# Fit in Mathe

Musterlösungen 1

November Klassenstufe 12

| Thema | **Vektoren** |
|---|---|

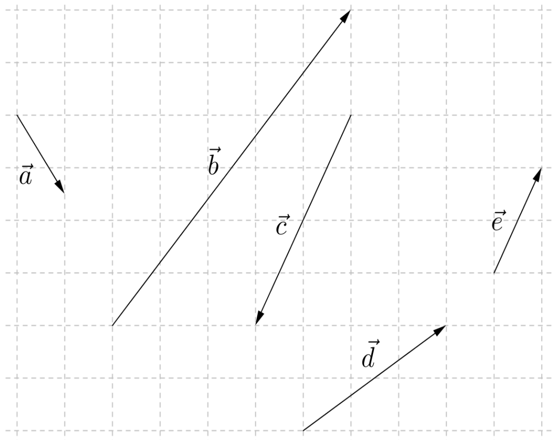
❶ Bestimme die Koordinaten der dargestellten Vektoren und berechne die angegeben Summen und Differenzen.

a) $\vec{a}+\vec{e}=$ b) $\vec{b}+\vec{c}=$

c) $\vec{a}-\vec{e}=$ d) $\vec{b}-\vec{c}=$

e) $\vec{d}-\vec{b}=$ f) $\vec{d}-\vec{c}=$

g) $\vec{e}-\vec{a}=$




Lösung:

zu a) $\begin{pmatrix}0\\0{,}5\end{pmatrix}$ zu b) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ zu c) $\begin{pmatrix}-2\\-3{,}5\end{pmatrix}$

zu d) $\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ zu e) $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ zu f) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ zu g) $\begin{pmatrix}2\\3{,}5\end{pmatrix}$

*Die Summe aller x-Koordinaten ist 15, also Buchstabenpaar EN.*

❷ Bestimme die Länge der Vektoren

a) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4{,}5\\6\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}16\\8\\16\end{pmatrix}$

Lösung

zu a) $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ zu b) $\sqrt{2^2+1{,}5^2}=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$

zu c) $\sqrt{4{,}5^2+6^2}=\sqrt{56{,}25}=7{,}5$ zu d) $\sqrt{16^2+8^2+16^2}=\sqrt{576}=24$

*Die Summe aller Längen ist 39, also Buchstabenpaar ER.*

❸ Stelle $\vec{b}$ aus Aufgabe 1 als Linearkombination dar:

a) mit $\vec{d}$ und $\vec{e}$ b) mit $\vec{c}$ und $\vec{d}$

*Lösung*

zu a) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow x = 1 \; und \; y = 2$

zu b) $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow x = -1 \; und \; y = 1$

*Die Summe aller Koeffizienten ist 3, also Buchstabenpaar Gl.*

❹ Untersuche, ob folgende Vektoren aus Aufgabe 1 linear abhängig sind:

a) $\vec{d}$ und $\vec{e}$ b) $\vec{c}$ und $\vec{e}$ c) $\vec{b},\vec{c}$ und $\vec{d}$

*Lösung*

„Lineare Unabhängigkeit“ einer Menge von n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ bedeutet mathematisch, dass der Nullvektor $\vec{0}$ aus ihnen nur so kombiniert werden kann, dass alle Koeffizienten 0 sind, d.h. aus $x_1\vec{a}_1 + \ldots x_n\vec{a}_n = \vec{0}$ folgt: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ .
Bei der „linearen Abhängigkeit“ hingegen gibt es neben dieser Lösung auch noch andere, bei denen nicht alle Koeffizienten 0 sind. Wir haben also in den obigen Fällen die Linearkombinationen zur $\vec{0}$ zu untersuchen.

zu a) Der Linearkombination $x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ entspricht bei komponentenweisem Vergleich das Gleichungssystem $\begin{matrix}3x + y = 0\\2x + 2y = 0\end{matrix}$ und dieses hat die einzige Lösung $x = y = 0$ . Das bedeutet laut obiger Definition, dass die beiden Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ linear unabhängig sind.

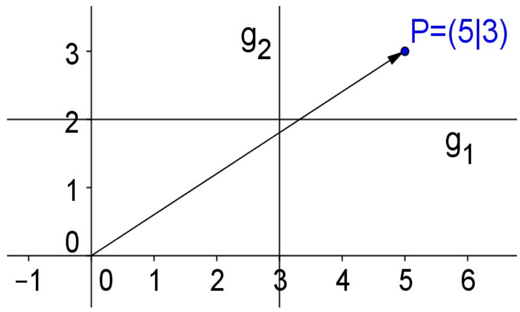
zu b) Der Linearkombination $x\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ entspricht bei komponenten-weisem Vergleich das Gleichungssystem $\begin{matrix}-2x + y = 0\\-4x + 2y = 0\end{matrix}$ , aber dieses hat neben der Lösung $x = y = 0$ noch andere Lösungen, bei denen nicht beide Koeffizienten 0 sind, z.B. $x = 1$ und $y = 2$ . Also sind die Vektoren laut obiger Definition linear abhän-gig.

