Theoretische Informatik II

Einheit 7

Elementare Berechenbarkeitstheorie

1. Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit
2. Universelle Maschinen
3. Beweistechniken
4. Grenzen der Berechenbarkeit

Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

- **Was kann überhaupt berechnet werden?**
  - Welche Funktionen sind berechenbar?
  - Welche Programmeigenschaften kann man entscheiden (testen)?

Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

- **Was kann überhaupt berechnet werden?**
  - Welche Funktionen sind berechenbar?
  - Welche Programmeigenschaften kann man entscheiden (testen)?
- **Wie kann man Lösungen wiederverwenden?**
  - Verwendung von Abschlußeigenschaften
  - Transformation in ein anderes Problem (Reduktion)

Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

- **Was kann überhaupt berechnet werden?**
  - Welche Funktionen sind berechenbar?
  - Welche Programmeigenschaften kann man entscheiden (testen)?
- **Wie kann man Lösungen wiederverwenden?**
  - Verwendung von Abschlußeigenschaften
  - Transformation in ein anderes Problem (Reduktion)
- **Wo liegen die Grenzen?**
  - Terminierung, Korrektheit, Äquivalenz, Optimalität von Programmen

Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

- **Was kann überhaupt berechnet werden?**
  - Welche Funktionen sind berechenbar?
  - Welche Programmeigenschaften kann man entscheiden (testen)?
- **Wie kann man Lösungen wiederverwenden?**
  - Verwendung von Abschlußeigenschaften
  - Transformation in ein anderes Problem (Reduktion)
- **Wo liegen die Grenzen?**
  - Terminierung, Korrektheit, Äquivalenz, Optimalität von Programmen
- **Welche Beweistechniken gibt es?**
  - Konstruktion von abstrakten Gegenbeispielen durch Diagonalisierung
  - Problemreduktion
  - Direkte Beweise (Busy Beaver)

Berechenbarkeitstheorie – Vorgehensweise

- **Konzepte modellunabhängig präzisieren**
  - Berechenbare Funktionen
  - (Semi-)entscheidbare und aufzählbare Mengen

Berechenbarkeitstheorie – Vorgehensweise

- **Konzepte modellunabhängig präzisieren**
  - Berechenbare Funktionen
  - (Semi-)entscheidbare und aufzählbare Mengen
- **Grundeigenschaften aus Modellen herleiten**
  - Zusammenhänge zwischen den Konzepten
  - Abschlußeigenschaften
  - Codierung von Programmen als Daten
  - Existenz universeller Funktionen

Berechenbarkeitstheorie – Vorgehensweise

- **Konzepte modellunabhängig präzisieren**
  - Berechenbare Funktionen
  - (Semi-)entscheidbare und aufzählbare Mengen
- **Grundeigenschaften aus Modellen herleiten**
  - Zusammenhänge zwischen den Konzepten
  - Abschlußeigenschaften
  - Codierung von Programmen als Daten
  - Existenz universeller Funktionen
- **Theorie nur auf dieser Basis weiterführen**
  - Hier: die wichtigsten Unmöglichkeitsaussagen

Theoretische Informatik II

Einheit 6.1

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit

1. Präzisierung der Begriffe
2. Zusammenhänge
3. Abschlußeigenschaften

Berechenbarkeit

- **Berechenbarkeit auf Worten**
  - $f{:}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls f Turing-berechenbar Def. E, Kapitel 6

Berechenbarkeit

- **Berechenbarkeit auf Worten**
  - $f{:}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls f Turing-berechenbar $\boxed{\text{Def. E, Kapitel 6}}$
- **Berechenbarkeit auf Wort-Tupeln** $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$
  - $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls $f'{:}(X{\cup}\{\#\})^*{\to}Y^*$ mit $f'(v\#w) = f(v{,}w)$ berechenbar

Berechenbarkeit

- **Berechenbarkeit auf Worten**
  - $f{:}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls f Turing-berechenbar Def. E, Kapitel 6
- **Berechenbarkeit auf Wort-Tupeln $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$**
  - $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls $f'{:}(X{\cup}\{\#\})^*{\to}Y^*$
    mit $f'(v\#w) = f(v,w)$ berechenbar
- **Berechenbarkeit auf Zahlen**
  - $f{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f_r{:}X^*{\to}X^*$
    mit $f_r(w) = r(f(\mathrm{r}^{-1}(w)))$ berechenbar
  - $r{:}\mathbb{N}{\to}X^*$ bijektive Repräsentation von Zahlen als Worte

