vwlfibel

Allokationstheorie

von

Axel Hillmann

Sechzehnte Auflage

Textauszug

vwlfibeln

Einführung in die Wirtschaftswissenschaft
Theorie der Marktwirtschaft
Makroökonomie
Marktversagen
Allokationstheorie
Fiskalpolitik

Repetitorium Axel Hillmann

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

x_i	von Konsument *i* verbrauchte Menge an Gut *X*
y_i	von Konsument *i* verbrauchte Menge an Gut *Y*
A	Produktionsfaktor *A* (Arbeit)
A_X	in Branche *X* eingesetzte Menge des Faktors *A*
A_Y	in Branche *Y* eingesetzte Menge des Faktors *A*
K	Produktionsfaktor *K* (Kapital)
K_X	in Branche *X* eingesetzte Menge des Faktors *K*
K_Y	in Branche *Y* eingesetzte Menge des Faktors *K*
P	Preis
P_A	Preis für den Faktor *A* (Arbeit)
P_K	Preis für den Faktor *K* (Kapital)
P_X	Preis für das $X-$Gut
P_Y	Preis für das $Y-$Gut
Q	Unternehmens– bzw. Branchengewinn
U^i	Nutzen (Nutzenfunktion) des Konsumenten i
X	Output der Branche *X* ($X-$Branchen–Produktionsfunktion)
Y	Output der Branche *Y* ($Y-$Branchen–Produktionsfunktion)
W	Wohlfahrt (Wohlfahrtsfunktion)

Abbildungsverzeichnis

2 Modell ohne externe Effekte [*Textauszug*]

Im Zentrum der Wohlfahrtsökonomik (Allokationstheorie) steht das **Modell des allgemeinen Konkurrenzgleichgewichts** mit allen (einschränkenden) **Annahmen** einer vollkommenen Welt:

- vollständiger Wettbewerb (vollkommene Märkte, also homogene Güter; Nachfrager und Anbieter sind auf allen Märkten Mengenanpasser)[4]
- kein Wachstum (gegebene Faktormengen, kein technischer Fortschritt)
- Vollbeschäftigung und vollkommene Mobilität der Produktionsfaktoren
- keine Kollektivgüter
- keine externen Effekte im Konsum und in der Produktion[5]
- rationales Verhalten aller Wirtschaftssubjekte

Kein Wunder also, wenn das Pareto–Optimum als Ergebnis einer effizienten Allokation mit den Eigenschaften eines langfristigen Konkurrenzgleichgewichts übereinstimmt, um den ersten grundlegenden Satz der Allokationstheorie gleich vorwegzunehmen:

Bitte merken Sie sich:

Jedes langfristige Konkurrenzgleichgewicht ist ein Pareto–Optimum!

2.1 Modell

Herzuleiten sind die (notwendigen bzw. Marginal–) **Bedingungen** für ein Pareto–Optimum. Ausgegangen wird im Folgenden vom **2–Faktoren–2–Güter–Modell**, in dem nach Einsatz der beiden Produktionsfaktoren Arbeit ***A*** und Kapital ***K*** in zwei Branchen (zwei Produktionsfunktionen) die beiden Güter ***X*** und ***Y*** hergestellt und auf die beiden Konsumenten **1** und **2** verteilt werden:

(1) $U^1 = U^1(x_1, y_1)$ mit $\dfrac{\partial U^1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial U^1}{\partial y_1} > 0 > \dfrac{\partial^2 U^1}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 U^1}{\partial y_1^2}$

(2) $U^2 = U^2(x_2, y_2)$ mit $\dfrac{\partial U^2}{\partial x_2}, \dfrac{\partial U^2}{\partial y_2} > 0 > \dfrac{\partial^2 U^2}{\partial x_2^2}, \dfrac{\partial^2 U^2}{\partial y_2^2}$

(3) $X = x_1 + x_2$

(4) $Y = y_1 + y_2$

---

4 Diese Annahme wird im übernächsten Kapitel eingeschränkt!

5 Diese Annahme wird im nächsten Kapitel aufgehoben!

(5) $X = F(A_X, K_X)$ mit $\frac{\partial F}{\partial A_X}, \frac{\partial F}{\partial K_X} > 0 > \frac{\partial^2 F}{\partial A_X^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial K_X^2}$

(6) $Y = G(A_Y, K_Y)$ mit $\frac{\partial G}{\partial A_Y}, \frac{\partial G}{\partial K_Y} > 0 > \frac{\partial^2 G}{\partial A_Y^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial K_Y^2}$

(7) $\overline{A} = A_X + A_Y$

(8) $\overline{K} = K_X + K_Y$

Die Gleichungen (1) bis (4) beschreiben den Konsumbereich der Modellwirtschaft, die Gleichungen (5) bis (8) den Produktionsbereich.

Die **individuellen Nutzen–** (Wohlfahrts–) **Funktionen** (1) und (2) hängen wie üblich von den (jeweils selbst) verbrauchten Gütermengen ab. Die Gleichungen (3) und (4) bedeuten, dass die hergestellten Gütermengen vollständig verbraucht werden – man nennt sie auch die **Räumungsbedingungen** für die Gütermärkte.

Die (Branchen–) **Produktionsfunktionen** (5) und (6) bedeuten, dass für alle gegebenen Faktoreinsatzmengen der jeweils maximale Branchen–Output (keine Faktorverschwendung!) erzeugt wird. Die Gleichungen (7) und (8) geben die Vollbeschäftigungsannahmen für Arbeit und Kapital wieder – Räumungsbedingungen für die Faktormärkte. Bei den Gleichungen (3) bis (8) handelt es sich um die **Totalbedingungen**[6] für das Erreichen eines, im Folgenden abzuleitenden Pareto–Optimums.

