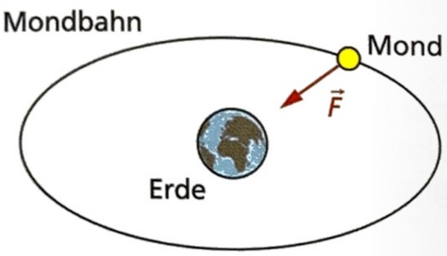
2.7 Gravitation

2.7.1 Das Gravitationsgesetz

Abgeleitet ist der Begriff **Gravitation** von *gravis* (lat.) = schwer.

Die Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch den englischen Naturforscher ISAAC NEWTON (1643–1727) war der Endpunkt einer langen und komplizierten historischen Entwicklung. Dabei flossen irdische Beobachtungen über die **Erdanziehungskraft** und Himmelsbeobachtungen über die Bewegungen des Mondes und der Planeten zusammen. Zu beantworten war letztlich die Frage, ob die Kraft, die Erdmond oder Planeten auf eine kreisähnliche Bahn zwingt, wesensgleich mit der Kraft ist, die wir als Erdanziehungskraft kennen und die z. B. bewirkt, dass ein Apfel nach unten fällt, wenn man ihn loslässt.

Ein Teil dieses komplizierten und langwierigen Erkenntnisprozesses war der Streit um das **Weltbild**, der in den Auseinandersetzungen um die Richtigkeit des heliozentrischen Weltbildes des **NIKOLAUS KOPERNIKUS** (1473–1543) gipfelte.

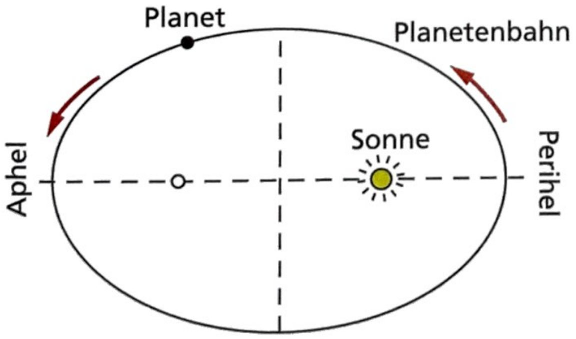


Die keplerschen Gesetze

Ein entscheidender Schritt auf dem Weg zur Erkenntnis des Gravitationsgesetzes war die Analyse der Bewegungen von Planeten des Sonnensystems und die Formulierung entsprechender Gesetze. Dieser Schritt wurde von JOHANNES KEPLER (1571–1630) unternommen. KEPLER gelangte durch intensive Auswertung von Beobachtungen des dänischen Astronomen TYCHO BRAHE (1546 –1601) zu den heute nach ihm benannten **keplerschen Gesetzen,** die nachstehend in moderner Formulierung angegeben sind:

JOHANNES KEPLER (1571–1630) entdeckte die **keplerschen Gesetze** der Planetenbewegung. Eingebunden in das Denken seiner Zeit, war er zutiefst davon überzeugt, dass die Welt von göttlichen Harmonieprinzipien durchdrungen ist.

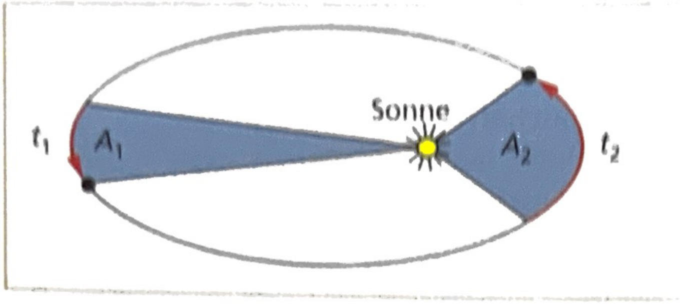
1. keplersches Gesetz



Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem gemeinsamen Brennpunkt steht die Sonne.

Daraus folgt, dass sich bei der Bewegung von Planeten um die Sonne der Abstand Planet–Sonne ständig ändert. Für die Erde beträgt die geringste Entfernung von der Sonne $147{,}1 \cdot 10^6$ km (Perihel, Anfang Januar), die größte Entfernung $152{,}1 \cdot 10^6$ km (Aphel, Anfang Juli).

2. keplersches Gesetz



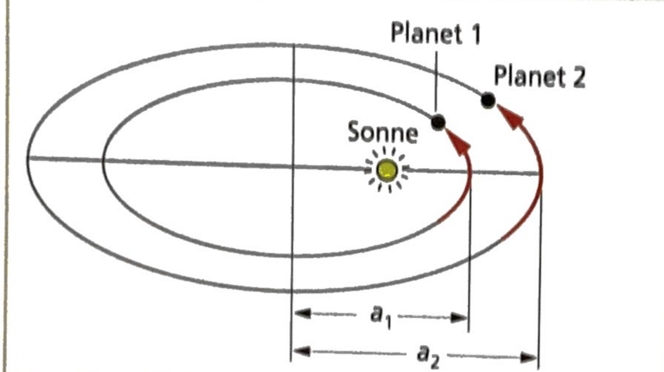
Die Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2}$$

A_1, A_2 Flächen
t_1, t_2 Zeiten

Daraus folgt, dass sich ein Planet in Sonnenferne langsamer bewegt als in Sonnennähe.
Für die Erde betragen die Geschwindigkeiten $29{,}3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ in Sonnenferne (Juni/Juli) und $30{,}3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ in Sonnennähe (Dezember/Januar).

