

## Logik

### Übungsblatt 2

Abgabe bis **Sa., 11. 11., 23:59 Uhr** in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 2“, als PDF.  
Bitte nur eine Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

---

1. (25 %) Wende den Polyzeit-Algorithmus aus der Vorlesung an, um die Erfüllbarkeit folgender Horn-Formeln zu entscheiden. Im Fall von Erfüllbarkeit gib ein minimales Modell für die Formel an.

a)  $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge x_1 \wedge \neg x_4 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

b)  $(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge x_2 \wedge (\neg x_1 \vee x_4 \vee \neg x_5)$

2. (30 %) Beweise die folgenden Aussagen:

a)  $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$

b) Wenn  $\varphi \models \psi$  und  $\varphi \models \neg\psi$ , dann ist  $\varphi$  unerfüllbar.

c)  $\varphi \models \psi$  gilt genau dann, wenn  $\varphi \rightarrow \psi$  gültig ist.

d)  $\varphi \models \psi$  gilt genau dann, wenn  $\varphi \wedge \neg\psi$  unerfüllbar ist.

e) Eine DNF-Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Disjunkt ohne Literale der Form  $x, \neg x$  enthält.

*Hinweis:* Verwende die Definition der Begriffe Gültigkeit, Erfüllbarkeit,  $\models$  usw.

3. (25 %)

- a) Berechne  $\text{Res}^*(M)$  für die Klauselmengemenge  $M$ , die der folgenden Formel entspricht:

$$(\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge x_4$$

Ist die Formel erfüllbar?

- b) Gib einen Resolutionsbeweis für die Unerfüllbarkeit der folgenden Formel an:

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge x_5$$

- c) Berechne  $\text{ERes}^*(M)$  für die Klauselmengemenge  $M$ , die der folgenden Horn-Formel entspricht:

$$x_1 \wedge (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_1 \wedge x_4 \rightarrow x_3) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \rightarrow 0) \wedge x_4$$

Ist die Formel erfüllbar?

4. (20 %) Zeige, dass Einheitsresolution nicht vollständig ist, wenn man sie auf *beliebige* Klauselmengen anwendet.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %)

Eine *Dual-Horn-Formel* ist eine KNF-Formel  $\varphi = \bigwedge_i \bigvee_j \ell_{i,j}$ , so dass jede Disjunktion  $\bigvee_j \ell_{i,j}$  höchstens ein *negatives* Literal enthält.

a) Zeige: Erfüllbarkeit für Dual-Horn-Formeln ist in Polynomialzeit lösbar.

b) Ist für Dual-Horn-Formeln auch Gültigkeit in Polynomialzeit lösbar? Begründe kurz.