Berechenbarkeit

- **Berechenbarkeit auf Worten**
  - $f{:}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls f Turing-berechenbar Def. E, Kapitel 6
- **Berechenbarkeit auf Wort-Tupeln $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$**
  - $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls $f'{:}(X{\cup}\{\#\})^*{\to}Y^*$ mit $f'(v\#w) = f(v{,}w)$ berechenbar
- **Berechenbarkeit auf Zahlen**
  - $f{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f_r{:}X^*{\to}X^*$ mit $f_r(w) = r(f(\mathrm{r}^{-1}(w)))$ berechenbar
  - $r{:}\mathbb{N}{\to}X^*$ bijektive Repräsentation von Zahlen als Worte
- **Berechenbarkeit auf Zahlentupeln und -listen**
  - $f{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f'{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ mit $f'\langle x_1, x_2, .., x_k\rangle^k = f(x_1, x_2, .., x_k)$ berechenbar
  - $f{:}\mathbb{N}^*{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f'{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ mit $f'\langle x_1, x_2, .., x_k\rangle^* = f(x_1 x_2 ... x_k)$ berechenbar
  - $\langle\rangle^k{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$, $\langle\rangle^*{:}\mathbb{N}^*{\to}\mathbb{N}$ Standard-Tupelfunktionen Kapitel 6.3

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – intuitiv

- **Entscheidbarkeit einer Menge**
  – Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört oder nicht

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – intuitiv

- **Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört oder nicht
- **Semi-Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört, aber im Mißerfolgsfall eventuell niemals eine Antwort gibt

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – intuitiv

- **Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört oder nicht
- **Semi-Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört, aber im Mißerfolgsfall eventuell niemals eine Antwort gibt
- **Aufzählbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, welche die Elemente der Menge schrittweise generiert, also z.B. bei Eingabe der Zahl n (oder einer Codierung) das n-te Element der Menge ausgibt

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – präzisiert

- $M \subseteq X^*$ **entscheidbar** Definition C
  - $\chi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\chi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – präzisiert

- $M \subseteq X^*$ **entscheidbar** — Definition C
  - $\chi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\chi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **semi-entscheidbar**
  - $\psi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\psi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – präzisiert

- $M \subseteq X^*$ **entscheidbar** Definition C
  - $\chi_M{:}X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\chi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **semi-entscheidbar**
  - $\psi_M{:}X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\psi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **(rekursiv) aufzählbar** Definition A
  - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f{:}\{1\}^* \to X^*$

    mit $M = \text{range}(f) = \{v \in X^* \mid \exists w \in \{1\}^*\ f(w) = v\}$

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – präzisiert

- $M \subseteq X^*$ **entscheidbar** Definition C
  - $\chi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\chi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **semi-entscheidbar**
  - $\psi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\psi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **(rekursiv) aufzählbar** Definition A
  - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to X^*$
    mit $M = \text{range}(f) = \{v \in X^* \mid \exists w \in \{1\}^* \; f(w) = v\}$

- **Berechenbarkeit von Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$**
  - M entscheidbar $\equiv$ $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar
  - M semi-entscheidbar $\equiv$ $\psi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar

    wobei $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ $\qquad \chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - M (rekursiv) aufzählbar $\equiv$ $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $M = \text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} \; f(i) = n\}$

Aufzählbarkeit – Anmerkungen

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, ..., x_n\}$ ist Wertebereich von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

Aufzählbarkeit – Anmerkungen

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, ..., x_n\}$ ist Wertebereich von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar
- **Aufzählungen sind nicht notwendigerweise injektiv**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf

Aufzählbarkeit – Anmerkungen

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, ..., x_n\}$ ist Wertebereich von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar
- **Aufzählungen sind nicht notwendigerweise injektiv**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - Die Funktion h mit $h(n) = 2n+1$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf

Aufzählbarkeit – Anmerkungen

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, ..., x_n\}$ ist Wertebereich von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