3. keplersches Gesetz



Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

T_1, T_2 Umlaufzeiten der Planeten
a_1, a_2 große Halbachsen der Planetenbahnen

Aus diesem Gesetz folgt, dass die Bahngeschwindigkeit von Planeten mit wachsendem Abstand von der Sonne abnimmt. Merkur als sonnennächster Planet bewegt sich schneller um die Sonne als die Erde. Die Erde bewegt sich schneller um die Sonne als die sonnenfernen Planeten Saturn oder Pluto.
Aus den keplerschen Gesetzen ergeben sich wichtige Hinweise auf den Charakter der Gravitationskraft. Das gilt vor allem für das 3. keplersche Gesetz.

▶ Geht man davon aus, dass die auf einen Planeten wirkende Kraft gleich der **Radialkraft** ist, dann gilt:

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

(↗ S. 84) und damit

$$F \sim \frac{r}{T^2} \quad (1)$$

Für Kreisbahnen folgt aus dem 3. keplerschen Gesetz:

$$T^2 \sim r^3$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

NEWTONs Mondrechnung

Neben I. NEWTON (1643–1727) waren im 17. Jahrhundert auch schon andere Gelehrte, z. B. der Astronom EDMUND HALLEY (1656–1743), auf den Zusammenhang zwischen Kraft und Abstand gestoßen (s. Randspalte). Mithilfe der sogenannten **Mondrechnung** konnte NEWTON aber zeigen, dass es sich bei der Kraft zwischen Himmelskörpern um die gleiche Art von Kraft handelte, die auch die Körper auf der Erdoberfläche anzog.
NEWTON ging bei seinen Überlegungen von einer näherungsweisen Kreisbewegung des Mondes um die Erde aus. Die in Richtung Erde wirkende Radialbeschleunigung beträgt nach den Gesetzen der Kreisbewegung dann:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = 2{,}73 \cdot 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

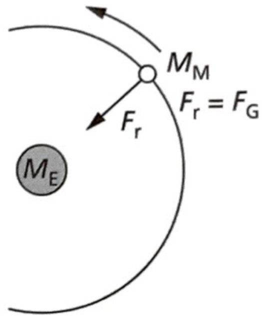
Darin bedeuten T die Umlaufzeit des Mondes um die Erde (27,32 d) und r den mittleren Mondbahnradius (384 400 km).
NEWTON wusste: Der Radius r der Mondbahn ist etwa 60-mal größer als der Erdradius R. Für das Verhältnis der Radialbeschleunigung a des Mondes und der Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche gilt näherungsweise:

$$\frac{a}{g} = \frac{1}{3\,590} \approx \left(\frac{1}{60}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Sind beide Beschleunigungen auf dieselbe Kraft zurückzuführen, dann müsste für diese Kraft eine Entfernungsabhängigkeit der Form $F \sim \frac{1}{r^2}$ gelten.

Die Erdanziehungskraft und die im All wirkenden Anziehungskräfte zwischen Himmelskörpern sind auf das Wirken ein- und desselben Gesetzes, des Gravitationsgesetzes, zurückzuführen.

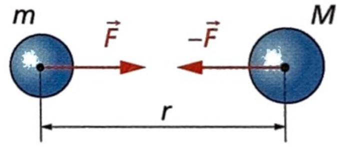
In den Jahren 1680–1684 arbeitete ISAAC NEWTON die Theorie der Planetenbewegung aus.
Den Zusammenhang $F \sim \frac{1}{r^2}$ fand NEWTON bereits etwa 1665.



Das Gravitationsgesetz

Das **Gravitationsgesetz** fand ISAAC NEWTON um 1687. Es lautet:

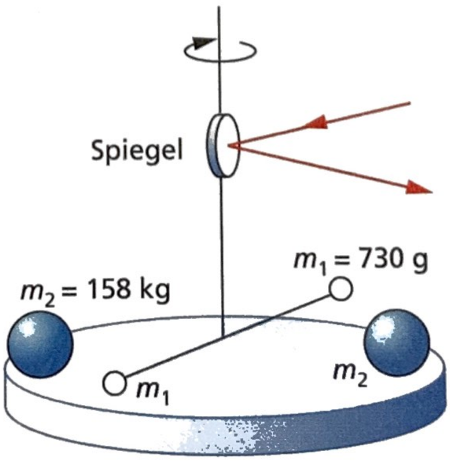
Zwischen zwei Körpern wirken aufgrund ihrer Massen anziehende Kräfte, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.
Für den Betrag dieser Gravitationskräfte gilt:



$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

G	Gravitationskonstante
m, M	Massen der Körper
r	Abstand der Massenmittelpunkte

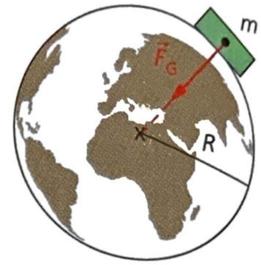
Die Gravitationskonstante G kann experimentell ermittelt werden. Erstmals gelang das 1798 dem englischen Physiker HENRY CAVENDISH (1731–1810, Bild rechts) mit einer von ihm erfundenen **Drehwaage.** Die Skizze zeigt das Messprinzip.
An einem Draht sind zwei kleine kugelförmige Körper befestigt. Darüber hinaus ist ein Spiegel angebracht, über den die Verdrillung des Drahtes gemessen werden kann.
Zwei große Kugeln sind symmetrisch auf einer drehbar gelagerten Scheibe befestigt. Bei gleichem Abstand von den kleinen Kugeln heben sich die Gravitationskräfte auf. Der Draht wird nicht verdrillt. Nähert man die großen Kugeln den kleinen, so wird der Draht aufgrund der wirkenden Gravitationskräfte verdrillt. Die Stärke der Verdrillung kann gemessen und damit die Gravitationskonstante bestimmt werden.