Herausgearbeitet werden sollen die Bedingungen für ein Pareto–Optimum bzw. – ausgehend von einem bestimmten Zustand der Volkswirtschaft – für eine bessere Verteilung gemäß des Pareto–Kriteriums. Ohne die genaueren Bedingungen untersucht zu haben, kann bereits das **Pareto–Optimum** formuliert werden: Wegen der obigen grundsätzlichen Annahmen sind ja die Möglichkeiten der Bedürfnisbefriedigung begrenzt. Wenn Konsument 1 beide Güter X und Y vollständig verbraucht, ist sein Nutzen angesichts herrschender Produktionsbedingungen maximal, das Nutzenniveau des Konsumenten 2 hingegen gleich Null. Dasselbe gilt umgekehrt. Zwischen diesen beiden extremen Güterverteilungssituationen gibt es unendlich viele Güteraufteilungen $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$, für die ebenso wie für die Extremsituationen gilt:

Bitte merken Sie sich:

In einem **Pareto–Optimum** ist eine Umverteilung der Güter, so dass ein Konsument einen höheren Nutzen erreicht, ohne dass der andere Konsument einen Nutzenverlust in Kauf nehmen muss, nicht mehr möglich, selbst wenn die Produktion umstrukturiert werden würde.

[6] Diese Totalbedingungen sind nicht erfüllt, sobald ein ">" oder "<" statt des "=" in einer Gleichung auftauchen.

2.2 Pareto–Optimum – grafische Analyse

Grafisch sind diese Pareto–optimalen Verteilungssituationen in einem $U^2 - U^1$ – Diagramm, dem sog. Nutzenraum, als **Nutzenmöglichkeitsgrenze** darstellbar:

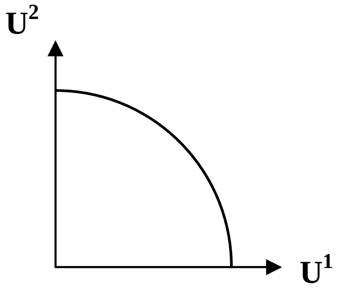

Abb. 1: Nutzenmöglichkeitsgrenze

Punkte **oberhalb** der Nutzenmöglichkeitsgrenze sind angesichts der gegebenen Faktorbestände und Technologien nicht erreichbar. Alle Punkte **auf** der Nutzenmöglichkeitsgrenze sind offensichtlich **Pareto–Optima**, denn jede Umverteilung bedeutet für mindestens einen der beiden Konsumenten Nutzenverlust. Punkte **unterhalb** der Nutzenmöglichkeitsgrenze sind offensichtlich suboptimal, denn von hier aus kann stets der Nutzen eines Konsumenten gesteigert werden, ohne dass der andere eine Nutzeneinbuße hinnehmen muss.

Wenn wie üblich davon abgesehen wird, dass Nutzengewinne des einen Konsumenten mit Nutzengewinnen des anderen Konsumenten im Zusammenhang einer sozialen Wohlfahrtsfunktion verrechnet werden können, so sind also die Bedingungen zu ermitteln, die hinsichtlich

- der Produktionsstruktur (optimale Faktorallokation, **Produktionsoptimum**),
- der Konsumstruktur (optimale Güterverteilung, **Konsumoptimum**) sowie
- der Abstimmung beider Bereiche (**globale Effizienz**)

für ein Pareto–Optimum erfüllt sein müssen.

Diese nachfolgend herzuleitenden Bedingungen nennt man **Marginalbedingungen** (oder **innere Lösungen**, wenn positive Konsummengen für alle Haushalte, $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$, unterstellt sind) für ein Pareto–Optimum. Vergessen Sie dabei nie, dass für eine Pareto–optimale Verteilung der Konsumgüter X und Y auch die o. g. Totalbedingungen (3), (4), (7) und (8) sowie technische Effizienz, (5) und (6),[7] erfüllt sein müssen.

[7] Wegen stets positiver Grenzproduktivität, $\frac{\partial F}{\partial A_X}, \frac{\partial F}{\partial K_X} > 0$, ist technische Effizienz durch das Gleichheitszeichen in den Produktionsfunktionen (5) und (6) gegeben. Technisch effizient ist eine Produktion, wenn es für einen gegebenen Output kein kleineres Inputbündel (Faktoreinsatzkombination) gibt, mit der dieser Output hergestellt werden könnte.

2.2.1 Produktionsoptimum

Um die Nutzenmöglichkeitsgrenze in der Volkswirtschaft zu erreichen, bedarf es nicht nur der Vermeidung von Faktorverschwendung (technische Effizienz), was durch die Gleichungen (5) und (6) ja bereits gegeben ist. Zusätzlich müssen die Produktionsfaktoren A und K auch effizient auf die beiden Branchen (Produktionssektoren) X und Y verteilt werden:

Bitte merken Sie sich:

Produktionsoptimum: Die **Faktorallokation** ist **effizient**, wenn die Produktion des einen Gutes nicht mehr gesteigert werden kann, ohne die Produktion des anderen Gutes einschränken zu müssen.

verbal:

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die **Grenzraten der Faktorsubstitution** in beiden Branchen übereinstimmen.

grafisch:

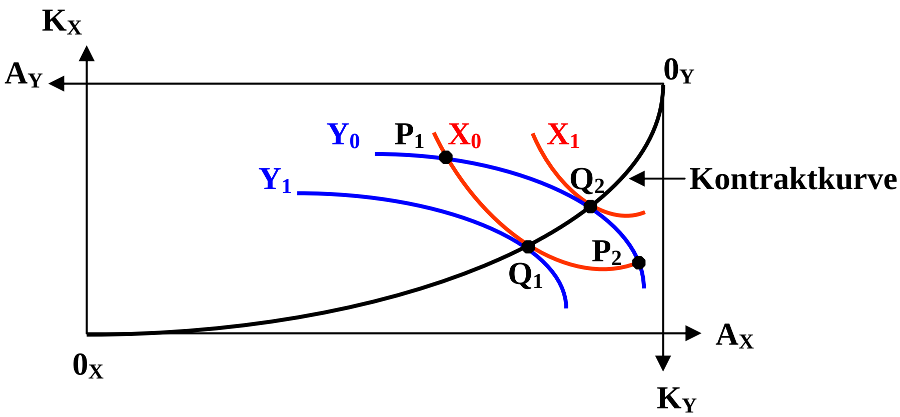

Abb. 2: Edgeworth–Produktionsbox

Die beiden Branchen–Produktionsfunktionen (5) und (6) lassen sich in der **Edgeworth–Produktionsbox** zusammenfassen. Beide Produktionsfunktionen weisen die üblichen Bedingungen auf, so dass die Isoquanten der X – Branche (rot) vom Ursprung links unten aus gesehen konvex und diejenigen der Y – Produktion (blau) konkav verlaufen.[8] Dabei gilt: Je weiter die X – Isoquante (Y – Isoquante) vom 0_X – Ursprung (0_Y – Ursprung) entfernt liegt, desto größer der Branchen–Output. Die Seitenlängen der Box entsprechen den gegebenen Faktorbeständen der Volkswirtschaft, so dass jeder (!) Punkt in der Box einen technisch effizienten Produktionspunkt darstellt.

[8] Vom 0_Y – Ursprung gesehen verlaufen die Y – Isoquanten selbstverständlich auch konvex! Konkav (konvex) ist eine Funktion übrigens, wenn die Tangente an der Funktionskurve oberhalb (unterhalb) der Kurve verläuft.

P_1 ist ein solcher Punkt. Allerdings sind in diesem Punkt die beiden Produktionsfaktoren nicht effizient auf die $X-$ und $Y-$Produktion verteilt. Denn wenn man auf der X_0-Isoquante nach rechts unten fährt (also in der $X-$Produktion weniger Kapital und mehr Arbeit einsetzt, dabei aber beim selben $X-$Produktionsniveau bleibt und sich immer mehr vom 0_Y-Ursprung entfernt), kann sukzessive ein höheres $Y-$Produktionsniveau erreicht werden. Erst wo sich X_0- und Y_1-Isoquante tangieren, ist ein Punkt **Q_1** erreicht, von dem aus keine weitere Steigerung der $Y-$Produktion möglich ist, ohne die Produktion des Gutes X einzuschränken. **Q_1** ist deshalb ein Punkt **effizienter Faktorallokation**!

In **Q_1** gilt:

- Die **Grenzraten der Faktorsubstitution** sind in beiden Branchen identisch, *also*
- sind die Steigungen von X_0- und Y_1-Isoquante identisch, *also*
- sind die Grenzproduktverhältnisse in beiden Branchen identisch.

Für **Q_2** gilt Entsprechendes. Die Verbindungslinie aller Punkte effizienter Faktorallokation nennt man **Kontrakt–** oder **Effizienzkurve**.[9]

Wiederholung Produktionstheorie:

Warum entspricht die Steigung der Isoquante dem (negativen umgekehrten) Grenzproduktivitätsverhältnis? Eine **Isoquante** ist in einem Faktorraum, dem $K-A-$Diagramm, der geometrische Ort verschiedener Faktoreinsatzverhältnisse mit jeweils demselben Output.

Totales Differenzieren der Gleichung (5) unter Berücksichtigung von $dX = 0$ ergibt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial A_X} \cdot dA_X + \frac{\partial F}{\partial K_X} \cdot dK_X \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dK_X}{dA_X} = -\frac{\partial F / \partial A_X}{\partial F / \partial K_X} < 0$$

$\frac{dK_X}{dA_X}$ ist im $K_X - A_X -$Diagramm die Steigung der Isoquanten.

$\frac{dK_X}{dA_X}$ wird auch als **Grenzrate der Faktorsubstitution** bezeichnet.

Dieser Ausdruck gibt an, auf wie viele Einheiten des Faktors Kapital K ohne Produktionseinbuße verzichtet werden kann, wenn der Einsatz des Faktors Arbeit A um eine (marginale) Einheit erhöht wird. (Entsprechendes gilt für die $Y-$Produktion.)

[9] Die Kontraktkurve könnte auch linear oder (von unten aus gesehen) oberhalb einer gedachten Box–Diagonale verlaufen. Aber angenommen, Gut X werde relativ arbeitsintensiv, Gut Y relativ kapitalintensiv hergestellt: $(K_X / A_X) < (K_Y / A_Y)$. Dann können Sie diese unterschiedlichen Faktorintensitäten an der Steigung des jeweiligen Fahrstrahls bzw. der Ursprungsgerade (für K_X / A_X ausgehend von 0_X, für K_Y / A_Y ausgehend von 0_Y) durch die effizienten Punkte ablesen und die Kontraktkurve **muss** konvex, also unterhalb einer gedachten Box–Diagonale verlaufen!

Die gemäß Kontraktkurve effizienten $X - Y -$Kombinationen können in das $Y - X -$Diagramm übertragen werden. Die Verbindung aller effizienten $X - Y -$Kombinationen ergibt die **Produktionsmöglichkeitengrenze** (*oder*: Transformationskurve) der Volkswirtschaft:

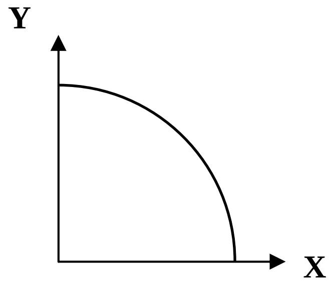

Abb. 3: Transformationskurve

Die Transformationskurve ist grafisch die **Produktionsmöglichkeitsgrenze** der Volkswirtschaft,[10] denn Punkte **oberhalb** der Transformationskurve sind angesichts der gegebenen Faktorbestände nicht zu erreichen. Punkte **unterhalb** der Transformationskurve sind nicht effizient, weil von hier aus die Produktion eines Gutes gesteigert werden kann, ohne die Produktion des anderen Gutes einzuschränken. Für alle Punkte **auf** der Transformationskurve gilt: Die Produktion eines Gutes kann nur gesteigert werden, wenn die Produktion des anderen Gutes eingeschränkt wird.

