Inferenzmethoden

Einheit 15

Konstruktive Logik

1. Unterschiede zur klassischen Logik
2. Erweiterung des Extensionsverfahrens
3. Präfixunifikation

Intuitionistische Logik

- **Logik des Rechnens**
  – Unterstützt Repräsentation und Ausführung von Algorithmen
- **Konstruktiver Begriff von Beweisbarkeit**
  – F ist gültig, wenn ein expliziter Nachweis konstruiert werden kann
  Der Aussschluß des Gegenteils (F kann nicht falsch sein) reicht nicht
  – Führt zu anderer Interpretation von $\vee$, $\Rightarrow$, $\exists$, $\neg$
- **Beweise haben größere Aussagekraft**
  – Jede intuitionistisch gültige Formel ist auch klassisch gültig
  – Umkehrung gilt nicht: $\boldsymbol{P \vee \neg P}$ **ist kein Theorem**
- **Klassische Logik kann eingebettet werden**
  – Gödel-Transformation τ: F klassisch gültig gdw. $\tau(F)$ intuitionistisch gültig
  – Umkehrung benötigt aufwendigen Umweg über Modallogiken
- **Mögliche Beweisverfahren**
  – (Interaktive gesteuerte) Sequenzenkalküle
  – Klassisches Extensionsverfahren für transformierte Formel
  – Modifiziertes Extensionsverfahren mit “konstruktiver Zusatzinformation”

Intuitionistischer Sequenzenkalkül $\mathcal{LJ}$
Sequenzenbeweise ohne Alternativen im Sukzedent

Bedingung modifiziert klassischen Kalkül $\mathcal{LK}$

axiom $\dfrac{}{A \vdash A}$

$\neg$–R $\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$

$\neg$–L $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}$

$\wedge$–R $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$

$\wedge$–L $\dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$

$\vee$–R $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$

$\vee$–L $\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$

$\Rightarrow$–R $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$

$\Rightarrow$–L $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash C}$

$\forall$–R $\dfrac{\Gamma \vdash A[a/x]}{\Gamma \vdash \forall x\, A}$ *

$\forall$–L $\dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash C}{\Gamma, \forall x\, A \vdash C}$

$\exists$–R $\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}$

$\exists$–L $\dfrac{\Gamma, A[a/x] \vdash C}{\Gamma, \exists x\, A \vdash C}$ *

---

*: *Eigenvariablenbedingung:* $a \in \mathcal{V}$ *"unabhängig"*

Konstruktive Beweise sind komplizierter

- **Nicht jede klassisch gültige Formel ist beweisbar**
  - $A \vee \neg A$: Klassischer Beweis: *axiom, ¬-R, ∨-R, Tausch-R, ∨-R, Kontraktion-R*
  - $\neg\neg A \Rightarrow A$: Klassischer Beweis: *axiom, ¬-R, ¬-L*

    Intuitionistisch ist $\neg$-R nur anwendbar auf Sequenzen der Form $A \vdash \bot$

    Aus $A \vdash A$ kann kein Sukzedent $\neg A$ erzeugt werden
  - Regeln wie $\neg A \vee B \;\Leftrightarrow\; A \Rightarrow B$ gelten nicht

    Klassische Normalformen (DNF, KNF) sind nicht gültig

- **Viele klassische Beweise sind nicht konstruktiv**
  - Beweis führt nicht zum Ziel, auch wenn Formel intuitionistisch gültig ist
  - Ein anderer Beweisansatz muß gewählt werden

- **Klassische Beweis erscheinen flexibler**
  - Klassische Beweise dürfen mitten im Beweis ihr Ziel ändern
  - Konstruktive Beweise müssen sich auf eine Zielaussage konzentrieren

$(S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$

Klassischer Beweis

$\boxed{P \vdash P}$ $\quad \neg\!-\!L$

$P, \neg P \vdash \bot$ $\quad \neg\!-\!R$ $\qquad\qquad$ $\boxed{P \vdash P}$ $\quad \neg\!-\!L$

Thin $\quad \boxed{S \vdash S}$ $\quad P \vdash \neg\neg P$ $\quad$ *Thin* $\qquad \Rightarrow\!-\!L$ $\quad \boxed{T \vdash T}$ $\quad \boxed{R \vdash R}$ $\qquad P, \neg P \vdash \bot$ $\quad \neg\!-\!R$

$\wedge\!-\!R$ $\quad S, P \vdash S$ $\quad S, P \vdash \neg\neg P$ $\qquad \Rightarrow\!-\!R$ $\quad T \Rightarrow R, T \vdash R$ $\qquad$ *Thin* $\quad \boxed{S \vdash S}$ $\quad P \vdash \neg\neg P$ $\quad$ *Thin*