Aufgrund der **Gravitation** ist jeder Körper auf der Erde „schwer". Aus diesen Überlegungen ergibt sich der Begriff „schwere Masse", der von der „trägen Masse" unterschieden wird, die bei Bewegungsänderungen eine Rolle spielt. Schwere und träge **Masse** eines Körpers sind gleich groß.

Mithilfe des Gravitationsgesetzes kann man die Erde „wiegen“, also ihre Masse ermitteln.
Führen Sie eine solche Bestimmung der Erdmasse durch!

Analyse:
Die Gewichtskraft F_G eines Körpers auf der Erdoberfläche ist gleich der Gravitationskraft zwischen ihm und der Erde. Es gilt also:



Erde mit der Masse M

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

und damit

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

Die nebenstehend genannte Gleichung (1) kann man beispielsweise dazu nutzen, um die Fallbeschleunigung an der Oberfläche von Himmelskörpern zu berechnen, wenn man deren Masse und Radius kennt.

Mithilfe der nach M umgestellten Gleichung kann man die Erdmasse berechnen.

Gesucht: M

Gegeben: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$R = 6\,371\ \text{km} = 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}$

Lösung:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

$$M = \frac{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}$$

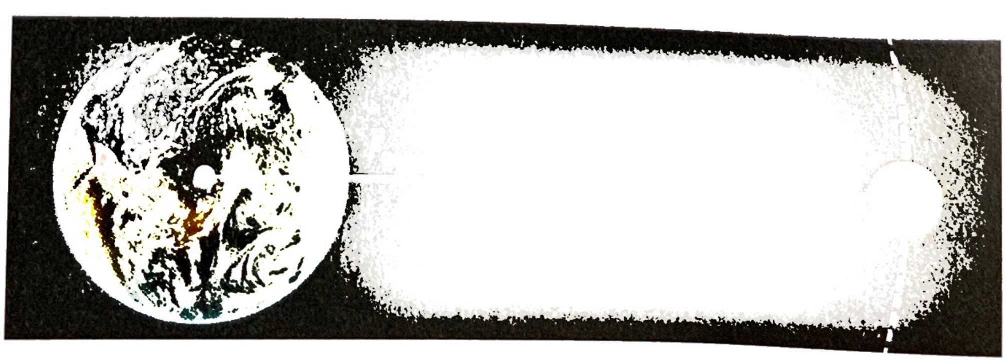
$$\underline{M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}$$

Die Erdmasse ist 81-mal größer als die Mondmasse. Sie beträgt aber nur $\frac{1}{330\,000}$ der Masse der Sonne.

Ergebnis:
Die Masse der Erde beträgt $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

Das Gravitationsgesetz kann zur Lösung weiterer interessanter Aufgaben genutzt werden, beispielsweise zur Bestimmung der 1. kosmischen Geschwindigkeit (↗ S. 130 f.) oder zur Bestimmung der Bahngeschwindigkeit des Mondes um die Erde. Mithilfe der Gravitation lassen sich auch Erscheinungen wie **Ebbe** und **Flut** erklären.

Als Ansatz ist bei solchen Aufgaben häufig zu wählen: Radialkraft = Gravitationskraft
$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$



2.7.2 Gravitationsfelder

Beschreibung von Gravitationsfeldern

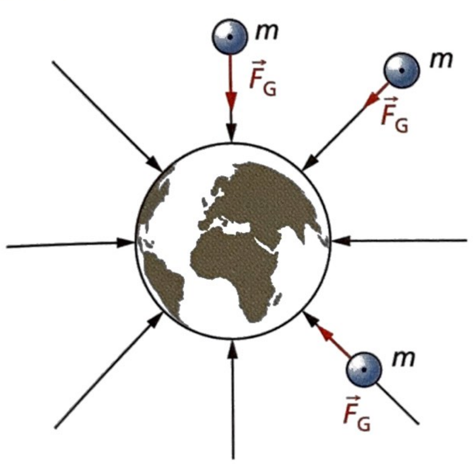
Lange Zeit konnte die Wissenschaft nicht die Frage beantworten, wie die gravitative Wirkung zwischen Körpern durch den Raum hindurch erfolgt. Dies wurde erst mithilfe der **Feldtheorie** möglich.

> Unter einem Gravitationsfeld versteht man den besonderen Zustand des Raumes um einen massebehafteten Körper.
> In ihm werden auf andere Körper Gravitationskräfte ausgeübt.

Analog dazu existiert um einen geladenen Körper ein **elektrisches Feld** (↗ S. 230) und um einen Magneten ein **magnetisches Feld** (↗ S. 246).

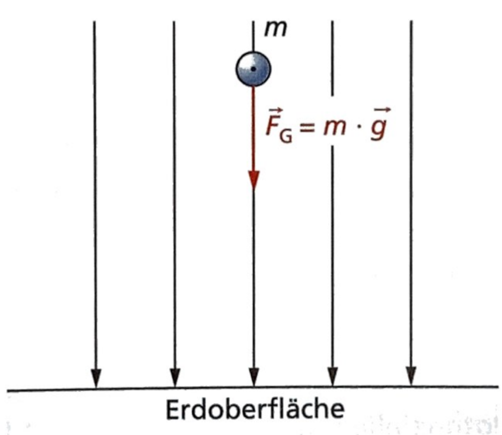
Veranschaulichen kann man sich ein Gravitationsfeld ähnlich wie ein elektrisches oder ein magnetisches Feld durch ein **Feldlinienbild.**

Gravitationsfeld der Erde



Das Gravitationsfeld der Erde ist ein Radialfeld und damit ein inhomogenes Feld.

