Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 10 (Version 1) — Abgabetermin: 19.01.2010, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Vertiefen Sie das Thema "Pushdown Automaten" und arbeiten Sie sich in das Thema "Eigenschaften kontextfreier Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 3.2 und 3.3 (Folien 1–7), die Kapitel 6 und 7.3 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 10.1 (Analyse und Mehrdeutigkeit von kontextfreien Grammatiken)

Sei $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to aSbS, S \to \varepsilon\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1. Warum ist G eine kontextfreie Grammatik?
2. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist. Geben Sie dazu für die Zeichenkette $aab \in L(G)$ zwei verschiedene Ableitunsbäume, zwei verschiedene linksseitige Ableitungen und zwei verschiedene rechtsseitige Ableitungen an.
3. Beschreiben Sie, welche Sprache G erzeugt.
4. Geben Sie eine eindeutige Grammatik an, welche die Sprache $L(G)$ erzeugt.

Aufgabe 10.2 (Konstruktion von kontextfreien Grammatiken)

Sei T=$\{0, 1, (,), +, ^*, \emptyset, e\}$ die Menge der Symbole, die in regulären Ausdrücken über dem Alphabet $\{0, 1\}$ verwendet werden. Dabei steht e für das leere Wort ε.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik G über der Menge der Terminalsymbole T an, die genau die regulären Ausdrücke über dem Alphabet $\{0, 1\}$ erzeugt.
2. Geben Sie für den Ausdruck $(1 + e)^*01$ eine linksseitige Ableitung, eine rechtsseitige Ableitung und einen Ableitungsbaum an.
3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ an, welche die üblichen Vorrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgen *, Verkettung und $+$; Verkettung und $+$ sind beide linksassoziativ).

Aufgabe 10.3 (Konstruktion von Pushdown-Automaten (PDAs))

Geben Sie PDAs P_ε und P_F an, welche die folgende Sprache durch durch Leeren des Stacks bzw. Erreichen eines Endzustands akzeptieren:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}.$$

Versuchen Sie dabei, P_ε auf einen Zustand zu beschränken.
Kann man P_F nur mit einem Zustand konstruieren?
Begründen Sie Ihre Konstruktionen.

Aufgabe 10.4 (Analyse von Pushdown-Automaten)

Gegeben sei der PDA $P = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_1\})$, wobei δ durch die folgende Tabelle gegeben ist.

Q	$\Sigma \cup \varepsilon$	Γ	Resultat
$\to q_0$	0	Z_0	q_0, XZ_0
$\to q_0$	0	X	q_0, XX
$\to q_0$	0	Y	q_0, ε
$\to q_0$	1	Z_0	q_1, Z_0
$\to q_0$	1	X	q_0, ε
$\to q_0$	1	Y	q_0, YY
$\to q_0$	ε	Z	q_1, ε
$*q_1$	0	Z_0	q_0, Z_0
$*q_1$	1	Z_0	q_0, YZZ_0

1. Geben Sie alle möglichen Konfigurationsfolgen für die Wörter „00111“, „10101“ und „1110“ an!
2. Geben Sie die von P akzeptierte Sprache an, wenn P durch die Endzustände akzeptiert.
3. Wie sieht die Sprache von P aus, wenn P mit leerem bzw. mit einelementigem Stack „Z_0“ akzeptiert?

Hausaufgabe 10.5 (Analyse und Mehrdeutigkeit von kontextfreien Sprachen)

[3 Punkte]

Sei L die Menge der aussagenlogischen Formeln über den Terminalsymbolen $T = \{A, B, C, a, b, c, (,), \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$, wobei Aussagenvariablen mit einem Großbuchstaben (A, B oder C) beginnen, dem Kleinbuchstaben (a, b oder c) folgen können. Beispielsweise ist $(A \wedge B) \Rightarrow \neg(Ca \vee Cb)$ eine wohlgeformte Formel, $(X \wedge \wedge B)\neg \vee C$ dagegen nicht.

1. Geben Sie eine möglichst einfache kontextfreie Grammatik an, die genau die aussagenlogischen Formeln über T erzeugt.
   Verwenden Sie nicht mehr als drei Nichtterminalsymbole.
2. Geben Sie einen Ableitungsbaum und eine linksseitige Ableitung für den folgende Ausdruck an:
   $$A \wedge (A \Rightarrow Bac) \vee C \Rightarrow \neg C \Rightarrow Bac$$
3. Geben Sie eine eindeutige kontextfreie Grammatik für L an, welche die üblichen Vorrangs- und Assoziativitätsregeln beachtet (Klammern binden am stärksten, dann folgt $\neg$, dann $\wedge$, dann $\vee$, und schließlich $\Rightarrow$. Dabei sind $\wedge$ und $\vee$ linksassoziativ, $\Rightarrow$ ist rechtsassoziativ).

Hausaufgabe 10.6 (Konstruktion von Pushdown-Automaten)

[3 Punkte]

Sei $L = \{a^n b^{n+m} c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (V, T, P, S)$ für diese Sprache an.
2. Geben Sie einen Pushdown-Automaten $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ für diese Sprache an.
   Dieser kann durch Leeren des Stacks oder Übergang in einen Endzustand akzeptieren.
3. Geben Sie eine Ableitung (eine Folge von Konfigurationen) des Automaten P für das Wort $aabbbc$ an.

Hausaufgabe 10.7 (Kontextfreie vs. reguläre Sprachen)

[Bonus: 3 Punkte]

Zeigen Sie, dass ein Pushdown-Automat mit einem Stack der festen Größe k genau die regulären Sprachen akzeptiert.