Thin $\quad S, P \vdash S \wedge \neg\neg P$ $\qquad \neg\!-\!R$ $\quad T \Rightarrow R \vdash T \Rightarrow R$ $\qquad S, P \vdash S$ $\quad S, P \vdash \neg\neg P$ $\quad \wedge\!-\!R$

$\Rightarrow\!-\!R$ $\quad S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P, P \vdash S \wedge \neg\neg P, Q$ $\qquad \vdash T \Rightarrow R, \neg(T \Rightarrow R)$ $\qquad S, P \vdash S \wedge \neg\neg P$ $\quad \Rightarrow\!-\!L$

$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash S \wedge \neg\neg P, P \Rightarrow Q$ $\qquad S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash S \wedge \neg\neg P, T \Rightarrow R$ $\quad \wedge\!-\!R$

$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash S \wedge \neg\neg P, (P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)$ $\quad \neg\!-\!L$

$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P, \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \vdash S \wedge \neg\neg P$ $\quad \wedge\!-\!L^*$

$S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P), \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \vdash S \wedge \neg\neg P$ $\quad \Rightarrow\!-\!R$

$S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P) \vdash \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P)$ $\quad \Rightarrow\!-\!R$

$\vdash (S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$

*(Die *-Version einer $\wedge/\vee$-Regel faßt die zwei Regeln zu einer zusammen durch Verwendung von Kontraktion (Kopie))*

$(S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$
Intuitionistischer Beweisansatz (analytisch)

$$\Rightarrow\!-R \;\; ???????????$$

$$???????????\qquad \neg\!-R \quad T \Rightarrow R \vdash \bot \qquad ??????????? \qquad \wedge\!-R$$

$$\Rightarrow\!-R \quad S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P, P \vdash Q \qquad \vdash \neg(T \Rightarrow R) \qquad S, P \vdash T \Rightarrow R \qquad \Rightarrow\!-L \text{ !!}$$

$$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash P \Rightarrow Q \qquad S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash T \Rightarrow R \qquad \wedge\!-R$$

$$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P \vdash (P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R) \qquad \neg\!-L \text{ !!}$$

$$S, \neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P, \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \vdash S \wedge \neg\neg P \qquad \wedge\!-L^*$$

$$S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P), \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \vdash S \wedge \neg\neg P \qquad \Rightarrow\!-R$$

$$S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P) \vdash \neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P) \qquad \Rightarrow\!-R$$

$$\vdash (S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$$

- **$\neg\!-\!L$ und $\Rightarrow\!-\!L$ zerstören Formeln im Sukzedent**
  - Einige der nachfolgenden Regeln sind nicht mehr anwendbar
  - Klassischer Beweis ist intuitionistisch nicht durchführbar
- **Andere Beweisreihenfolge führt zum Erfolg**
  - Und ist auch klassisch gültig
- **Intuitionistischer Kalkül ist nicht konfluent**
  - Reihenfolge der Regelanwendungen wichtig
- **Intuitionistisches Extensionsverfahren wird aufwendiger**
  - Reihenfolge von Regelanwendungen in verdichteter Form zu codieren

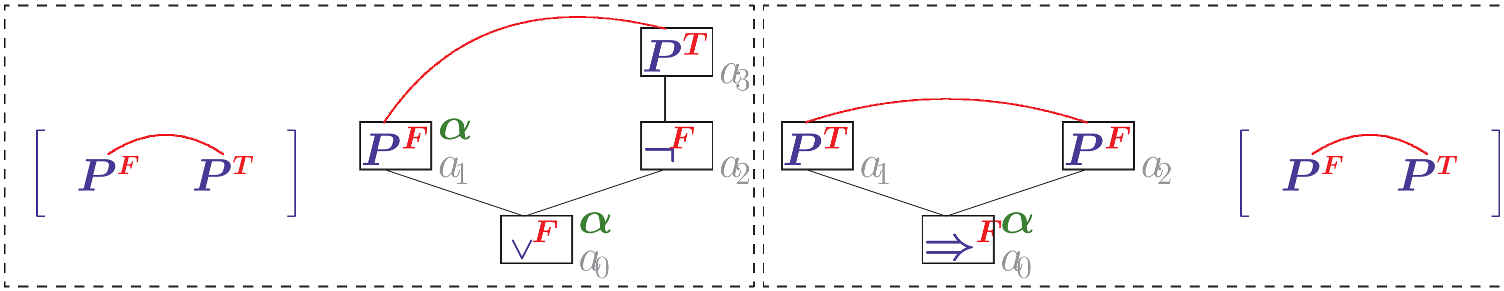
Intuitionistisches Extensionsverfahren

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - ***F*** **ist gültig gdw. alle Pfade durch *F* komplementär**
  - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich
  - Erweiterter Komplementaritätsbegriff erforderlich
    - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
    - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge

- **Erweitere Beweissuchverfahren**
  - Konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
    - Uniformes Verfahren für Nichtnormalform-Matrizen
  - Erweiterter Komplementaritätstest
    - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ-Variablen durch Terme
    - Präfixunifikation liefert Substitution σ_J für "Präfixe" einer Positionen

    Substitutionen codieren Einschränkungen an Reihenfolge der Regeln

Codierung von Regelanwendungen durch Präfixe

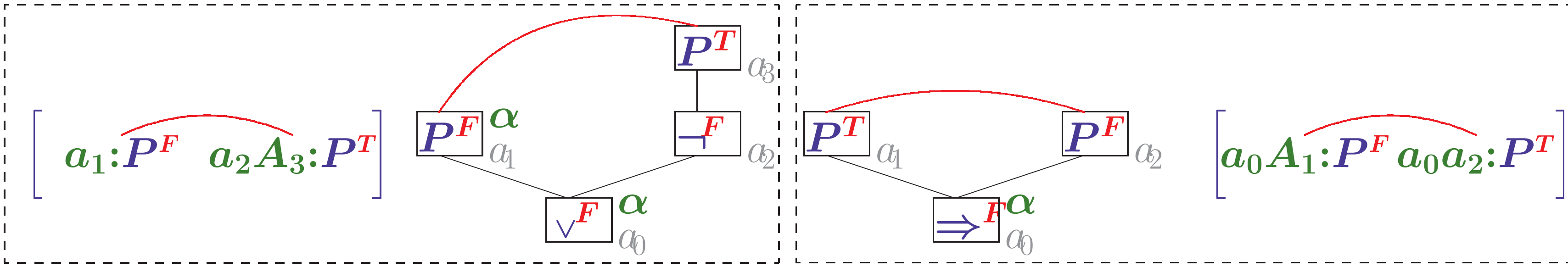


$P \vee \neg P$ $\qquad$ $P \Rightarrow P$

- **Was unterscheidet $P \vee \neg P$ von $P \Rightarrow P$?**
  - Klassischer Beweis für $P \vee \neg P$ ist intuitionistisch nicht durchführbar
    - Analytische Anwendung von $\neg{-}R$ auf $\neg P^F$ würde P^T liefern, aber zwei Formeln im Sukzedent (P^F und $\neg P^F$) sind nicht erlaubt
  - Beweis für $P \Rightarrow P$ erzeugt P^T und P^F direkt in einem Schritt
- **Regeln für $\Rightarrow{-}R$, $\neg{-}R$, $\forall{-}R$ sind "blockierbar"**
  - Weitere Formeln mit Polarität ^{F} dürfen bei Anwendung nicht präsent sein
  - Analytische Anwendungen von $\Rightarrow{-}L$, $\neg{-}L$, $\forall{-}L$ erzeugen ^{F}-Formeln
    Diese Anwendungen müssen später stattfinden (das ist nicht immer möglich !)
  - Positionen mit Label $\Rightarrow$, $\neg$, $\forall$ codieren beide Arten von Regelanwendungen
  - Wichtig sind solche Positionen zwischen Wurzel und konnektierten Literalen
    Ergänze Liste dieser Positionen als Präfix zum Literal

Dies ist nur eine grobe Intuition, die im Detail nicht ganz zutrifft. Die genaue Begründung ist sehr technisch