Gravitationsfeld in der Nähe der Erdoberfläche



In unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche kann man das Gravitationsfeld als homogen ansehen.

Als Richtung der Feldlinien des **Gravitationsfeldes** wird die Richtung der Kraft auf einen Probekörper angenommen.
In die Physik eingeführt wurde das **Feldlinienmodell** durch den englischen Physiker **MICHAEL FARADAY** (1791–1867).

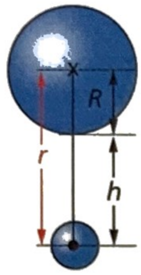
Die ortsabhängige Stärke eines Gravitationsfeldes wird durch die **Gravitationsfeldstärke** erfasst.

> Die Gravitationsfeldstärke gibt an, wie groß die Gravitationskraft $\vec{F}$ auf einen Probekörper der Masse *m* im Gravitationsfeld ist.
>
> Formelzeichen: $\vec{g}$
> Einheit: ein Newton durch Kilogramm $\left(1\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right)$
>
> Die Gravitationsfeldstärke eines Körpers der Masse *M* kann berechnet werden mit der Gleichung:
>
> $$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$
>
> $$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$
>
> *G* Gravitationskonstante
> *M* Masse des felderzeugenden Körpers
> *r* Abstand vom Massenmittelpunkt

Für die Einheiten gilt:
$1\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{kg}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Gravitationsfeldstärke wird auch als **Ortsfaktor** oder als **Fallbeschleunigung** (↗ S. 67) bezeichnet.

Der Abstand r wird stets vom Massenmittelpunkt des felderzeugenden Körpers aus gemessen.



Die Aufgabe lässt sich auch durch inhaltlich-logisches Schließen (↗ S. 39) lösen:

$r = R \cdot \sqrt{2}$
$h = R(\sqrt{2} - 1)$

In welcher Entfernung von der Erdoberfläche ist der Ortsfaktor nur noch halb so groß wie an der Erdoberfläche?

Analyse:
Für den Ortsfaktor an der Erdoberfläche gilt $g_E = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Die Entfernung h, in der der Ortsfaktor nur noch halb so groß ist, kann mithilfe der Gleichung für die Gravitationsfeldstärke berechnet werden.

Gesucht: h
Gegeben: $R = 6\,371\ \text{km} = 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}$
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
$g = \frac{1}{2}\, g_E$

Lösung:

$$h = r - R \qquad r = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{g_E}}$$

$$h = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{g_E}} - R$$

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67\ \text{m}^3 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \text{s}^2}{10^{11} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot 9{,}81\ \text{m}}} - 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$h = 9{,}01 \cdot 10^6\ \text{m} - 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$\underline{\underline{h = 2{,}64 \cdot 10^6\ \text{m}}}$$

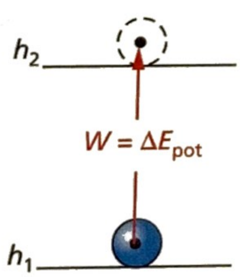
Ergebnis:
Der Ortsfaktor (Gravitationsfeldstärke) hat in 2 640 km Höhe über der Erdoberfläche die Hälfte des Wertes auf der Erdoberfläche.

Hebt man einen Körper von Normalnull (NN) auf 1 000 m an, so verkleinert sich der Ortsfaktor lediglich um 0,000 2 %.

Potenzielle Energie und Arbeit im Gravitationsfeld

In der Nähe der Erdoberfläche kann man das Gravitationsfeld der Erde als homogen ansehen (↗ S. 125). Demzufolge ist in diesem Bereich der Ortsfaktor g = konstant. Wird an einem Körper Hubarbeit (↗ S. 92) verrichtet, so vergrößert sich seine potenzielle Energie:

$$W = \Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$



Im homogenen Gravitationsfeld in der Nähe der Erdoberfläche ist die Änderung der potenziellen Energie eines Körpers gleich der verrichteten Hubarbeit:

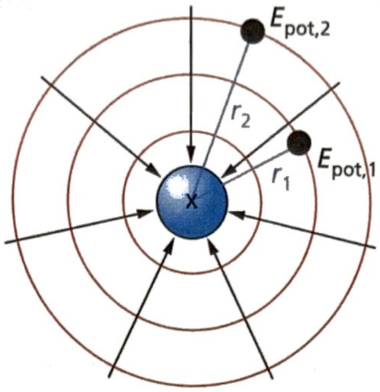
$$W = \Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

m Masse des Körpers
g Ortsfaktor
Δh Höhenunterschied

Als **Bezugsniveau** für die **potenzielle Energie** in Erdnähe wird häufig die Erdoberfläche gewählt. Man kann auch jedes andere Bezugsniveau wählen.

Die verrichtete Arbeit und damit die Änderung der potenziellen Energie ist nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung abhängig. Beide Größen hängen nicht von der Bahn ab, auf der die Bewegung erfolgt.
Wird ein Körper um größere Strecken im Gravitationsfeld verschoben, dann kann man das Feld nicht mehr als homogen ansehen (↗ S. 125).

