Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 13 (Version 1) — Abgabetermin: 09.02.2010, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Modelle für Typ-0 & Typ-1 Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 4.2, die Kapitel 8 der Bücher von Hopcroft, Motwani und Ullman bzw. von Vossen und Witt, eines der anderen empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 13.1 (Normalformen kontextfreier Grammatiken)

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jede kontextfreie Sprache, die ε nicht enthält, durch eine Grammatik erzeugt werden kann, deren Produktionsregeln die Form $A{\rightarrow}BC$ oder $A{\rightarrow}a$ haben (mit $A,B,C \in V$ und $a \in T$).
Zeigen oder widerlegen Sie, dass dies auch gilt, wenn die Grammatik nur Produktionsregeln der Form $A{\rightarrow}B_1 \ldots B_m$ mit einem festen $m \neq 2$ oder $A{\rightarrow}a$ haben (mit $A, B_1, \ldots, B_m \in V$ und $a \in T$) darf.

Aufgabe 13.2 (Syntaxanalyse mit dem Cocke-Younger-Kasami Algorithmus)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln $P = \{S{\rightarrow}aa \mid abS \mid bSaa\}$.

Prüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, ob die Wörter $abaa$, $aabba$ und $baaaa$ in $L(G)$ enthalten ist.

Aufgabe 13.3 (Umkehrung des Pumping Lemmas für Anwendungen)

In Einheit 2.5 wurde eine Umkehrung des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen formuliert:

Eine Sprache L ist nicht regulär, wenn es
für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $w \in L$ mit $|w| \geq n$ gibt so dass
für jede Zerlegung $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften $y \neq \varepsilon$ und $|x\,y| \leq n$
ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $x\,y^k\,z \notin L$

Formulieren Sie in gleicher Weise die Kontraposition des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen. Welche Teile der Kontraposition können Sie frei wählen und welche Teile müssen Sie als beliebig (gegeben) annehmen?

Aufgabe 13.4 (Anwendungen des Pumping Lemmas)

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.

1. $A = \{a^i b^j c^i d^j \mid i \geq 1, j \geq 1\}$.
2. $B = \{a^i b^j \mid j = i^2\}$
3. $C = \{a^n b^{n!} \mid n{\geq}1\}$
4. $D = \{a^p \mid p \text{ ist eine Quadratzahl}\}$

Hausaufgabe 13.5 (Syntaxanalyse mit dem Cocke-Younger-Kasami Algorithmus)

[3 Punkte]

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln enthält:

$$S \rightarrow ASa \,|\, bSb \,|\, \varepsilon$$
$$A \rightarrow cSc \,|\, a \,|\, \varepsilon$$

1. Transformieren Sie G in eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G') = L(G) - \{\varepsilon\}$.
2. Entscheiden Sie mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob die Wörter *ccbba* und *baab* Elemente der Sprache $L(G')$ sind.

Hausaufgabe 13.6 (Nicht kontextfreie Sprachen)

[3 Punkte]

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen nicht kontextfrei sind.

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1 \wedge (2i = j \wedge 2j = k)$
2. $L_2 = \{a^k b^{k*l} c^l \mid k, l \in \mathbb{N}\}$

Hausaufgabe 13.7 (Kontextfreie Sprachen über einelementigem Alphabet sind regulär)

[Bonus: 3 Punkte]

Beweisen Sie, dass jede Sprache L über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{a\}$ genau dann kontextfrei ist, wenn sie regulär ist. Zeigen Sie hierzu, dass L sich als Vereinigung endlich vieler regulärer Sprachen darstellen läßt und benutzen sie das Pumping Lemma, um diese Sprachen zu identifizieren.

Hinweis: Das Pumping Lemma und die Tatsache, dass die Elemente von L durch die Anzahl der a's eindeutig beschreibbar sind, wird Ihnen zunächst eine potentiell unendliche Zahl von regulären Sprachen $L_{k,j} \subseteq L$ liefern, die zusammen mit den "kleinen" Elementen von L die Sprache L überdecken. Sie benötigen nun etwas Restklassenarithmetik, um zu zeigen, dass bereits endlich viele dieser Klassen ausreichen.

Anmerkung: Sie werden im Internet fragmentarische Lösungen zu dieser Aufgabe finden. Sie erhalten nur Punkte, wenn Ihre Argumente einigermaßen verständlich und schlüssig formuliert sind.