Intuitionistische Präfixe präzisiert



$P \vee \neg P$ $\quad\quad$ $P \Rightarrow P$

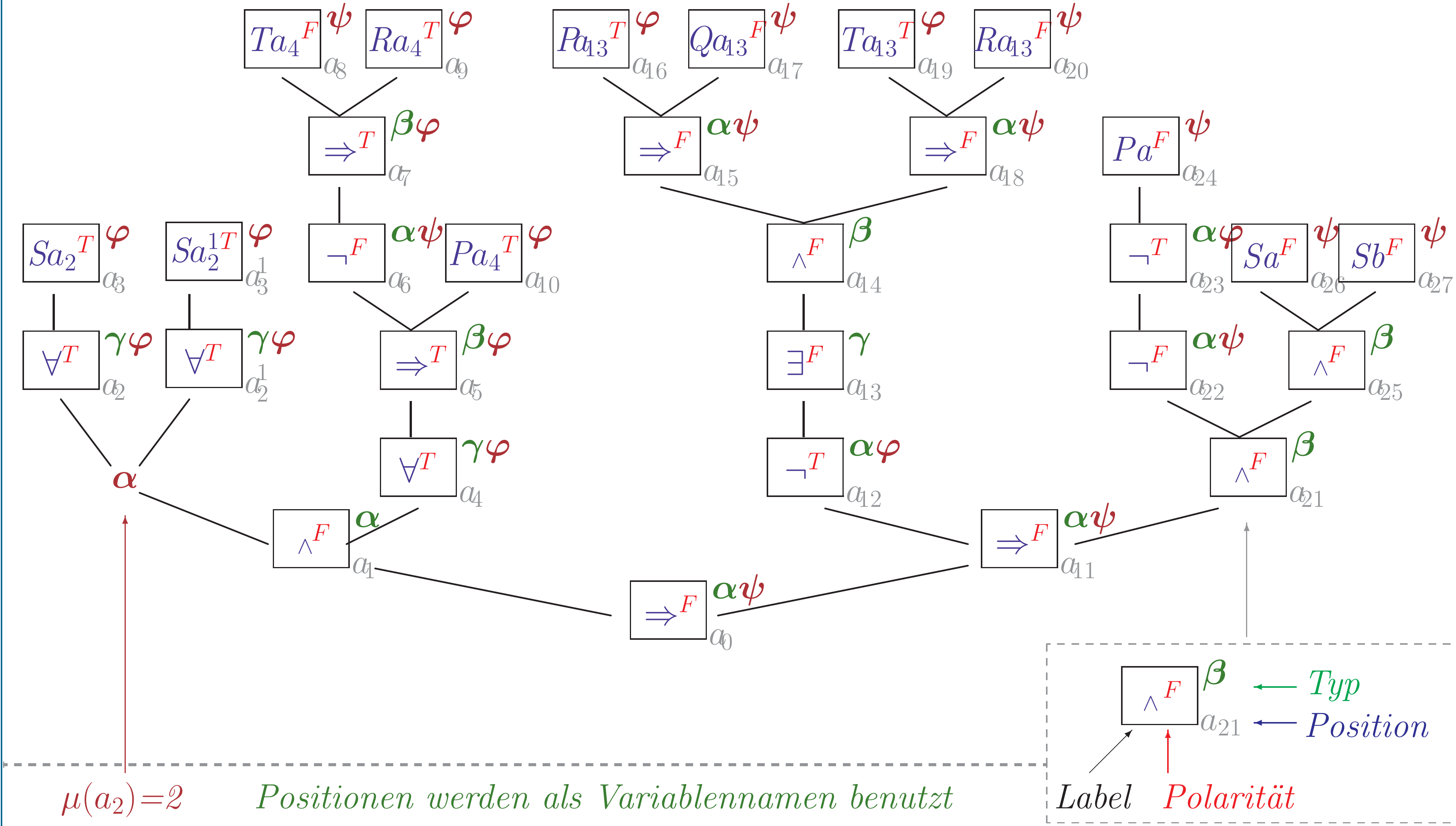
- **Weise Positionen intuitionistische Typen zu**
  - **Typ φ**: $\neg^T$, $\Rightarrow^T$, $\forall^T$, P^T (für Atome)
  - **Typ ψ**: $\neg^F$, $\Rightarrow^F$, $\forall^F$, P^F (für Atome)
  - φ-Positionen gelten als Variablen ($\hat{=}$ verschiebbare Regelanwendung)
  - ψ-Positionen gelten als Konstante (Kleinbuchstaben)
- **Bestimme Präfix eines Atoms P**
  - Liste der intuitionistischen Positionen zwischen Wurzel und P
- **Definiere intuitionistische Substitution σ_J**
  - Abbildung von φ-Positionen in Strings über intuitionistischen Positionen
  - σ_J induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_J$ auf intuitionistischen Positionen:

    Ist $\sigma_J(u) = v_1...v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_J u$ für jede ψ-Position v_i