formal:

Bei effizienter Verteilung der Produktionsfaktoren wird auf der Transformationskurve produziert. Die **Grenzrate der Transformation**, also die Steigung der Transformationskurve,

$$\frac{dY}{dX} < 0,$$

gibt dabei an, auf wie viele Einheiten des $Y -$Gutes in der Volkswirtschaft verzichtet werden muss, wenn eine (marginale) Einheit des $X -$Gutes zusätzlich hergestellt wird. *Anders formuliert*: Die Grenzrate der Transformation gibt die (volkswirtschaftlichen) **Opportunitätskosten** der $X -$Produktion, gerechnet in $Y -$Einheiten, wieder.

Die Übereinstimmung der **Grenzraten der Faktorsubstitution** in beiden Branchen mit

$$-\frac{dK_X}{dA_X} = \frac{\partial F / \partial A_X}{\partial F / \partial K_X} = \frac{\partial G / \partial A_Y}{\partial G / \partial K_Y} = -\frac{dK_Y}{dA_Y}$$

Bedingung für eine effiziente Verteilung der Produktionsfaktoren.

[10] Bitte nicht mit der Nutzenmöglichkeitsgrenze verwechseln!

6 Lösungen [*Textauszug*]

Lösungsvorschlag zur AVWL–Aufgabe 1 aus 3/11 – 50 von 100 Punkten

a) Das **Optimierungsproblem** zur Ermittlung der Bedingungen für ein **Pareto–Optimum** lautet:

$$\max!\ U_1(x_1, y_1) = x_1^{\beta} \cdot y_1^{1-\beta}$$

u. d. N. $\overline{U}_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta} \cdot y_2^{1-\beta}$ $\quad X = x_1 + y_1$ $\quad Y = y_1 + y_1$

$$X = A_X^{\alpha} \cdot K_X^{1-\alpha} \qquad Y = A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}$$

$$\overline{A} = A_X + A_Y \qquad \overline{K} = K_X + K_Y$$

Das Übliche: Eine der beiden Nutzenfunktionen ist die Zielfunktion, die andere Nutzenfunktion, die beiden Produktionsfunktionen sowie die Güter– und Faktormarkträumungsbedingungen sind die Nebenbedingungen des gesamtwirtschaftlichen Optimierungsansatzes. Ob es sich um einen positiven externen Effekt, $\frac{\partial Y}{\partial K_X} > 0$, oder einen negativen externen Effekt, $\frac{\partial Y}{\partial K_X} < 0$, handelt, den der Kapitaleinsatz in der X – Produktion in der Y – Produktion ausübt, lässt sich der Aufgabenstellung nicht entnehmen, da die Höhe von α nicht bekannt ist. Für $\alpha > 1$ handelt es sich um einen positiven für $\alpha < 1$ um einen negativen externen Effekt.

b) Die **individuellen Optimierungsansätze** der Unternehmen und Haushalte lauten:

$\max!\ U_1(x_1, y_1) = x_1^{\beta} \cdot y_1^{1-\beta}$ u. d. N. $\overline{B}_1 = P_X \cdot x_1 + P_Y \cdot y_1$

$\max!\ U_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta} \cdot y_2^{1-\beta}$ u. d. N. $\overline{B}_2 = P_X \cdot x_2 + P_Y \cdot y_2$

$\max!\ Q_X = P_X \cdot X - P_A \cdot A_X - P_K \cdot K_X$ u. d. N. $X = A_X^{\alpha} \cdot K_X^{1-\alpha}$

$\max!\ Q_Y = P_Y \cdot Y - P_A \cdot A_Y - P_K \cdot K_Y$ u. d. N. $Y = A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}$

Individuen (Haushalte) sind annahmegemäß Nutzenmaximierer, während Unternehmen bestrebt sind, ihren (Perioden–) Gewinn zu maximieren. Die Angabe aus der Aufgabenstellung, die Aufteilung der gegebenen Faktorbestände sei auf die Individuen fest vorgegeben, bedeutet gegebenes individuelles Einkommen bzw. Konsumbudget, $B_i = \overline{B}_i$.

c) In **a)** werden die Bedingungen gesucht, die erfüllt sein müssen, damit die drei Allokationsprobleme (Faktorverteilung zwischen den Produzenten, Güterverteilung unter den Individuen, Abstimmung zwischen Produktions– und Konsumbereich) gesamtwirtschaftlich effizient, genauer: **Pareto–optimal** gelöst sind. Dabei wird von einer konkreten Wirtschaftsform (Marktwirtschaft, Zentralverwaltungswirtschaft etc.) abstrahiert, bzw. von der Frage, ob die genannten Probleme durch zentrale oder durch dezentrale Verteilungsorganisation gelöst werden sollen.

In **b)** wird überprüft, ob das in a) ermittelte sozial erwünschte Verteilungsergebnis bzw. die notwendigen Bedingungen dafür in der ökonomischen Realität erreicht werden. Unter „ökonomischen Realität“ wird dabei regelmäßig ein allgemeines Konkurrenzgleichgewicht, die Idealform einer Marktwirtschaft, verstanden. In einem Konkurrenzgleichgewicht streben alle Akteure (Haushalte und Unternehmen) **unabhängig** voneinander nach bestmöglicher individueller Zielerfüllung (**Nutzenmaximum** bzw. **Gewinnmaximum**). Annahmegemäß sind alle Akteure aufgrund der Marktform Mengenanpasser bzw. Preisnehmer.