zu c) Der Linearkombination $x\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ entspricht das Gleichungs-system $\begin{matrix}5x - 2y + 3z = 0\\6x - 4y + 2z = 0\end{matrix}$ . Wenn wir hier $z = 1$ setzen, wird das Gleichungs-system zu $\begin{matrix}5x - 2y = -3\\6x - 4y = -2\end{matrix}$ oder bei Division der 2. Gleichung durch -2:
$\begin{matrix}5x - 2y = -3\\-3x + 2y = 1\end{matrix}$ .
Nach Addition der beiden Gleichungen erhält man sofort $x = -1$ und daraus folgt $y = -1$ . Es gibt also eine Lösung für die Koeffizienten, bei der nicht alle 0 sind,

und daher sind die drei Vektoren linear abhängig.
Übrigens hätte man auf diesen speziellen Nachweis verzichten können, denn es handelt sich um Vektoren eines zweidimensionalen Vektorraums und da können in jedem System von n Vektoren nur maximal zwei linear unabhängig sein.

*Die Anzahl der linear abhängigen Vektorenpaare ist 2, also Buchstabenpaar EV.*

❺ Bestimme zwei Vektoren derart, dass ihre Endpunkte jeweils auf den Geraden $g_1$ und $g_2$ liegen und dass P der Endpunkt ihrer Summe ist.




*Lösung*

Die beiden Vektoren seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$. Der Endpunkt des Vektors $\vec{v}$ liege auf der Gerade $g_1$, d.h. es ist $v_y = 2$. Der Endpunkt des Vektors $\vec{w}$ liege auf der Geraden $g_2$, d.h. es ist $w_x = 3$. Die Summe beider ist der Ortsvektor des Punktes P, d.h.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweiser Vergleich führt auf das Gleichungssystem $\begin{array}{l} v_x + 3 = 5 \\ 2 + w_y = 3 \end{array}$ mit den Lösungen $v_x = 2$ und $w_y = 1$. Die beiden Vektoren sind demnach

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

*Die Summe aller Koordinaten der beiden Vektoren ist 8, also Buchstabenpaar ER.*

❻ Berechne das Skalarprodukt der genannten Vektoren aus Aufgabe 1.
(Hinweis: $\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ woraus folgt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ )

a) $\vec{c} \cdot \vec{e}$ b) $\vec{e} \cdot \vec{d}$ c) $\vec{c} \cdot \vec{a}$ d) $\vec{d} \cdot \vec{a}$ e) $\vec{d} \cdot \vec{b}$

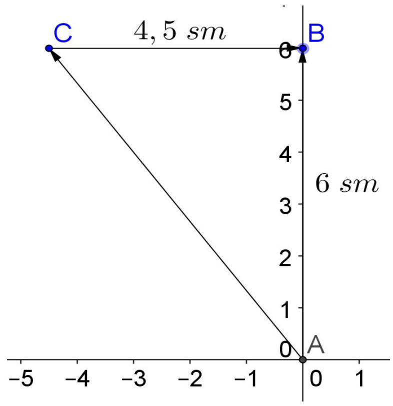
*Lösung*

zu a) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -10$ zu b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 7$ zu c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 4$

zu d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 0$ zu e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 27$

*Die Summe aller Skalarprodukte ist 28, also Buchstabenpaar BR.*

❼ Eine Fähre soll eine 6 sm (=Seemeile, 1 sm=1852 m) breite Meerenge zwischen den Häfen A und B überqueren. Es besteht eine Strömung aus 90° rechtwinklig zur Richtung $\overrightarrow{AB}$ mit 9 kn (=Knoten, 1 kn = 1 sm/h). Mit welcher Geschwindigkeit muss die Fähre fahren, wenn sie den Weg in 30 min zurücklegen will, und welchen Kurs gegen die Nordrichtung muss sie nehmen, wenn B genau im Norden von A liegt

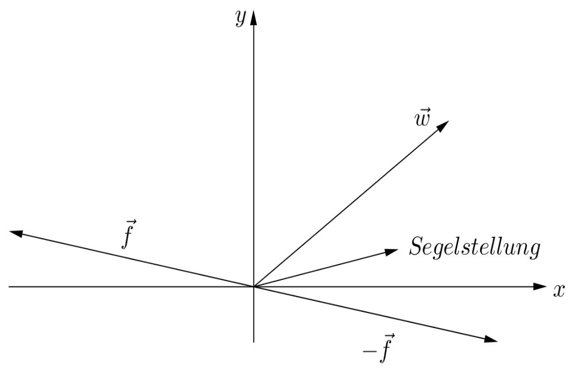



*Lösung*

Die Fähre muss bei Abfahrt einen Kurs in Richtung des 4,5 sm nach links versetzten Punktes C nehmen und diese Richtung beibehalten. Die Strömung trägt sie dann während der halbstündigen Überfahrt zum Punkt B. Sie hat dann eine Strecke von $\sqrt{4{,}5^2+6^2}=7{,}5\,sm$ zurückgelegt.