    Die Positionen v_i müssen (analytisch !) vor u durch Regeln verarbeitet werden

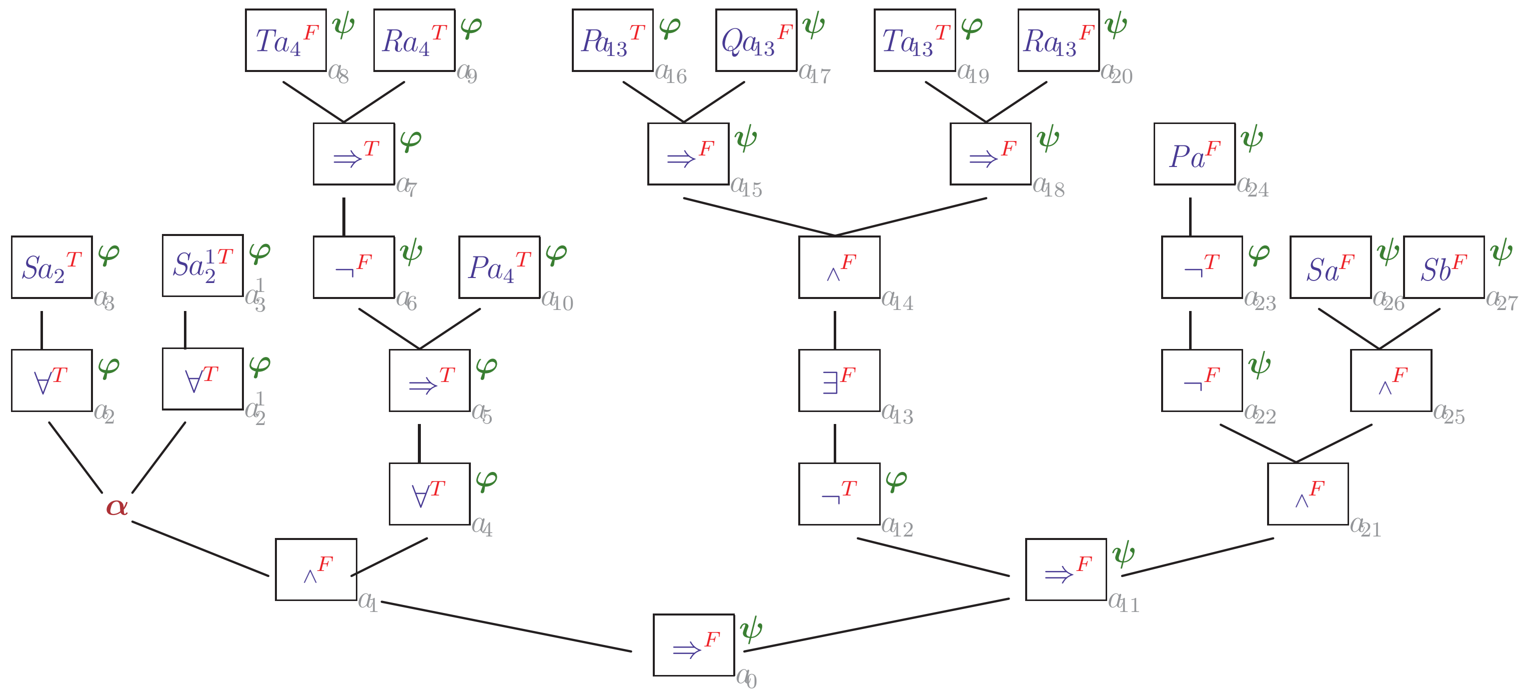
Formelbaum mit intuitionistischen Positionen

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y\, \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \;\Rightarrow\; \neg(\exists z (Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge Sb$$



Positionen werden als Variablennamen benutzt

Matrix mit intuitionistischen Präfixen



$$\left[\;\begin{matrix} a_0A_2A_3\!:Sa_2{}^{T} & a_0A_2^1A_3^1\!:Sa_2^{1\,T} \end{matrix}\;\; \left[\begin{matrix} a_0A_4A_5a_6A_7a_8\!:Ta_4{}^{F} \\ a_0A_4A_5a_6A_7A_9\!:Ra_4{}^{T} \\ a_0A_4A_5A_{10}\!:Pa_4{}^{T} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} \left[\begin{matrix} a_0a_{11}A_{12}a_{15}A_{16}\!:Pa_{13}{}^{T} & a_0a_{11}A_{12}a_{15}a_{17}\!:Qa_{13}{}^{F} \end{matrix}\right] \\ \left[\begin{matrix} a_0a_{11}A_{12}a_{18}A_{19}\!:Ta_{13}{}^{T} & a_0a_{11}A_{12}a_{18}a_{20}\!:Ra_{13}{}^{F} \end{matrix}\right] \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} a_0a_{11}a_{27}\!:Sb^{F} \\ a_0a_{11}a_{26}\!:Sa^{F} \\ a_0a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}\!:Pa^{F} \end{matrix}\right]\;\right]$$

Präfixe konnektierter Literale müssen durch intuitionistische Substitutionen gleich gemacht werden können

Komplementarität und Gültigkeit, intuitionistisch

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_J)$**
  - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_J
- **σ_Q: Ersetze quantifizierte γ-Variablen durch Terme**
  - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
  - σ_Q induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_Q$ zwischen γ- und δ-Positionen
- **σ_J: Ersetze φ-Variablen durch Strings**
  - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
  - σ_J induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_J$ zwischen ψ- und φ-Positionen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_J)**
  - Gesamte Reduktionsordnung $\lhd := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_J)^+$ ist azyklisch
  - Kommt eine δ-Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_J(pre_v)| \leq |\sigma_J(pre_u))|$
- **Intuitionistische Multiplizität $\mu_J(a_i)$**
  - Anzahl der Kopien des φ-Knotens im Baum

Eine Formel F ist intuitionistisch gültig, wenn es eine Multiplizität $\mu = (\mu_Q, \mu_J)$, eine zulässige Substitution $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_J)$ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ-komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