- **Aufzählungen sind nicht notwendigerweise injektiv**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf

- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - Die Funktion h mit $h(n) = 2n+1$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf

- **Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen**
  - Aufzählbar — semi-entscheidbar — Typ-0 Sprache
  - Werte- oder Haltebereich einer (evtl. partiellen) berechenbaren Funktion

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. M ist aufzählbar

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **M = range(f) für ein berechenbares $f{:}\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   – $\mathrm{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**

2. **M = range(f) für ein berechenbares $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$**
   – $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\quad f$ nicht notwendigerweise total

3. **$\hat{M}$ ist Typ-0 Sprache**
   – wobei $\hat{M} = \{r(i) \mid i \in M\}$ für eine bijektive Repräsentation $r{:}\mathbb{N}\to X^*$

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**

2. **M = range(f) für ein berechenbares $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$**
   – $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total

3. **$\hat{M}$ ist Typ-0 Sprache**
   – wobei $\hat{M} = \{r(i) \mid i \in M\}$ für eine bijektive Repräsentation $r{:}\mathbb{N}\to X^*$

4. **M ist semi-entscheidbar**

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **M = range(f) für ein berechenbares f:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   – $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\quad f$ nicht notwendigerweise total
3. **$\hat{M}$ ist Typ-0 Sprache**
   – wobei $\hat{M} = \{r(i) \mid i \in M\}$ für eine bijektive Repräsentation $r{:}\mathbb{N} \to X^*$
4. **M ist semi-entscheidbar**
5. **M = domain(f) für ein berechenbares f:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   – $\text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Satz B

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **$M = \mathrm{range}(f)$ für ein berechenbares $f{:}\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$**
   – $\mathrm{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\quad f$ nicht notwendigerweise total
3. **$\hat{M}$ ist Typ-0 Sprache**
   – wobei $\hat{M} = \{r(i) \mid i \in M\}$ für eine bijektive Repräsentation $r{:}\mathbb{N}\rightarrow X^*$
4. **M ist semi-entscheidbar**
5. **$M = \mathrm{domain}(f)$ für ein berechenbares $f{:}\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$**
   – $\mathrm{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Aussage gilt analog für $M \subseteq X^*$, $M \subseteq \mathbb{N}^k$, ...

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \mathrm{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\checkmark$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  – Es sei M aufzählbar
  – Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  – Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M = \emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar Satz Q, Kap. 6

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  – Es sei M aufzählbar
  – Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  – Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  – Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  – Dann ist f Typ-0 berechenbar $\boxed{\text{Satz Q, Kap. 6}}$
  – Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i)=j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar Satz Q, Kap. 6
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i){=}j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar Satz Q, Kap. 6
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i)=j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  - Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \mid j \in M\} = \{r(j) \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar $\boxed{\text{Satz Q, Kap. 6}}$
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i){=}j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  - Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \mid j \in M\} = \{r(j) \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$

- **$\hat{M}$ Typ-0 Sprache $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar $\boxed{\text{Satz Q, Kap. 6}}$
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i){=}j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  - Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \,|\, j \in M\} = \{r(j) \,|\, \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$
- **$\hat{M}$ Typ-0 Sprache $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Unmittelbare Konsequenz von Satz Q, Kapitel 6 $\surd$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar — Satz Q, Kap. 6
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i)=j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  - Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \mid j \in M\} = \{r(j) \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$

- **$\hat{M}$ Typ-0 Sprache $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Unmittelbare Konsequenz von Satz Q, Kapitel 6 $\surd$

- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Dann ist f Typ-0 berechenbar Satz Q, Kap. 6
  - Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i)=j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  - Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  - Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \mid j \in M\} = \{r(j) \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$

- **$\hat{M}$ Typ-0 Sprache $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Unmittelbare Konsequenz von Satz Q, Kapitel 6 $\surd$

- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M semi-entscheidbar.