Kurz: In a) werden die Bedingungen für ein gesamtwirtschaftliches oder soziales Optimum gesucht. In b) werden die Bedingungen für alle individuellen Optima ermittelt, um diese mit den erstgenannten zu vergleichen.

d) Das **Lagrangeproblem** zum Optimierungsansatz in **a)** lautet:

$$\max! \; L = x_1^{\beta} \cdot y_1^{1-\beta} + \lambda \cdot (x_2^{\beta} \cdot y_2^{1-\beta} - \overline{U}_2) + \theta_X \cdot (A_X^{\alpha} \cdot K_X^{1-\alpha} - x_1 - x_2)$$
$$+ \theta_Y \cdot (A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - y_1 - y_2) + \theta_A \cdot (\overline{A} - A_X - A_Y) + \theta_K \cdot (\overline{K} - K_X - K_Y)$$

Einsetzen der Produktionsfunktionen in die Markträumungsbedingungen $X = x_1 + y_1$ und $Y = y_1 + y_1$ erspart die Ableitungen nach X und Y!

Die sich daraus ergebenden **notwendigen Bedingungen** für ein Pareto–Optimum lauten:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \beta \cdot x_1^{\beta-1} \cdot y_1^{1-\beta} - \theta_X \overset{!}{=} 0$ (2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda \cdot \beta \cdot x_2^{\beta-1} \cdot y_2^{1-\beta} - \theta_X \overset{!}{=} 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = (1-\beta) \cdot x_1^{\beta} \cdot y_1^{-\beta} - \theta_Y \overset{!}{=} 0$ (4) $\dfrac{\partial L}{\partial y_2} = (1-\beta) \cdot x_2^{\beta} \cdot y_2^{-\beta} - \theta_Y \overset{!}{=} 0$

(5) $\dfrac{\partial L}{\partial A_X} = \theta_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha} - \theta_A \overset{!}{=} 0$ (6) $\dfrac{\partial L}{\partial A_Y} = \theta_Y \cdot \alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - \theta_A \overset{!}{=} 0$

(7) $\dfrac{\partial L}{\partial K_X} = \theta_X \cdot (1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha} + \theta_Y \cdot (\alpha - 1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2} - \theta_K \overset{!}{=} 0$

(8) $\dfrac{\partial L}{\partial K_Y} = \theta_Y \cdot (1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - \theta_K \overset{!}{=} 0$

Daraus ergeben sich die einzelnen Pareto–Bedingungen wie folgt:

Aus (1) bis (4) ergibt sich die Bedingung für eine **effiziente Güterverteilung**:

$$\text{(I)}\ \left(\frac{\theta_X}{\theta_Y}=\right)\ \frac{\beta \cdot y_1}{(1-\beta)\cdot x_1} = \frac{\beta \cdot y_2}{(1-\beta)\cdot x_2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Division von (1) und (3) sowie von (2) und (4) ergibt nach Addition von θ_X und θ_Y:

$$\frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\beta \cdot x_1^{\beta-1} \cdot y_1^{1-\beta}}{(1-\beta)\cdot x_1^{\beta} \cdot y_1^{-\beta}} = \frac{\beta \cdot x_2^{\beta-1} \cdot y_2^{1-\beta}}{(1-\beta)\cdot x_2^{\beta} \cdot y_2^{-\beta}} \quad \text{bzw. nach Kürzen} \quad \frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\beta \cdot y_1}{(1-\beta)\cdot x_1} = \frac{\beta \cdot y_2}{(1-\beta)\cdot x_2}.$$

Aus (5) bis (8) ergibt sich die Bedingung für eine **effiziente Faktorverteilung**:

$$\text{(II)}\ \left(\frac{\theta_K}{\theta_A}=\right)\ \frac{(1-\alpha)\cdot A_X}{\alpha \cdot K_X} + \frac{(\alpha-1)\cdot A_Y \cdot K_X^{-1}}{\alpha} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y} \qquad \text{bzw.}$$

$$\frac{(1-\alpha)\cdot A_X + (\alpha-1)\cdot A_Y}{\alpha \cdot K_X} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y} \ \text{(nach Erweitern)}$$

Division von (5) und (7) sowie von (6) und (8) ergibt nach Addition von θ_A und θ_K:

$$\frac{\theta_A}{\theta_K} = \frac{\theta_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}{\theta_X \cdot (1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha} + \theta_Y \cdot (\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}} = \frac{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}$$

bzw. als Kehrwert (besser berechenbar!):

$$\frac{\theta_K}{\theta_A} = \frac{\theta_X \cdot (1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha} + \theta_Y \cdot (\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{\theta_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}$$

bzw.

$$\frac{\theta_K}{\theta_A} = \frac{\theta_X \cdot (1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}{\theta_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}} + \frac{\theta_Y \cdot (\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{\theta_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y}$$

bzw. nach Einsetzen von $\theta_X = \dfrac{\theta_A}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$ aus (5) und $\theta_Y = \dfrac{\theta_A}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}$ aus (6):

$$\frac{\theta_K}{\theta_A} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_X}{\alpha \cdot K_X} + \frac{\frac{\theta_A}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}\cdot(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{\frac{\theta_A}{\alpha\cdot A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha}}\cdot \alpha\cdot A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y}{\alpha\cdot K_Y}$$

bzw. $\frac{\theta_K}{\theta_A} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_X}{\alpha\cdot K_X} + \frac{(\alpha-1)\cdot A_Y\cdot K_X^{-1}}{\alpha} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y}{\alpha\cdot K_Y}$ nach Kürzen.