Intuitionistischer Matrixbeweis

$$\left[\; a_0A_2A_3{:}\,Sa_2^{\;T} \quad a_0A_2^1A_3^1{:}\,Sa_2^{1\,T} \quad \begin{bmatrix} a_0A_4A_5a_6A_7a_8{:}\,Ta_4^{\;F} \\ a_0A_4A_5a_6A_7A_9{:}\,Ra_4^{\;T} \\ a_0A_4A_5A_{10}{:}\,Pa_4^{\;T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[a_0a_{11}A_{12}a_{15}A_{16}{:}\,Pa_{13}^{\;T} \quad a_0a_{11}A_{12}a_{15}a_{17}{:}\,Qa_{13}^{\;F} \right] \\ \left[a_0a_{11}A_{12}a_{18}A_{19}{:}\,Ta_{13}^{\;T} \quad a_0a_{11}A_{12}a_{18}a_{20}{:}\,Ra_{13}^{\;F} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0a_{11}a_{27}{:}\,Sb^F \\ a_0a_{11}a_{26}{:}\,Sa^F \\ a_0a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}{:}\,Pa^F \end{bmatrix} \;\right]$$

- **6 Konnektionen decken alle 18 Pfade ab**
  - $\mathcal{C} = \{\ \{a_3a_{27}\}, \{a_3^1a_{26}\}, \{a_8a_{19}\}, \{a_9a_{20}\}, \{a_{10}a_{24}\}, \{a_{16}a_{24}\}\ \}$
- **Terme gleich unter $\sigma_Q = [b/a_2,\ a/a_2^1,\ a/a_4,\ a/a_{13}]$**
  - $\sqsubseteq_Q$ ist leer, da keine δ-Positionen vorhanden
- **Präfixe gleich unter $\sigma_J = [\epsilon/A_2,\ \epsilon/A_2^1,\ a_{11}a_{27}/A_3,\ a_{11}a_{26}/A_3^1,\ \epsilon/A_4,\ a_{11}a_{22}/A_5,\ a_{18}a_{20}/A_7,\ \epsilon/A_9,\ a_6a_{15}a_{24}/A_{10},\ a_{22}a_6/A_{12},\ a_{24}/A_{16},\ a_{20}a_8/A_{19},\ a_6a_{15}/A_{23}]$**
  - Induzierte Reduktionsordnung ist azyklisch
  - Zusatzbedingung für Zulässigkeit entfällt (keine δ-Positionen)
- **Die Formel ist intuitionistisch gültig**

Extensionsverfahren für intuitionistische Logik

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
  - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 14
- **Komplementaritätstest `unify_check` wird erweitert**
  - Bekanntes Termunifikationsverfahren (Robinson / Martelli-Montanari)
  - Neues Präfixunifikationsverfahren (Otten)
  - Überprüfung der Zulässigkeit

$$\begin{bmatrix} a_0A_2A_3\colon Sa_2^{\,T} & a_0A_2^1A_3^1\colon Sa_2^{1\,T} & \begin{bmatrix} a_0A_4A_5a_6A_7a_8\colon Ta_4^{\,F} \\ a_0A_4A_5a_6A_7A_9\colon Ra_4^{\,T} \\ a_0A_4A_5A_{10}\colon Pa_4^{\,T} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0a_{11}A_{12}a_{15}A_{16}\colon Pa_{13}^{\,T} & a_0a_{11}A_{12}a_{15}a_{17}\colon Qa_{13}^{\,F} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_0a_{11}A_{12}a_{18}A_{19}\colon Ta_{13}^{\,T} & a_0a_{11}A_{12}a_{18}a_{20}\colon Ra_{13}^{\,F} \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_0a_{11}a_{27}\colon Sb^{F} \\ a_0a_{11}a_{26}\colon Sa^{F} \\ a_0a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}\colon Pa^{F} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- $\sigma_Q = [b/a_2]$, $\quad\sigma_J = [\epsilon/A_2,\ a_{11}a_{27}/A_3]$
- $\sigma_Q = [a/a_2^1]$, $\quad\sigma_J = [\epsilon/A_2^1,\ a_{11}a_{26}/A_3^1]$
- $\sigma_Q = [a_{13}/a_4]$ $\quad\sigma_J = [\epsilon/A_4,\ a_{11}X/A_5,\ a_{18}Y/A_7,\ Xa_6/A_{12},\ Ya_8/A_{19}]$
- $\sigma_Q = []$, $\quad\sigma_J = [\epsilon/A_9a_{11}X/A_5,\ a_{20}/Y]$
- $\sigma_Q = [a/a_4,\ a/a_{13}]$, $\quad\sigma_J = [a_{22}/X,\ A_{23}a_{24}/A_{10}]$
- $\sigma_Q = []$, $\quad\sigma_J = [a_6a_{15}/A_{23},\ a_{24}/A_{16}]$