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  – Es sei M aufzählbar
  – Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  – Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f $\surd$

- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ $\hat{M}$ Typ-0 Sprache**
  – Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  – Dann ist f Typ-0 berechenbar $\boxed{\text{Satz Q, Kap. 6}}$
  – Also $L_f = \{r(i)\#r(j) | f(i){=}j\}$ Typ-0 Sprache, d.h. $L_f = L(G)$ für ein G
  – Erweitere G zu Grammatik G', die zum Schluß alle Anteile $v\#$ entfernt
  – Dann ist $\hat{M} = \{r(j) \mid j \in M\} = \{r(j) \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i)(=)j\} = L(G')$ $\surd$

- **$\hat{M}$ Typ-0 Sprache $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  – Unmittelbare Konsequenz von Satz Q, Kapitel 6 $\surd$

- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  – Es sei M semi-entscheidbar.
  – Dann ist ψ_M berechenbar und $M=\{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$ $\surd$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\checkmark$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\checkmark$
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\checkmark$
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit $M = \text{range}(h_{\tau'})$
    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  – Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  – Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\checkmark$
  – Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  – Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit $M = \text{range}(h_{\tau'})$
  Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt
  1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ aufzählbar**
  - Es sei $M = \mathrm{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit M=range($h_{\tau'}$)

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte
       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\surd$
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit $M = \text{range}(h_{\tau'})$

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte

       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)
    3. Falls τ in j Schritten anhält, gebe i aus. Andernfalls gebe n_0 aus

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit M=range($h_{\tau'}$)

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte

       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)
    3. Falls τ in j Schritten anhält, gebe i aus. Andernfalls gebe n_0 aus
  - τ' hält auf jeder Eingabe, also ist $h_{\tau'}$ total

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit $M = \text{range}(h_{\tau'})$

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte

       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)
    3. Falls τ in j Schritten anhält, gebe i aus. Andernfalls gebe n_0 aus
  - τ' hält auf jeder Eingabe, also ist $h_{\tau'}$ total
  - $M \subseteq \text{range}(h_{\tau'})$: Sei $i \in M$. Dann gibt es ein j so daß τ nach j Schritten hält.

    Damit $h_{\tau'}(\langle i, j \rangle) = i$, also $i \in \text{range}(h_{\tau'})$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\surd$
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit M=range($h_{\tau'}$)

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt

    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j\rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte

       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)
    3. Falls τ in j Schritten anhält, gebe i aus. Andernfalls gebe n_0 aus
  - τ' hält auf jeder Eingabe, also ist $h_{\tau'}$ total
  - $M \subseteq \text{range}(h_{\tau'})$: Sei $i \in M$. Dann gibt es ein j so daß τ nach j Schritten hält.

    Damit $h_{\tau'}(\langle i, j\rangle) = i$, also $i \in \text{range}(h_{\tau'})$
  - $M \supseteq \text{range}(h_{\tau'})$: Sei $i \in \text{range}(h_{\tau'})$. Falls $i = n_0$ dann $i \in M$ nach Voraussetzung.

    Andernfalls gibt es ein j so daß τ nach j Schritten hält.

    Also $i \in \text{domain}(h_\tau) = M$. $\surd$

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei $f\text{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **total berechenbar,** $g\text{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **berechenbar**

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j
- **range(f) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N}\, f(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j
- **range(f) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2
- **range(g) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j
- **range(f) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2
- **range(g) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2
- **graph(g) $= \{(i,j) \mid g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $g(i)$ (hält nicht immer) und vergleiche

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j
- **range(f) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N}\, f(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2
- **range(g) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N}\, g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #2
- **graph(g) $= \{(i,j) \mid g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  – Bei Eingabe (i,j) berechne $g(i)$ (hält nicht immer) und vergleiche
- **domain(g) $= \{i \mid g(i)\text{hält}\}$ ist aufzählbar**
  – Charakterisierung #5

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$$\boldsymbol{M \subseteq \mathbb{N}} \textbf{ entscheidbar } \Leftrightarrow \boldsymbol{M} \textbf{ und } \overline{\boldsymbol{M}} \textbf{ aufzählbar} \qquad \boxed{\textsf{Satz D}}$$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar.

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$$M \subseteq \mathbb{N} \textbf{ entscheidbar } \Leftrightarrow M \textbf{ und } \overline{M} \textbf{ aufzählbar}$$ Satz D

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}{\rightarrow}\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\checkmark$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar Satz D

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\surd$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar Satz D

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M=\emptyset$ oder $\overline{M}=\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\surd$

Andernfalls $M=\text{range}(f)$ und $\overline{M}=\text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar.

