Übung zur Vorlesung

# Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2005

**Blatt 9 (Version 1) — Abgabetermin: 09.01.2006, 11.00 Uhr**

---

## Quiz 9

Markieren Sie die folgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die von einer kontextfreien Grammatik $G = (V, T, P, S)$ erzeugte Sprache ist die Menge der Wörter über $T$, die in endlich vielen Schritten aus dem Startsymbol von $G$ abgeleitet werden können.

[ ] Jedes Wort, das aus einer kontextfreien Grammatik abgeleitet werden kann, entspricht genau einem Ableitungsbaum über dieser Grammatik.

[ ] Wenn $L$ eine reguläre (kontextfreie) Sprache ist, dann ist auch jede echte Teilmenge von $L$ eine reguläre (kontextfreie) Sprache.

[ ] Es gibt kontextfreie Sprachen, für die keine eindeutige Grammatik existiert.

## Aufgabe 9.1

Gegeben sind die folgenden Grammatiken $G_i = (\{A, B, C, S\}, \{a, b\}, P_i, S)$ mit den Regeln

$$P_1 = \{S \to aAbB, A \to CaAb, B \to \varepsilon, C \to \varepsilon\}$$
$$P_2 = \{S \to aa \mid bb \mid aAa \mid bAb \mid \varepsilon, A \to aAa \mid bAb \mid aa \mid bb\}$$
$$P_3 = \{S \to AaB \mid B \mid \varepsilon, aB \to b \mid bb \mid \varepsilon, B \to bb \mid Bbb, A \to a \mid \varepsilon\}$$
$$P_4 = \{S \to \varepsilon \mid aS \mid bA, A \to \varepsilon \mid Ab\}$$

Bestimmen Sie die erzeugten Sprachen $L(G_1), \dots, L(G_4)$.

## Aufgabe 9.2

Sei $L$ die Menge der regulären Ausdrücke über den Terminalsymbolen $T = \{a, b, (, ), +, ^*, \emptyset, e\}$. Dabei sollen $a$ und $b$ die einzigen Zeichen sein, die von regulären Ausdrücken in $L$ erzeugt werden können. Um Verwechslungen vorzubeugen, wird in $L$ das leere Wort durch $e$ statt durch $\varepsilon$ dargestellt. Ein wohlgeformter regulärer Ausdruck aus $L$ ist zum Beispiel $(a + b + e)^*ab$.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik an, die genau die regulären Ausdrücke über $T$ (d.h. die regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\{a, b\}$) erzeugt (da die Grammatik möglichst einfach sein soll, wird sie wahrscheinlich mehrdeutig sein).

2. Geben Sie eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung für den Ausdruck $a(a + b)^*ba$ an. Geben Sie für eine der Ableitungen einen Ableitungsbaum an.

3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik für $L$ an, welche die üblichen Vorrrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgen $^*$, Verkettung und $+$; Verkettung und $+$ sind beide linksassoziativ).

## Aufgabe 9.3

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{0^n 1^{n+1} 0^{2m} 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$ kontextfrei ist. Konstruieren Sie dazu eine kontextfreie Grammatik $G$, welche die Sprache $L$ erzeugt und begründen Sie Ihre Konstruktion.

---

## Hausaufgabe 9.4

Sei $L$ die Menge der aussagenlogischen Formeln über den Terminalsymbolen $T = \{A, B, C, a, b, c, (, ), \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$, wobei Aussagenvariablen mit einem Großbuchstaben ($A$, $B$ oder $C$) beginnen, dem Kleinbuchstaben ($a$, $b$ oder $c$) folgen können. Beispielsweise ist $(\neg\neg A \wedge (B)) \Rightarrow \neg(Cab \vee Cbb)$ eine wohlgeformte Formel, $(X \wedge \wedge B)\neg \vee C$ dagegen nicht.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik an, die genau die aussagenlogischen Formeln über $T$ erzeugt (da die Grammatik möglichst einfach sein soll, wird sie wahrscheinlich mehrdeutig sein).

2. Geben Sie eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung für den Ausdruck

   $$A \wedge (A \Rightarrow Bac) \vee C \Rightarrow \neg C \Rightarrow Bac$$

   an. Geben Sie für eine der Ableitungen einen Ableitungsbaum an.

3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik für $L$ an, welche die üblichen Vorrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$; $\wedge$ und $\vee$ sind linksassoziativ, $\Rightarrow$ ist rechtsassoziativ).

## Hausaufgabe 9.5

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei $P$ die folgenden Regeln enthält: $S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$.

1. Beweisen Sie durch Induktion über die Wortlänge, dass kein Wort aus $L(G)$ das Teilwort $ba$ enthält.

2. Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ informell. Begründen Sie Ihre Antwort.

## Hausaufgabe 9.6

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{\mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$ kontextfrei ist. Konstruieren Sie dazu eine kontextfreie Grammatik $G$, welche die Sprache $L$ erzeugt und begründen Sie Ihre Konstruktion.