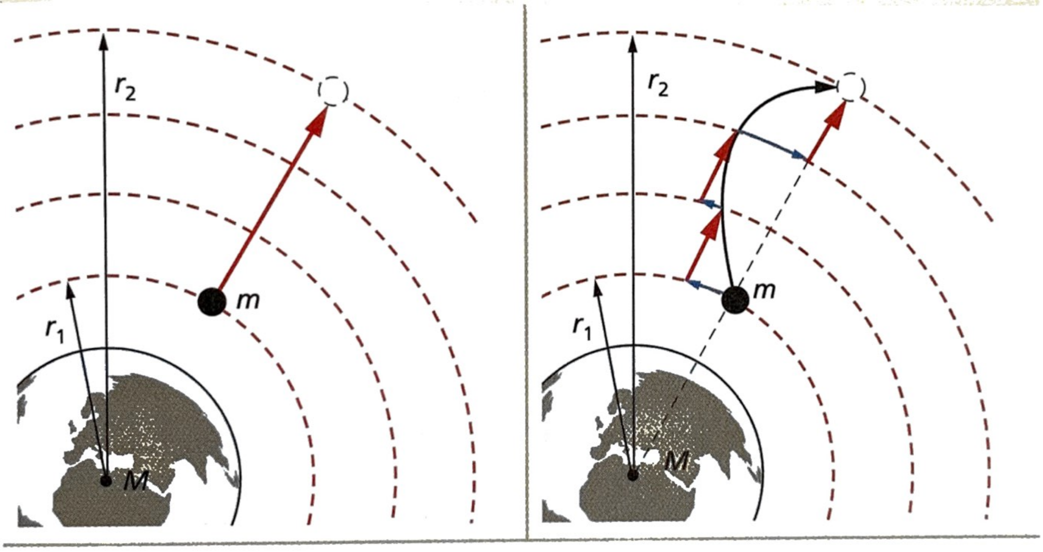
Verbindet man in einem Gravitationsfeld Punkte gleicher Gravitationsfeldstärke miteinander, so erhält man Flächen gleichen Potenzials, die man in der Physik auch als **Äquipotenzialflächen** bezeichnet.
In einem Radialfeld sind es Kugelschalen, auf denen die Feldlinien des Gravitationsfeldes senkrecht stehen.



Ein Körper auf einer **Äquipotenzialfläche** hat eine bestimmte potenzielle Energie, unabhängig davon, an welchem Ort auf der Fläche er sich befindet.

Um einen Körper aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 zu verschieben, ist eine bestimmte Arbeit erforderlich. Dabei kann man zwei Fälle unterscheiden.

Gravitationskraft und Weg haben stets die gleiche Richtung.	**Es wird ein beliebiger Weg zurückgelegt.**



Rechts lässt sich der Weg in Teilstrecken längs einer Aquipotenzialfläche (blau) und in solche, die radial verlaufen (rot) zerlegen. Nur die radialen Teile ergeben einen Beitrag für die zu verrichtende Arbeit. Die Wege in radialer Richtung sind in beiden Fällen gleich groß.

In beiden Fällen lässt sich die Arbeit durch Integration ermitteln. Entscheidend ist dabei: Die Arbeit ist unabhängig davon, auf welchem Weg der Körper von r_1 nach r_2 transportiert wird.

Es gilt: $\int \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r} + C$

Mit $W = \int_{r_1}^{r_2} F\,dr$ und $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ erhält man:

> In einem radialen Gravitationsfeld kann die Arbeit zum Verschieben eines Körpers und damit die Änderung seiner potenziellen Energie berechnet werden mit der Gleichung:
>
> $$W = \Delta E_{pot} = G \cdot m \cdot M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$
>
> | | |
> |---|---|
> | G | Gravitationskonstante |
> | M | Masse des felderzeugenden Körpers |
> | m | Masse des Körpers im Gravitationsfeld |
> | r_1, r_2 | Abstand vom Massenmittelpunkt |

Die **Arbeit** ist positiv, wenn sich die **Energie** des Systems Erde–Körper vergrößert, also der Körper von der Erde weg bewegt wird. Im umgekehrten Fall ist sie negativ.

▶ **Meteoroide** sind Kleinstkörper des Sonnensystems, die in die Erdatmosphäre eindringen können. Kleine Meteoroide verdampfen in der Atmosphäre und rufen dabei Leuchterscheinungen hervor, die als **Meteore** (Sternschnuppen) bezeichnet werden. Größere Meteoroide können den Erdboden erreichen. Diese zur Erdoberfläche gelangenden Reste der Meteoroide werden als **Meteorite** bezeichnet. Der größte bekannte Meteorit liegt in Namibia und besitzt eine Masse von mehr als 60 Tonnen.

▶ Bereits der Aufprall eines solchen Meteoroiden könnte verheerende Wirkungen haben. Zum Vergleich: Eine **Energie** von $3 \cdot 10^{10}$ J wird auch frei, wenn etwa 1 000 l Benzin vollständig verbrennen.

▶ Bei Betrachtungen zur **potenziellen Energie** in der Nähe der Erdoberfläche wählt man meist die Erdoberfläche als Bezugsniveau und setzt für $h = 0$ die potenzielle Energie $E_{pot} = 0$.

Welche Arbeit kann ein Meteoroid der Masse 500 kg verrichten, der aus den Tiefen des Alls kommt und auf die Erdoberfläche fällt?

Analyse:
Zur Berechnung kann die ↗S. 127 unten genannte Gleichung für die Arbeit im Gravitationsfeld genutzt werden. Es geht dabei um das Gravitationsfeld der Erde, folglich ist die Masse der Erde einzusetzen. Als Anfangsgeschwindigkeit des Meteoroiden nehmen wir $v = 0$ an. Da der Meteoroid aus sehr großer Entfernung kommt und auf die Erdoberfläche fällt, setzen wir $r_1 \to \infty$ und $r_2 = R$.