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n){=}0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\checkmark$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\checkmark$

Andernfalls $M{=}\text{range}(f)$ und $\overline{M}{=}\text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar.

Wir konstruieren eine Turingmaschine τ mit $\chi_M{=}h_\tau$

– Bei Eingabe von n berechne $j = \min\{i \mid f(i){=}n \vee f(i){=}n\}$

– Falls $f(j){=}n$, gebe 1 aus, ansonsten 0

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M\subseteq\mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\checkmark$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\checkmark$

Andernfalls $M{=}\mathrm{range}(f)$ und $\overline{M}{=}\mathrm{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar.

Wir konstruieren eine Turingmaschine τ mit $\chi_M{=}h_\tau$

– Bei Eingabe von n berechne $j = \min\{i \mid f(i){=}n \lor f(i){=}n\}$

– Falls $f(j){=}n$, gebe 1 aus, ansonsten 0

τ hält für jedes n, da $n\in\mathrm{range}(f)$ oder $n\in\mathrm{range}(g)$ $(n\in M \;/\; n\notin M)$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar $\boxed{\text{Satz D}}$

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\checkmark$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M=\emptyset$ oder $\overline{M}=\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\checkmark$

Andernfalls $M=\text{range}(f)$ und $\overline{M}=\text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar.

Wir konstruieren eine Turingmaschine τ mit $\chi_M = h_\tau$

– Bei Eingabe von n berechne $j = \min\{i \mid f(i)=n \vee f(i)=n\}$

– Falls $f(j)=n$, gebe 1 aus, ansonsten 0

τ hält für jedes n, da $n \in \text{range}(f)$ oder $n \in \text{range}(g)$ $(n \in M \;/\; n \notin M)$

Für $n \in M$ gilt $f(j)=n$ für ein j, also $h_\tau(n)=1$, ansonsten $h_\tau(n)=0$ $\checkmark$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  – Die Umkehrung gilt nicht   (Beispiel folgt später)

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  – Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar $\surd$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  – Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)

- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  – Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$,
  – χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar √

- **$M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M'{\subseteq}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}$**
  mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **$M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$**

$\Rightarrow$: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \lor \ldots \lor n{=}x_n \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar $\checkmark$
- $\boldsymbol{M \subseteq \mathbb{N}}$ **aufzählbar** $\Leftrightarrow$ **es gibt ein entscheidbares** $\boldsymbol{M' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$
  mit $\boldsymbol{M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}}$

$\Rightarrow$: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \emptyset\}$ $\checkmark$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  – Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)

- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  – Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  – χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓

- **$M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M'{\subseteq}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}$ mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$**

  $\Rightarrow$: Es sei $M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar
  – Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \emptyset\}$ ✓
  – Andernfalls ist $M{=}\mathrm{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\mathrm{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \mathrm{graph}(f)\}$ ✓

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar $\checkmark$
- **$M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M'{\subseteq}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}$ mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$**

  $\Rightarrow$: Es sei $M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \emptyset\}$ $\checkmark$
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \text{graph}(f)\}$ $\checkmark$

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$ für ein entscheidbares M'

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)

- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \;, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓

- **$M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M'{\subseteq}\mathbb{N}{\times}\mathbb{N}$**
  mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$

  $\Rightarrow$: Es sei $M{\subseteq}\mathbb{N}$ aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n, y) \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\ (\min\{n \in \mathbb{N} \mid (n, y) \in M'\})$
    $= \text{sign}\ (\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}(n, y){=}1\})$ ✓

Abschlusseigenschaften

Satz E

Sei M, $M' \subseteq X^*$, f berechenbar und total, g berechenbar

Abschlusseigenschaften

Satz E

Sei M, $M' \subseteq X^*$, f berechenbar und total, g berechenbar

- **Sind M, M' aufzählbar, dann auch**
  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \circ M'$, M^*, $g(M)$, $g^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Konkatenationsabschluß, Urbild

  Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

Abschlusseigenschaften

Satz E

Sei M, $M' \subseteq X^*$, f berechenbar und total, g berechenbar

- **Sind M, M' aufzählbar, dann auch**
  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \circ M'$, M^*, $g(M)$, $g^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Konkatenationsabschluß, Urbild

  Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

- **Sind M, M' entscheidbar, dann auch**
  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \setminus M'$, $\overline{M}$, $M \circ M'$, M^*, $f^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement, Konkatenation, -abschluß, Urbild

$\overline{M} = \{w \in X^* \mid w \notin M\}$ $\quad M \circ M' = \{wv \mid w \in M \wedge v \in M'\}$ $\quad M^* = \{w_1..w_n \mid w_i \in M\}$

$f^{-1}(M) = \{w \in X^* \mid f(w) \in M\}$ $\quad f(M) = \{f(w) \mid w \in M\}$

Abschlusseigenschaften

Satz E

Sei M, $M' \subseteq X^*$, f berechenbar und total, g berechenbar

- **Sind M, M' aufzählbar, dann auch**

  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \circ M'$, M^*, $g(M)$, $g^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Konkatenationsabschluß, Urbild

  Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

- **Sind M, M' entscheidbar, dann auch**

  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \setminus M'$, $\overline{M}$, $M \circ M'$, M^*, $f^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement, Konkatenation, -abschluß, Urbild

Aussage gilt analog für Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, ...

$\overline{M} = \{w \in X^* \mid w \notin M\}$ $\quad M \circ M' = \{wv \mid w \in M \wedge v \in M'\}$ $\quad M^* = \{w_1..w_n \mid w_i \in M\}$

$f^{-1}(M) = \{w \in X^* \mid f(w) \in M\}$ $\quad f(M) = \{f(w) \mid w \in M\}$

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

  $\boldsymbol{M \cup M'}$:

  $\boldsymbol{M \cap M'}$:

  $\boldsymbol{M \circ M'}$:

  $\boldsymbol{M^*}$:

  $\boldsymbol{g(M)}$:

  $\boldsymbol{g^{-1}(M)}$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$:

$M \circ M'$:

M^*:

$g(M)$:

$g^{-1}(M)$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$: $\psi_{M \bigcap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M \circ M'$:

M^*:

$g(M)$:

$g^{-1}(M)$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$: $\psi_{M \cap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M \circ M'$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

M^*:

$g(M)$:

$g^{-1}(M)$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$: $\psi_{M \bigcap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M \circ M'$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

M^*: Für $h(w_1\# \ldots \#w_n) = f(w_1) \circ \ldots \circ f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

$g(M)$:

$g^{-1}(M)$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$: $\psi_{M \bigcap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M \circ M'$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

M^*: Für $h(w_1\# \ldots \#w_n) = f(w_1) \circ \ldots \circ f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

$g(M)$: Für $h(w) = g(f(w))$ ist $\text{range}(h) = g(M)$

$g^{-1}(M)$:

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

$M \cap M'$: $\psi_{M \bigcap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M \circ M'$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

M^*: Für $h(w_1\#\ldots\#w_n) = f(w_1) \circ \ldots \circ f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

$g(M)$: Für $h(w) = g(f(w))$ ist $\text{range}(h) = g(M)$

$g^{-1}(M)$: $\psi_{g^{-1}(M)}(w) = \psi_M(g(w))$

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

$M{\cup}M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M{\cup}M'$

$M{\cap}M'$: $\psi_{M\bigcap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

$M{\circ}M'$: Für $h(w\#v) = f(w){\circ}f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M{\circ}M'$

M^*: Für $h(w_1\#\ldots\#w_n) = f(w_1){\circ}\ldots{\circ}f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

$g(M)$: Für $h(w) = g(f(w))$ ist $\text{range}(h) = g(M)$

$g^{-1}(M)$: $\psi_{g^{-1}(M)}(w) = \psi_M(g(w))$

Details in Übungen präzisieren

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

  $M \cup M'$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

  $M \cap M'$: $\psi_{M \cap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

  $M \circ M'$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

  M^*: Für $h(w_1\#\ldots\#w_n) = f(w_1) \circ \ldots \circ f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

  $g(M)$: Für $h(w) = g(f(w))$ ist $\text{range}(h) = g(M)$

  $g^{-1}(M)$: $\psi_{g^{-1}(M)}(w) = \psi_M(g(w))$

  Details in Übungen präzisieren

- Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\bar{\ }$, $\circ$, *, f^{-1}

  Beweis in Übungen