Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2004

Blatt 9 (Version 1) — Abgabetermin: 07.01.2005, 10:00 Uhr

Quiz 9

[ ] Eine Grammatik ist genau dann kontextfrei, wenn die linke Seite jeder Regel nur aus einem Nichtterminalsymbol besteht.

[ ] Jedes Wort, das aus einer kontextfreien Grammatik abgeleitet werden kann, entspricht genau einem Ableitungsbaum über dieser Grammatik.

[ ] Wenn L eine reguläre (kontextfreie) Sprache ist, dann ist auch jede echte Teilmenge von L eine reguläre (kontextfreie) Sprache.

[ ] Es gibt kontextfreie Sprachen, für die keine eindeutige Grammatik existiert.

Aufgabe 9.1

Sei L die Menge der aussagenlogischen Formeln über den Terminalsymbolen $T = \{A, B, C, a, b, c, (,), \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$, wobei Aussagenvariablen mit einem Großbuchstaben (A, B oder C) beginnen, dem Kleinbuchstaben (a, b oder c) folgen können. Beispielsweise ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(Ca \vee Cb)$ eine gültige Formel, $(X \wedge \wedge\ B)\neg \vee C$ dagegen nicht.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik an, die genau die gültigen aussagenlogischen Formeln über T erzeugt (da die Grammatik möglichst einfach sein soll, wird sie wahrscheinlich mehrdeutig sein).
2. Geben Sie eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung für den Ausdruck

   $$A \wedge (A \Rightarrow Bac) \vee C \Rightarrow \neg C \Rightarrow Bac$$

   an. Geben Sie für eine der Ableitungen einen Ableitungsbaum an.
3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik für L an, welche die üblichen Vorrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$; $\wedge$ und $\vee$ sind linksassoziativ, $\Rightarrow$ ist rechtsassoziativ).

Aufgabe 9.2

Sei $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to aSbS, S \to \varepsilon\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist. Geben Sie dazu für die Zeichenkette $aab \in L(G)$ zwei verschiedene Ableitunsbäume, zwei verschiedene linksseitige Ableitungen und zwei verschiedene rechtsseitige Ableitungen an.
2. Beschreiben Sie, welche Sprache G erzeugt.
3. Geben Sie eine eindeutige Grammatik an, welche die Sprache $L(G)$ erzeugt.

Aufgabe 9.3

Gegeben ist die kontrextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln enthält: $S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$.

1. Beweisen Sie durch Induktion über die Wortlänge, dass kein Wort aus $L(G)$ das Teilwort ba enthält.
2. Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ informell. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 9.4

Gegeben sind die folgenden Grammatiken $G_i = (\{A, B, C, S\}, \{a, b\}, P_i, S)$ mit den Regeln

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \{S \to aAbB, A \to CaAb, B \to \varepsilon, C \to \varepsilon\} \\
P_2 &= \{S \to aa \mid bb \mid aAa \mid bAb \mid \varepsilon, A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb\} \\
P_3 &= \{S \to AaB \mid B \mid \varepsilon, aB \to b \mid bb \mid \varepsilon, B \to bb \mid Bbb, A \to a \mid \varepsilon\} \\
P_4 &= \{S \to \varepsilon \mid aS \mid bA, A \to \varepsilon \mid Ab\}
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie die erzeugten Sprachen $L(G_1), \ldots, L(G_4)$.

Hausaufgabe 9.5

Sei L die Menge der regulären Ausdrücke über den Terminalsymbolen $T = \{a, b, (,), +, ^*, \emptyset, e\}$. Dabei sollen a und b die einzigen Zeichen sein, die von regulären Ausdrücken in L erzeugt werden können. Um Verwechslungen vorzubeugen, wird in L das leere Wort durch e statt durch ε dargestellt. Ein gültiger regulärer Ausdruck aus L ist zum Beispiel $(a + b + e)^*ab$.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik an, die genau die gültigen regulären Ausdrücke über T (d.h. die regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\{a, b\}$) erzeugt (da die Grammatik möglichst einfach sein soll, wird sie wahrscheinlich mehrdeutig sein).
2. Geben Sie eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung für den Ausdruck $a(a + b)^*ba$ an. Geben Sie für eine der Ableitungen einen Ableitungsbaum an.
3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik für L an, welche die üblichen Vorrrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgen *, Verkettung und $+$; Verkettung und $+$ sind beide linksassoziativ).

Hausaufgabe 9.6

Beweisen Sie, dass die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to aSbS, S \to \varepsilon\}, S)$ genau die Zeichenketten aus den Symbolen a und b erzeugt, für die jedes Präfix mindestens so viele a's wie b's enthält.