Gesucht: W
Gegeben: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg (Masse der Erde)
$r_1 \to \infty$
$r_2 = 6{,}371 \cdot 10^6$ m (Radius der Erde)
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Lösung:

$$W = G \cdot m \cdot M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Mit $r_1 \to \infty$ erhält man $\frac{1}{r_1} \to 0$ und damit:

$$W = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r_2}$$

$$W = -\frac{6{,}67\ \text{m}^3 \cdot 500\ \text{kg} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{10^{11}\ \text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}}$$

$$\underline{W = -3{,}13 \cdot 10^{10}\ \text{J}}$$

Ergebnis:
Ein Meteoroid mit einer Masse von 500 kg kann beim Fall auf die Erde eine Arbeit von etwa $3 \cdot 10^{10}$ J verrichten.

Potenzielle Energie und Potenzial

Die potenzielle Energie eines Körpers, der sich im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers befindet, ist von seiner Masse und davon abhängig, welches Bezugsniveau man für die potenzielle Energie wählt. In der Physik wird häufig die potenzielle Energie im Unendlichen gleich null gesetzt. Um einen Körper der Masse m vom Unendlichen auf den Abstand r zu verschieben, ist die Arbeit

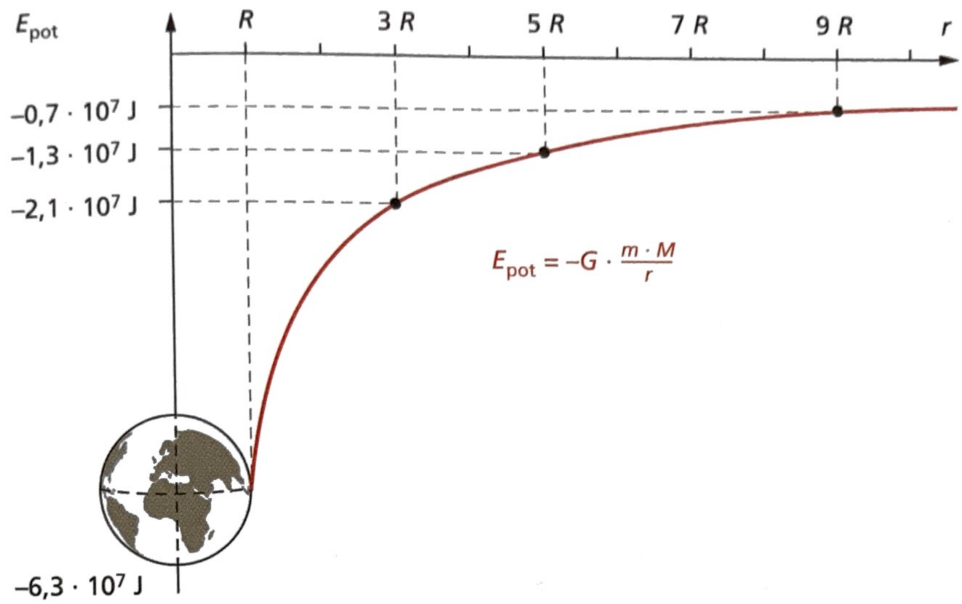
$$W = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

erforderlich. Diese Arbeit entspricht der Änderung der potenziellen Energie und mit $E_{pot,\infty} = 0$ zugleich der potenziellen Energie.

Ist ein Körper der Masse m von einem Zentralkörper der Masse M den Abstand r entfernt, dann besitzt er die potenzielle Energie:

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

Betrachtet man z. B. einen Körper der Masse 1 kg im Gravitationsfeld der Erde, so ergibt sich für das Bezugsniveau $E_{pot,\infty} = 0$ der nachfolgend dargestellte Verlauf für die potenzielle Energie.



Setzt man dagegen für die Erdoberfläche die **potenzielle Energie** $E_{pot} = 0$, dann ergibt sich allgemein für die potenzielle Energie der Ausdruck:

$$E_{pot} = G \cdot m \cdot M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

und für $r \to \infty$

$$E_{pot} = G \cdot m \cdot M \frac{1}{R}$$

Um das Gravitationsfeld eines Körpers unabhängig davon beschreiben zu können, ob sich ein Probekörper in ihm befindet oder nicht, führt man die Größe **Potenzial** ein.

Das Potenzial eines Punktes im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers der Masse M ist ein Maß für die Energie eines Körpers im betreffenden Punkt.

Formelzeichen: V

Einheit: ein Joule durch Kilogramm $\left(1\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right)$

Das Potenzial in einem Radialfeld kann berechnet werden mit der Gleichung:

$$V = \frac{E_{pot}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$

E_{pot}	potenzielle Energie
m	Masse eines Körpers im Gravitationsfeld
G	Gravitationskonstante
M	Masse des felderzeugenden Körpers
r	Abstand des Punktes vom Massenmittelpunkt des felderzeugenden Körpers

In analoger Weise wird beim elektrischen Feld das Potenzial eingeführt (↗ S. 237).

Als Bezugspunkt ($V = 0$) für das **Potenzial** kann entweder ein Punkt im Unendlichen oder ein Punkt auf der Erdoberfläche festgelegt werden. Die nebenstehende Gleichung gilt für einen Bezugspunkt im Unendlichen.

Für das Potenzial ergibt sich in der grafischen Darstellung ein ähnlicher Verlauf wie für die potenzielle Energie (s. oben).