Präfix-Unifikation

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Allgemeine String Unifikation ist sehr kompliziert**
  - Es kann unendlich viele allgemeinste Unifikatoren geben
- **Präfixe erfüllen spezielle Restriktionen**
  - Eindeutigkeit: jedes Symbol erscheint maximal einmal im Präfix-String
  - Baumeigenschaft: gleiche Symbole nur am Anfang zweier Präfix-Strings
  - Unifikationsverfahren wird deutlich einfacher als String-Unifikation
    - z.B. $taSTeFuL$ und $tabUlAR$ ist unifiziert zu $tableaux$ mit $\sigma = [b/S, l/T, a/F, x/L, \epsilon/U, ea/A, ux/R]$
    - Viele andere Unifikatoren möglich
- **Betrachte allgemeinste Unifikatoren**
  - aX und Yb unifizierbar mit $\sigma_1 = [b/X, a/Y]$ und $\sigma_2 = [cb/X, ac/Y]$ allgemeinster Unifikator $\sigma = [Zb/X, aZ/Y]$ liefert aZb
  - Mgu's verhindern vorzeitige Festlegung im Extensionsverfahren
- **Präfix-Unifikationstheorie ist finitär**
  - Maximal $\frac{1}{2}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (also $\mathcal{O}(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}})$) allgemeinste Unifikatoren

Präfixunifikation – bildhaft

Systematische Aufzählung aller Kombinationen

- **Schreibe ersten String in Titelzeile einer Tabelle**
  - Konstanten belegen einen kleinen Slot (ein Symbol)
  - Variablen belegen einen großen (dehnbaren) Slot
- **Verteile zweiten String auf die Zeilen der Tabelle**
  - Identische Anfangsstrings werden identisch verteilt
  - Konstanten müssen im Bereich von Variablen erscheinen
  - Variablenbereiche sind beliebig dehnbar
  - Beginne mit kürzester Ausdehnung der Variablenbereiche
  - Verlängere Variablenbereiche systematisch und lese Substitution ab
- **Unifiziere Präfixe von $Ra_4{}^T$ und $Ra_{13}{}^F$ in Schritt 3**

$\boxed{a_0}$ A_4 | A_5 $\boxed{a_6}$ A_7 | A_9	σ_J
$\boxed{a_0}$ $\boxed{a_{11}}$ —— A_{12} —— $\boxed{a_{18}}$ $\boxed{a_{20}}$ ε	$[a_{11}X/A_4, Y/A_5, XYa_6/A_{12}, a_{18}a_{20}/A_7, \varepsilon/A_9]$
$\boxed{a_0}$ $\boxed{a_{11}}$ —— A_{12} —— $\boxed{a_{18}}$ $\boxed{a_{20}}$	$[a_{11}X/A_4, Y/A_5, XYa_6Z/A_{12}, Za_{18}/A_7, a_{20}/A_9]$
$\boxed{a_0}$ $\boxed{a_{11}}$ —— A_{12} —— $\boxed{a_{18}}$ $\boxed{a_{20}}$	$[a_{11}X/A_4, Y/A_5, XYa_6A_7/A_{12}, a_{18}a_{20}/A_9]$
$\boxed{a_0}$ $\boxed{a_{11}}$ —— A_{12} —— $\boxed{a_{18}}$ $\boxed{a_{20}}$	$[a_{11}X/A_4, Y/A_5, XYa_6A_7Z/A_{12}, Za_{18}a_{20}/A_9]$
$\boxed{a_0}$ $\boxed{a_{11}}$ — A_{12} — $\boxed{a_{18}}$ $\boxed{a_{20}}$ ε	$[\varepsilon/A_4, a_{11}X/A_5, Xa_6/A_{12}, a_{18}a_{20}/A_7, \varepsilon/A_9]$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮

Transformationsverfahren wie Martelli-Montanari

Gegeben: (1) Menge von Präfix-Gleichungen $\mathcal{EQ} = \{E_1,..E_n\}$
wobei $E_i \equiv p_i{=}\varepsilon|q_i$ markierte Gleichung
(2) Leere Substitution $\sigma{=}[]$

Ziel: Leere Menge $\mathcal{EQ}$' von Präfix-Gleichungen
Allgemeinster Unifikator σ' für $\mathcal{EQ}$

Methode: Anwendung von Transformationsregeln
der Form $E,\ \sigma \longrightarrow E',\sigma$'

- **Verfahren ist nichtdeterministisch und vollständig**
  – Menge aller möglichen Resultate ist Menge aller mgus von $\mathcal{EQ}$'
- **Verfahren ist uniform anwendbar**
  – Viele Logiken durch unterschiedliche Transformationsregeln verarbeitbar