Aus (5) bis (8) sowie (I) ergibt sich die Bedingung für **globale Effizienz**:

(III-1) $\left(\frac{\theta_X}{\theta_Y}=\right)\frac{y_i}{x_i} = \frac{A_Y^{\alpha-1}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha}}$ und

(III-2) $\left(\frac{\theta_X}{\theta_Y}=\right)\frac{y_i}{x_i} = \frac{A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}} - \frac{(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}$

1. Version: Umstellen der Gleichungen (5) und (6) nach θ_X bzw. θ_Y und Division bringt

$$\frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\frac{\theta_A}{\alpha\cdot A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha}}}{\frac{\theta_A}{\alpha\cdot A_Y^{\alpha-1}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}} = \frac{\alpha\cdot A_Y^{\alpha-1}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}{\alpha\cdot A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha}}$$

2. Version: Umstellen der Gleichungen (7) und (8) nach θ_X bzw. θ_Y und Division bringt

$$\frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{\frac{\theta_K - \theta_Y\cdot(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}}{\frac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}}$$

$$= \frac{\frac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}}{\frac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}} - \frac{\frac{\theta_Y\cdot(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}}{\frac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}}$$

bzw. nach Einsetzen von $\theta_Y = \frac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}$ aus Gleichung (8) und Kürzen:

$$\frac{\theta_X}{\theta_Y} = \frac{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}} - \frac{\dfrac{\dfrac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}\cdot(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}}{\dfrac{\theta_K}{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}}$$

bzw. $\dfrac{\theta_X}{\theta_Y} = \dfrac{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}} - \dfrac{(\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}$

Alternative Darstellung: (III-2) $\dfrac{\theta_X}{\theta_Y} = \dfrac{(1-\alpha)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1} - (\alpha-1)\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha}}$

Die sich aus b) ergebenden individuellen Optimierungsansätze lauten:

max! $L_i = x_i^{\beta}\cdot y_i^{1-\beta} + \lambda\cdot(\overline{B}_i - P_X\cdot x_i - P_Y\cdot y_i)$ $\quad[i=1{,}2]$

max! $Q_X = P_X\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{1-\alpha} - P_A\cdot A_X - P_K\cdot K_X$

max! $Q_Y = P_Y\cdot A_Y^{\alpha}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1} - P_A\cdot A_Y - P_K\cdot K_Y$

Wenn man die Nebenbedingungen der Nutzenmaximierungsansätze in die Nutzenfunktionen (Zielfunktionen) einsetzt, spart man sich eine Ableitung (nach x_i oder nach y_i). Das ist hier unterblieben, weil das Einsetzen vermutlich keine Erleichterung bringt. Anders bei den Gewinnmaximierungsansätzen: Das Einsetzen der Produktionsfunktionen bereitet keine Schwierigkeiten und erspart die Ableitungen nach *X* und *Y*.

Die daraus folgenden **notwendigen Bedingungen** für die individuellen Optima lauten:

(9) $\dfrac{\partial L_i}{\partial x_i} = \beta\cdot x_i^{\beta-1}\cdot y_i^{1-\beta} - P_X \overset{!}{=} 0$

(10) $\dfrac{\partial L_i}{\partial y_i} = (1-\beta)\cdot x_i^{\beta}\cdot y_i^{-\beta} - P_Y \overset{!}{=} 0$

(11) $\dfrac{\partial Q_X}{\partial A_X} = P_X\cdot\alpha\cdot A_X^{\alpha-1}\cdot K_X^{1-\alpha} - P_A \overset{!}{=} 0$

(12) $\dfrac{\partial Q_X}{\partial K_X} = P_X\cdot(1-\alpha)\cdot A_X^{\alpha}\cdot K_X^{-\alpha} - P_K \overset{!}{=} 0$

(13) $\dfrac{\partial Q_Y}{\partial A_Y} = P_Y\cdot\alpha\cdot A_Y^{\alpha-1}\cdot K_Y^{1-\alpha}\cdot K_X^{\alpha-1} - P_A \overset{!}{=} 0$

(14) $\dfrac{\partial Q_Y}{\partial K_Y} = P_Y \cdot (1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - P_K \overset{!}{=} 0$

Aus den Gleichungen (9) und (10) ergibt sich die Bedingung für die Güterverteilung im **Konkurrenzgleichgewicht**:

(Ia) $\left(\dfrac{P_X}{P_Y} =\right) \quad \dfrac{\beta \cdot y_1}{(1-\beta) \cdot x_1} = \dfrac{\beta \cdot y_2}{(1-\beta) \cdot x_2} \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$

Die Bedingung für eine **effiziente Güterverteilung** (I) ist also im Gleichgewicht **erfüllt**!

aus $\dfrac{P_X}{P_Y} = \dfrac{\beta \cdot x_i^{\beta-1} \cdot y_i^{1-\beta}}{(1-\beta) \cdot x_i^{\beta} \cdot y_i^{-\beta}}$ nach Addition von P_X und P_Y

Aus den Gleichungen (11) bis (14) ergibt sich die Bedingung für die Faktorverteilung im **Konkurrenzgleichgewicht**:

(IIa) $\left(\dfrac{P_K}{P_A} =\right) \quad \dfrac{(1-\alpha) \cdot A_X}{\alpha \cdot K_X} = \dfrac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y} \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{A_X}{K_X} = \dfrac{A_Y}{K_Y}$

Die Bedingung für eine **effiziente Faktorverteilung** (II) ist also im Gleichgewicht **nicht erfüllt**!

