U^\perp$ abgeschlossen, also ebenfalls ein Hilbertraum. Nach Lemma 6.36 ist $A(U^\perp) \subseteq U^\perp$. Damit ist $A \in \mathcal{K}(U)$. Wir können das Argument iterieren, erhalten also einen Eigenwert λ_2 von maximalem Betrag und einen zugehörigen (auf 1 normierten) Eigenvektor e_2. Da e_2 auch Eigenvektor von A auf H ist, ist $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Dabei kann nur endlich oft derselbe Eigenwert vorkommen, da die Vielfachheit jedes Eigenwerts in H endlich ist. Da nach 6.29 alle von Null verschiedenen Eigenwerte isoliert sind, liegen auf jedem Kreis $S(0, r)$, $r > 0$ ebenfalls nur endlich viele. Damit konvergiert die Folge der Beträge der Eigenwerte $\neq 0$ gegen Null, und wir erhalten das gesuchte Orthonormalsystem.

Setze $A_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \cdot, e_j \rangle e_j$. Dann konvergiert A_n gegen A: Der Operator $A - A_n$ ist kompakt, hat also einen Eigenwert λ von maximalem Betrag und einen zugehörigen Eigenvektor x. Schreibe $x = e + e^\perp$ mit $e \in \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $e^\perp \in \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$. Dann ist nach Konstruktion $(A - A_n)e = 0$ und $A_n e^\perp = 0$. Ferner ist $Ae^\perp \in A(\text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp) \subseteq \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$ nach Lemma 6.36. Es folgt

$$\lambda e + \lambda e^\perp = (A - A_n)x = (A - A_n)e^\perp = Ae^\perp \in \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$$

und somit $Ae^\perp = \lambda e^\perp$ (oder $\lambda = 0$. Nach Konstruktion ist also $|\lambda| \leq |\lambda_n|$. Da nach 6.37

$$\|A - A_n\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A - A_n)\},$$

folgt die Behauptung.

Durch eine Basis von Kern A können wir es (wie im Beweis von 6.30) zu einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A ergänzen. $\triangleleft$