Präfixunifikation – Transformationsregeln für $\mathcal{J}$

R_1	$\{\varepsilon = \varepsilon \mid \varepsilon\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{\}, \sigma$
R_2	$\{\varepsilon = \varepsilon \mid t^+\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{t^+ = \varepsilon \mid \varepsilon\}, \sigma$
R_3	$\{Xs = \varepsilon \mid Xt\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{s = \varepsilon \mid t\}, \sigma$
R_4	$\{Cs = \varepsilon \mid Vt\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{Vt = \varepsilon \mid Cs\}, \sigma$
R_5	$\{Vs = z \mid \varepsilon\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{s = \varepsilon \mid \varepsilon\}, [z/V] \cup \sigma$
R_6	$\{Vs = \varepsilon \mid C_1t\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{s = \varepsilon \mid C_1t\}, [\varepsilon/V] \cup \sigma$
R_7	$\{Vs = z \mid C_1C_2t\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{s = \varepsilon \mid C_2t\}, [zC_1/V] \cup \sigma$
R_8	$\{Vs^+ = \varepsilon \mid V_1t\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{V_1t = V \mid s^+\}, \sigma$
R_9	$\{Vs^+ = z^+ \mid V_1t\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{V_1t = V' \mid s^+\}, [z^+V'/V] \cup \sigma$
R_{10}	$\{Vs = z \mid Xt\}, \sigma$	$\longrightarrow$	$\{Vs = zX \mid t\}, \sigma$ ($V{\neq}X$, und $s{=}\varepsilon$, $t{\neq}\varepsilon$, oder X Konstante)

- $\mathcal{V}$: Variablenmenge, $\mathcal{C}$: Konstantenmenge, $\mathcal{V}^*$: Menge von Hilfsvariablen
- s, t, z: Strings, s^+, t^+, z^+: nichtleere Strings
- X Einzelsymbol, $V{\neq}V_1$ Variablen, C, C_1, C_2 Konstante (Einzelsymbole)
- V' neue Variable, die bisher nicht in σ vorkam

Unifikation von $a_0a_{11}A_{12}a_{15}A_{16}$ und $a_0a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}$ – (1)

$$
\begin{array}{lll}
 & \{a_0a_{11}A_{12}a_{15}A_{16} = \varepsilon | a_0a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}\}, \quad [] & \\
\xrightarrow{R_3} & \{a_{11}A_{12}a_{15}A_{16} = \varepsilon | a_{11}a_{22}A_{23}a_{24}\}, \quad [] & \\
\xrightarrow{R_3} & \{A_{12}a_{15}A_{16} = \varepsilon | a_{22}A_{23}a_{24}\}, \quad [] & \\
1. \xrightarrow{R_6} & \boldsymbol{\{a_{15}A_{16} = \varepsilon | a_{22}A_{23}a_{24}\}}, \quad [\varepsilon/A_{12}] & \diamond \\
2. \xrightarrow{R_{10}} & \{A_{12}a_{15}A_{16} = a_{22} | A_{23}a_{24}\}, \quad [] & \\
2.1. \xrightarrow{R_9} & \{A_{23}a_{24} = A' | a_{15}A_{16}\}, \quad [a_{22}A'/A_{12}] & \\
\xrightarrow{R_{10}} & \{A_{23}a_{24} = A'a_{15} | A_{16}\}, \quad [a_{22}A'/A_{12}] & \\
\xrightarrow{R_9} & \{A_{16} = A'' | a_{24}\}, \quad [a_{22}A'/A_{12}, A'a_{15}A''/A_{23}] & \\
\xrightarrow{R_{10}} & \{A_{16} = A''a_{24} | \varepsilon\}, \quad [a_{22}A'/A_{12}, A'a_{15}A''/A_{23}] & \\
\xrightarrow{R_5} & \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [a_{22}A'/A_{12}, A'a_{15}A''/A_{23}, A''a_{24}/A_{16}] & \\
\xrightarrow{R_1} & \{\}, \quad \boldsymbol{[a_{22}A'/A_{12}, A'a_{15}A''/A_{23}, A''a_{24}/A_{16}]} & \square \\
2.2. \xrightarrow{R_{10}} & \{A_{12}a_{15}A_{16} = a_{22}A_{23} | a_{24}\}, \quad [] & \\
\xrightarrow{R_{10}} & \{A_{12}a_{15}A_{16} = a_{22}A_{23}a_{24} | \varepsilon\}, \quad [] & \\
\xrightarrow{R_5} & \boldsymbol{\{a_{15}A_{16} = \varepsilon | \varepsilon\}}, \quad [a_{22}A_{23}a_{24}/A_{12}] & \diamond
\end{array}
$$

Einzige erfolgreiche Folge von Transformationen ergibt nur einen mgu