$\dfrac{P_A}{P_K} = \dfrac{P_X \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}{P_X \cdot (1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}} = \dfrac{P_Y \cdot \alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{P_Y \cdot (1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}$ nach Addition von P_A und P_K

bzw. $\dfrac{P_A}{P_K} = \dfrac{\alpha \cdot K_X}{(1-\alpha) \cdot A_X} = \dfrac{\alpha \cdot K_Y}{(1-\alpha) \cdot A_Y}$ bzw. $\dfrac{P_K}{P_A} = \dfrac{(1-\alpha) \cdot A_X}{\alpha \cdot K_X} = \dfrac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y}$ nach Kürzen

Aus den Gleichungen (11) und (13) sowie (Ia) ergibt sich die Bedingung (1) für die Abstimmung zwischen Konsum– und Produktionsbereich im **Konkurrenzgleichgewicht**:

(IIIa-1) $\left(\dfrac{P_X}{P_Y} =\right) \quad \dfrac{y_i}{x_i} = \dfrac{A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$

Aus den Gleichungen (12) und (14) sowie (Ia) ergibt sich die Bedingung (2) für die Abstimmung zwischen Konsum– und Produktionsbereich im **Konkurrenzgleichgewicht**:

(IIIa-2) $\left(\dfrac{P_X}{P_Y} =\right) \quad \dfrac{y_i}{x_i} = \dfrac{A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}$

Die Bedingung für **globale Effizienz** (III) ist also im Gleichgewicht **nicht erfüllt**. Zwar ist (III-1) erfüllt, (III-2) hingegen nicht!

Division von (11) und (13) nach Umstellen nach P_X bzw. P_Y bringt

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{\dfrac{P_A}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}}{\dfrac{P_A}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}} = \frac{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$$

Division von (12) und (14) nach Umstellen nach P_X bzw. P_Y bringt

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{\dfrac{P_K}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}}{\dfrac{P_K}{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}} = \frac{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}$$

Zu zeigen ist noch (klausurrelevant angesichts von zwei Stunden Zeit für zwei Aufgaben??), dass die ermittelten Optimalbedingungen (I), (II) und (III) den Ausdrücken aus der Aufgabenstellung gemäß i, ii und iii entsprechen:

i. Die **Grenzrate der individuellen Gütersubstitution** $\frac{dy_i}{dx_i}$ ergibt sich aus der Totaldifferenzierung der Nutzenfunktion unter Beachtung von $dU_i = 0$:

$$0 = \beta \cdot x_i^{\beta-1} \cdot y_i^{1-\beta} \cdot dx_i + (1-\beta) \cdot x_i^{\beta} \cdot y_i^{-\beta} \cdot dy_i$$

bzw. $$\frac{dy_i}{dx_i} = -\frac{\beta \cdot x_i^{\beta-1} \cdot y_i^{1-\beta}}{(1-\beta) \cdot x_i^{\beta} \cdot y_i^{-\beta}} = \frac{\beta \cdot y_i}{(1-\beta) \cdot x_i}$$

Dieser Ausdruck entspricht der Bedingung **(I)**!

ii. Die **Grenzraten der Faktorsubstitution** $\frac{dA_Y}{dK_Y}, \frac{dA_X}{dK_X}$ ergeben sich aus der Totaldifferenzierung der Produktionsfunktionen unter Beachtung von $dX = dY = 0$ sowie $dK_X = -dK_Y$ in der Y – Produktionsfunktion:

$$0 = \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha} \cdot dA_X + (1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha} \cdot dK_X$$

bzw. $$\frac{dA_X}{dK_X} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_X}{\alpha \cdot K_X}$$

$$0 = \alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} \cdot dA_Y + (1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} \cdot dK_Y - (\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2} \cdot dK_Y$$

bzw.

$$\frac{dA_Y}{dK_Y} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - (\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}$$

$$= -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}} + \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y} + \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_X}$$

Diese Ausdrücke entsprechen der Bedingung **(II)**!

> Berücksichtigen Sie die Wirkung des Kapitaleinsatzes in der $X-$Produktion auf die $Y-$Produktion. Jede zusätzliche Kapitaleinheit in der $X-$Produktion bedeutet eine Kapitaleinheit in der $Y-$ Produktion weniger: $dK_X = -dK_Y$!
>
> Aus $\left(\frac{dA_X}{dK_X} =\right) - \frac{(1-\alpha) \cdot A_X}{\alpha \cdot K_X} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y} + \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_X} \left(= \frac{dA_Y}{dK_Y}\right)$ ergibt sich durch Umstellen (II) $\frac{(1-\alpha) \cdot A_X + (\alpha-1) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_X} = \frac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{\alpha \cdot K_Y}$ und es gilt offensichtlich $\frac{dA_Y}{dK_Y} = \frac{dA_X}{dK_X}$ im Optimum.

iii. Die **Grenzrate der Transformation** ergibt sich aus den total differenzierten Produktionsfunktionen. Schneller geht es jedoch mit Hilfe des **Enveloppen–Theorems** aus dem folgenden Optimierungsansatz:

$$\max!\ Y = A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} \quad \text{u. d. N.} \quad X = A_X^{\alpha} \cdot K_X^{1-\alpha},\ \overline{A} = A_X + A_Y,\ \overline{K} = K_X + K_Y$$

$$\max!\ L = A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} + \lambda \cdot (A_X^{\alpha} \cdot K_X^{1-\alpha} - \overline{X})$$
$$+ \theta_A \cdot (\overline{A} - A_X - A_Y) + \theta_K \cdot (\overline{K} - K_X - K_Y)$$

Die notwendigen Bedingungen lauten

(15) $\frac{\partial L}{\partial A_Y} = \alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - \theta_A \overset{!}{=} 0$ (16) $\frac{\partial L}{\partial A_X} = \lambda \cdot \alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha} - \theta_A \overset{!}{=} 0$

17) $\frac{\partial L}{\partial K_Y} = (1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - \theta_K \overset{!}{=} 0$

(18) $\frac{\partial L}{\partial K_X} = (\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2} + \lambda \cdot (1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha} - \theta_K \overset{!}{=} 0$

Nach dem Enveloppen–Theorem gilt: $\frac{\partial L}{\partial \overline{X}} = \frac{dY}{dX} = -\lambda$

Einsetzen von (15) und (16) bzw. von (17) und (18) ergibt die beiden Versionen

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}} \quad \text{und}$$

$$-\frac{dY}{dX} = \frac{A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}{}^{\alpha-2}_{X}}{A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}} - \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}$$

1. Version: Umstellen von (16) nach λ und Einsetzen ergibt $\frac{dY}{dX} = -\frac{\theta_A}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$. Umstellen von (15) nach θ_A und Einsetzen bringt $\frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha \cdot A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{\alpha \cdot A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$.