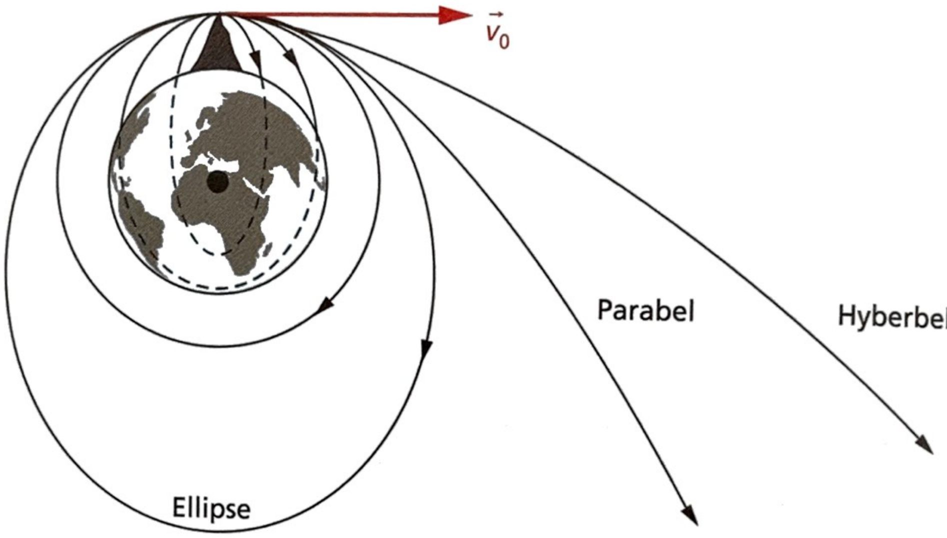
Berechnet man mit der oben genannten Gleichung das Potenzial auf der Erdoberfläche ($M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $r = 6\,371$ km), so erhält man einen Wert von $-6{,}3 \cdot 10^7$ J/kg. Mit Vergrößerung der Entfernung vergrößert sich dieser Wert (↗ Skizze oben).

Die kosmischen Geschwindigkeiten

Die Kenntnis der zum Erreichen einer bestimmten Bahn erforderlichen Geschwindigkeit ist z. B. notwendig, um den genauen Antriebsbedarf ermitteln zu können.

Damit eine von der Oberfläche eines Himmelskörpers gestartete Raumsonde auf eine Umlaufbahn um diesen Himmelskörper gelangt oder den Anziehungsbereich des Himmelskörpers verlassen kann, muss sie auf eine bestimmte Mindestgeschwindigkeit beschleunigt werden.
Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge betrachten wir folgenden vereinfachten Fall: Ein Körper wird von einem hohen Berg aus waagerecht zur Erdoberfläche abgeschossen, wobei die Abschussgeschwindigkeit in weiten Grenzen variiert werden kann.

Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird der Luftwiderstand vernachlässigt. Die Erde wird als ideal kreisförmig angesehen. Die rechts stehende Skizze ist eine Darstellung, die auf **NEWTON** zurückgeht.

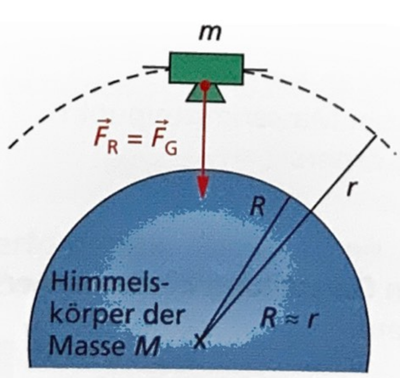


Alle Bahnkurven, die vollständig im Erdfeld verlaufen, sind geschlossen und damit elliptisch oder kreisförmig. Bei kleinen Geschwindigkeiten verläuft die Bewegung natürlich nur bis zur Erdoberfläche.

Ist die Geschwindigkeit gering, dann fällt der Körper auf einer elliptischen Bahn auf die Erdoberfläche.
Bei Vergrößerung der Abschussgeschwindigkeit vergrößert sich die Flugweite immer mehr, bis schließlich der Körper den Zentralkörper (die Erde) auf einer Kreisbahn gerade umläuft.

Die Geschwindigkeit, die ein Satellit haben muss, damit er einen Zentralkörper gerade umläuft, wird als **1. kosmische Geschwindigkeit** oder als **minimale Kreisbahngeschwindigkeit** bezeichnet.

Für andere Himmelskörper ergeben sich für die **1. kosmische Geschwindigkeit** andere Werte. So beträgt sie z. B. für den Erdmond 1,68 $\frac{km}{s}$ und für den Planeten Mars 3,54 $\frac{km}{s}$.



Der Betrag der 1. kosmischen Geschwindigkeit ergibt sich aus folgender Überlegung: Für einen Körper auf einer Kreisbahn ist die Radialkraft gleich der Gravitationskraft:

$$\frac{m \cdot v_K^2}{R} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

und damit:

$$v_K = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}$$

Für eine Kreisbewegung, die gerade um die Erde herum erfolgt, ist R gleich dem Erdradius. Damit erhält man als Betrag der 1. kosmischen Geschwindigkeit für die Erde $v = 7{,}9\ \frac{km}{s}$.

Die 1. kosmische Geschwindigkeit (minimale Kreisbahngeschwindigkeit) kann berechnet werden mit der Gleichung:

$$v_K = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}$$

G Gravitationskonstante
M Masse des Zentralkörpers
R Radius des Zentralkörpers

Wird die waagerechte Abschussgeschwindigkeit eines Körpers über die 1. kosmische Geschwindigkeit hinaus weiter erhöht, dann kann er sich von der Oberfläche des Zentralkörpers entfernen (s. Skizze ↗ S. 130). Es entstehen zunächst elliptische Bahnen, die sich schließlich zur Bahnform der Parabel und weiter zu Hyperbelästen öffnen.

Die Geschwindigkeit, die ein Satellit mindestens haben muss, um das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers zu verlassen, wird als 2. kosmische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) bezeichnet.

