Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Martin Gebser

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2005

Blatt 6 — Abgabetermin: Freitag, 27. Mai 2005, 12:00 Uhr

Quiz

	Antwort:
1. Eine Menge ist entscheidbar, wenn ihr Komplement entscheidbar ist.	**richtig falsch**
2. Die Menge aller berechenbaren Funktionen, die bei Eingabe ihres eigenen Index terminieren, ist unentscheidbar.	**richtig falsch**
3. Die Menge aller berechenbaren und überall terminierenden Funktionen ist aufzählbar aber nicht entscheidbar.	**richtig falsch**
4. Jede entscheidbare Menge ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.	**richtig falsch**
5. Der Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion ist entscheidbar.	**richtig falsch**
6. Jede Teilmenge einer entscheidbaren Menge ist entscheidbar.	**richtig falsch**
7. Das Beweisverfahren der Diagonalisierung wird verwendet, um für unendliche Mengen die Existenz von Elementen zu zeigen, die in keiner Abzählung vorkommen.	**richtig falsch**

Aufgabe 6.1 (Einstellige Formulierung von Problemen)

In Einheit 4.2 haben wir gezeigt, daß mithilfe der Standard-Tupelfunktion jede berechenbare Funktion einstellig simuliert werden kann.

6.1–a Zeigen Sie, daß dies auch für entscheidbare und aufzählbare Mengen gilt, d.h. daß für jede Menge $M\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gilt
- M ist genau dann entscheidbar, wenn $M' = \{\langle i,j\rangle | (i,j) \in M\}\subseteq\mathbb{N}$ entscheidbar ist
- M ist genau dann aufzählbar, wenn $M' = \{\langle i,j\rangle | (i,j) \in M\}\subseteq\mathbb{N}$ aufzählbar ist

6.1–b Geben Sie entsprechende “einstellige Formulierungen” für (1) das Axiom der Entscheidbarkeit der Rechenzeit, (2) das UTM Theorem und (3) das Halteproblem.

Aufgabe 6.2 (Abschlußeigenschaften)

Seien M_1 und M_2 beliebige entscheidbare Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine beliebige total berechenbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

6.2–a $M_1\cup M_2$ ist entscheidbar.

6.2–b $M_1\cap M_2$ ist entscheidbar.

6.2–c M_1-M_2 ist entscheidbar.

6.2–d $f^{-1}(M_1) = \{n \mid f(n) \in M_1\}$ ist entscheidbar.

6.2–e $f(M_1) = \{f(n) | n \in M_1\}$ ist entscheidbar.

Für einen Beweis ist die charakteristische Funktion explizit als berechenbar nachzuweisen. Für eine Widerlegung ist ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

Aufgabe 6.3 (Diagonalisierung)

Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.
Hinweis: Sie können sich auf eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränken.

Hausaufgaben

Aufgabe 6.4 (Entscheidbarkeit)

Es sei f:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ eine streng monotone, total berechenbare Funktion. Zeigen Sie, daß $range(f)$, das Bild von f, entscheidbar ist.

Aufgabe 6.5 (Problemreduktion als Ordnungsrelation)

Die Reduzierbarkeit von Problemen bzw. Mengen ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Nachweis von Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit oder Unlösbarkeit.

> Für Probleme $P, P'\subseteq\mathbb{N}$ definieren wir $P'\leq P$ ("P' ist reduzierbar auf P") , falls $P' = f^{-1}(P)$ $(= \{x \mid f(x) \in P\})$ für eine totale berechenbare Funktion f gilt.

Die Schreibweise der Reduktion als $\leq$-Relation legt es nahe, daß es sich um eine Ordnungsrelation handelt. Das ist aber gemogelt: die Antisymmetrie gilt nicht.

Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Antisymmetrie der Reduktionsrelation und zeigen Sie, daß die beiden anderen Eigenschaften einer Ordnungsrelation für die Reduktion gelten.

Aufgabe 6.6 (Diagonalisierung)

Die Menge RG_φ sei definiert durch $RG_\varphi = \{(i, y) \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ \varphi_i(n) = y\}$. Zeigen Sie:

6.6–a RG_φ ist aufzählbar

6.6–b RG_φ ist nicht entscheidbar