*Deshalb beträgt ihre Geschwindigkeit 15 kn, also Buchstabenpaar AU.*

❽ Ein Segelboot kreuzt gegen den Wind. Das Segel ist dann am günstigsten eingestellt, wenn es den Winkel zwischen der Windrichtung und der umgekehrten Fahrtrichtung halbiert. Die Windgeschwindigkeit und die Fahrtgeschwindigkeit sollen durch die Vektoren $\vec{w}\,(=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix})$ bzw. $\vec{f}\,(=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix})$ beschrieben werden.
Berechne die Stellung des Segels.




*Lösung*

Der Vektor der umgekehrten Fahrtrichtung ist $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$. Wenn man beide Vektoren durch ihre Längen dividiert, d.h. $\widehat{w}=\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ und

$\widehat{-f}=\frac{\overrightarrow{-f}}{\|\overrightarrow{-f}\|}=\frac{1}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$, erhält man zwei Einheitsvektoren in die

Wind- und umgekehrte Fahrtrichtung. Die Summe beider Vektoren ist als Diagonale der Raute, die von beiden Vektoren gebildet wird, auch Winkelhalbierende und zeigt somit die Segelstellung an.

Es ist $\widehat{w}+\widehat{-f}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0,8+1\\0,6-0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,8\\0,4\end{pmatrix}$

*Die Summe aus x- und y-Koordinate des Vektors der Segelstellung auf eine Stelle gerundet ist 2,2 , also Buchstabenpaar CH.*

*(Selbstkritisch muss man feststellen, dass die Ermittlung der Lösungszahl nicht eindeutig ist, denn jedes Vielfache des obigen Vektors würde die Segelstellung genauso beschreiben, weil es nicht auf die Länge des Vektors ankommt, sondern auf den Winkel, den er mit der x-Achse einschließt.)*

Lösungen mit Kennsilben

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,3 | 39 | 2 | 37 | 28 | 16 | 2,2 | 7 | 15 | 0 | 13 | 8 | 27 | 3 | 15 | 5 |
| ER | ER | EV | ES | BR | KU | CH | EW | EN | TE | SS | ER | AE | GI | AU | NG |

Lösungswort:ENERGIEVERBRAUCH

❾ <u>Expertenaufgabe</u>

Für welche reellen Zahlen $\alpha$ sind die Vektoren

$\begin{pmatrix}1-\alpha\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-\alpha\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\4-\alpha\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(Mehrere Lösungen sind möglich!)

*<u>Lösung</u>*

Es ist die Koeffizientengleichung

$$x\cdot\begin{pmatrix}1-\alpha\\0\\1\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}2\\-\alpha\\-1\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\(4-\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

zu untersuchen.

Aus der zweiten Komponentengleichung folgt

$(*)\quad z=y\cdot\alpha$ .

Damit folgt aus der dritten

(**) $x=y-(4-\alpha)\,y\alpha=y\cdot(1-4\alpha+\alpha^2)$ .

Nun setzt man beides in die erste ein und erhält:

$$(1-\alpha)\,y\,(1-4\alpha+\alpha^2)+2\,y-2\,y\,\alpha=0\Leftrightarrow$$
$$y((1-\alpha)(1-4\alpha+\alpha^2)+2-2\alpha)=0\Leftrightarrow$$

(***) $y\cdot(-\alpha^3+5\alpha^2-7\alpha+3)=0$

Der Faktor bei α ist ein Polynom dritten Grades mit den Nullstellen

$\alpha_1=1$ und $\alpha_2=3$ .

(gefunden durch Ausprobieren der Teiler des additiven Summanden 3).
In allen anderen Fällen ist das Polynom ungleich 0. In diesem Fall kann Gleichung (***) kann nur 0, wenn $y=0$ ist. Dann ist aber wegen (*) auch $z=0$ und wegen (**) $x=0$ .
Zusammenfassend kann man feststellen:
Die obigen Vektoren sind jedenfalls linear unabhängig für alle $\alpha \in R \setminus \{1,3\}$ .

Im Fall $\alpha = 1$ hat man die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und es gibt eine mögliche „nicht-triviale *)“ Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Im Fall $\alpha = 3$ hat man die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit einer möglichen nicht-trivialen Linearkombination

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also sind für diese beiden α die Vektoren linear abhängig.

*) die „triviale“ Linearkombination ist die, bei der die Koeffizienten alle 0 sind.