▶ Für die Erde erhält man einen Wert von $11{,}2\ \frac{km}{s}$, für den Erdmond $2{,}38\ \frac{km}{s}$ und für den Mars $5{,}00\ \frac{km}{s}$. Zwischen 1. und **2. kosmischer Geschwindigkeit** besteht folgender Zusammenhang: $v_F = \sqrt{2} \cdot v_K$

Der Betrag dieser Geschwindigkeit ergibt sich aus energetischen Betrachtungen. Der Satellit muss beim Start gerade so viel kinetische Energie besitzen, um Hubarbeit bis ins Unendliche verrichten zu können.

Die 2. kosmische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) kann berechnet werden mit der Gleichung:

$$v_F = \sqrt{2G \cdot \frac{M}{R}}$$

G Gravitationskonstante
M Masse des Zentralkörpers
R Radius des Zentralkörpers

In der nachstehenden Übersicht sind die Geschwindigkeiten und die Bahnformen für die Bewegung im Gravitationsfeld der Erde zusammengestellt.

Startgeschwindigkeit	Bahnform	Beispiele
$v < 7{,}9$ km/s	Körper fällt zur Erde zurück.	Rakete bei Ausfall einer Antriebsstufe
$v = 7{,}9$ km/s	Kreisbahn	Satelliten auf niedriger Umlaufbahn
$7{,}9\ \frac{km}{s} < v < 11{,}2\ \frac{km}{s}$	Ellipse	viele Forschungssatelliten
$v = 11{,}2\ \frac{km}{s}$	Parabel	Pioneer-Raumsonden
$v > 11{,}2\ \frac{km}{s}$	Hyperbel	

▶ Zum Verlassen unseres Sonnensystems ist die **3. kosmische Geschwindigkeit** erforderlich, die für die Erde $16{,}7\ \frac{km}{s}$ beträgt. Durch **Swing-by-Manöver**, also der Nutzung von Gravitationskräften von Himmelskörpern, kann die Geschwindigkeit von Raumflugkörpern vergrößert werden.

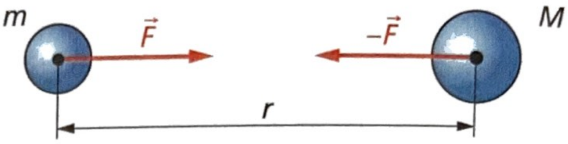
Die Bahn von Raumsonden in größerer Entfernung von der Erde wird maßgeblich durch Gravitationskräfte anderer Himmelskörper beeinflusst.

Gravitation

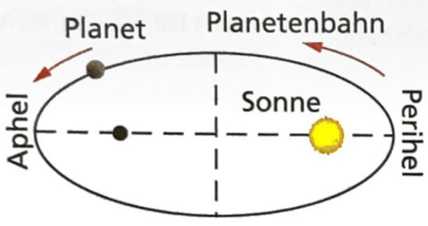
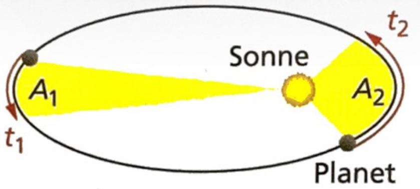
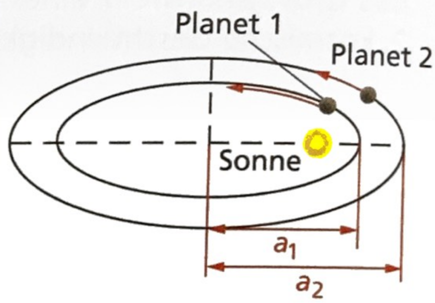
Gravitation bedeutet Massenanziehung. Sie bewirkt, dass sich zwei Körper aufgrund ihrer Masse wechselseitig mit der gleichen Kraft anziehen.

Für den Betrag der Gravitationskraft zwischen zwei Körpern gilt das **Gravitationsgesetz:**

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$



Alle Planeten bewegen sich unter dem Einfluss von Gravitationskräften um die Sonne. Für ihre Bewegung gelten die drei keplerschen Gesetze.

1. keplersches Gesetz	2. keplersches Gesetz	3. keplersches Gesetz
		
Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem gemeinsamen Brennpunkt steht die Sonne.	Die Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. $\frac{A}{t}$ = konstant	Für zwei Planeten 1 und 2 gilt: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

Jeder Körper der Masse M ist von einem **Gravitationsfeld** umgeben. In ihm werden auf andere Körper **Gravitationskräfte** ausgeübt.

Gravitationsfeldstärke

$$g = \frac{F}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Arbeit im Gravitationsfeld

$$W = \Delta E_{pot} = G \cdot m \cdot M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

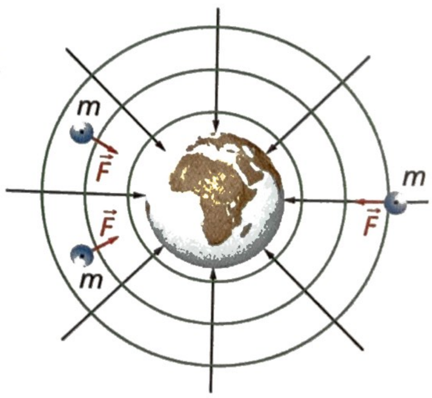
Die Kraft, mit der von einem Zentralkörper der Masse M ein Körper der Masse m angezogen wird, ist gleich der Gravitationskraft zwischen dem Zentralkörper und diesem Körper.

$$F = m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Potenzielle Energie und Potenzial im Gravitationsfeld

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

$$V = \frac{E_{pot}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$



Wissenstest 2.7 abrufbar auf **www.lernhelfer.de** oder mit der Lernhelfer-App