2. Version: Umstellen von Gleichung (18) nach λ und Einsetzen ergibt $\frac{dY}{dX} = -\frac{\theta_K - (\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}$. Umstellen von (17) nach θ_K und Einsetzen bringt

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1} - (\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{(1-\alpha) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}{}^{\alpha-2}_{X}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}} + \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}.$$

e) Interpretation der Bedingungen:

i. $-\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{dy_2}{dx_2}$ bzw. $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

Diese Bedingung besagt, dass die Güter X und Y Pareto–optimal unter den Individuen 1 und 2 verteilt sind, wenn die Grenzraten der individuellen Gütersubstitution (allgemein) bzw. die Güterverbrauchsverhältnisse (speziell) identisch sind, wenn – mit anderen Worten – jedes Individuum für eine marginale Verbrauchserhöhung von Gut X auf jeweils dieselbe Menge an Gut Y zu verzichten bereit ist.

ii. $-\frac{dA_Y}{dK_Y} = -\frac{dA_X}{dK_X}$ bzw. $\frac{(1-\alpha) \cdot A_X + (\alpha-1) \cdot K_X^{\alpha-2}}{K_X} = \frac{(1-\alpha) \cdot A_Y}{K_Y}$

Diese Bedingung besagt, dass die Faktoren Arbeit und Kapital Pareto–optimal unter den Produzenten verteilt sind, wenn die sozialen Grenzraten der Faktorsubstitution identisch sind, wenn – mit anderen Worten – unter Berücksichtigung des externen Effektes (!) jeder Produzent für eine marginale Verbrauchserhöhung des Faktors Kapital auf jeweils dieselbe Menge des Faktors Arbeit zu verzichten bereit ist.

iii. $-\frac{dy_i}{dx_i} = -\frac{dY}{dX},\ i = 1{,}2$ bzw. $\frac{y_i}{x_i} = \frac{A_Y^{\alpha-1} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha-1} \cdot K_X^{1-\alpha}}$

bzw. $\frac{y_i}{x_i} = \frac{A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-1}}{A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}} - \frac{(\alpha-1) \cdot A_Y^{\alpha} \cdot K_Y^{1-\alpha} \cdot K_X^{\alpha-2}}{(1-\alpha) \cdot A_X^{\alpha} \cdot K_X^{-\alpha}}$

Diese Bedingung besagt, dass für eine optimale Abstimmung zwischen Konsumbereich und Produktionsbereich, also zwischen Güternachfrage und Güterangebot, die Grenzraten der individuellen Gütersubstitution und die Grenzrate der Transformation übereinstimmen müssen. Mit anderen Worten, die Menge an *Y*, auf die die Individuen für eine marginale Verbrauchserhöhung von *X* zu verzichten bereit sind, muss genauso groß sein wie die Menge an *Y*, auf die man angesichts gegebener Faktorbestände für eine marginale Produktionserhöhung in der Modellwirtschaft verzichten muss.

Klausurschulungen – Kurse zur Prüfungsvorbereitung

Präsenzseminare

- **Finanzierungs– und entscheidungstheoretische Grundlagen der BWL**

  (A–Modul 31021)
  3 Tage, Honorar: 175 Euro, *Dozentin*: Dipl.Kffr., Dipl.Kfm. **Christian Meyer**

- **Internes Rechnungswesen und funktionale Steuerung**

  (A–Modul 31031)
  3 Tage, Honorar: 175 Euro, *Dozentin*: Dipl.Kffr. **Marit Schmolke**

- **Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik**

  (A–Modul 31101)
  3 Tage, Honorar: 175 Euro, *Dozentin*: Dipl.Vw. **Claudia Thiel**

- **Theorie der Marktwirtschaft**

  (A–Modul 31041)
  4 Tage, Honorar: 220 Euro, *Dozent*: Dipl.Vw. **Axel Hillmann**

- **Makroökonomie**

  (A–Modul 31041)
  4 Tage, Honorar: 220 Euro, *Dozent*: Dipl.Vw. **Axel Hillmann**

- **Controlling**

  Dozentin: Dipl.Oec. **Elke Bartschat**
  – Instrumente des Controlling (B-Modul 31601) – 3 Tage, Honorar: 175 Euro
  – Innovationscontrolling (B-Modul 31611) – 3 Tage, Honorar: 175 Euro

- **Finanzierung: Grundlagen**

  (B–Modul 31501)
  3 Tage, Honorar: 175 Euro, *Dozent*: Dipl.Kfm. **Christian Meyer**

- **AVWL** (Prüfung Allokationstheorie und Fiskalpolitik)

  4 Tage, Honorar: 220 Euro, *Dozent*: Dipl.Vw. **Axel Hillmann**

- **Stabiltätspolitik** (auch für AVWL-Prüfung)

  3 Tage, Honorar: 175 Euro, *Dozentin*: Dipl.Vw. **Dr. Heide Wolff** (Stabilitätspolitik)

Für alle Schulungen ist jeweils eine preiswerte Bildungsstätte mit Einzelzimmern (inkl. Dusche und WC) angemietet. Unterkunfts– und Verpflegungskosten kommen jeweils hinzu.

Online-Vorlesungen

- **Theorie der Marktwirtschaft**

  38 Stunden in 50 Modulen (mit vielen Übungsaufgaben)

- **Makroökonomie**

  23 Stunden in 37 Modulen (mit vielen Übungsaufgaben)

weitere Infos: www.axel-hillmann.de