Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 5 — Abgabetermin: 28. Mai 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 5

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Church'sche These besagt, dass die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen eine Teilmenge der intuitiv berechenbaren Funktionen ist.

[ ] μ-rekursive Ausdrücke können durch natürliche Zahlen codiert werden.

[ ] Die natürliche Zahl 22 wird in der arithmetischen Theorie $\mathcal{Q}$ dargestellt durch $s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(\overline{0}))))))))))))))))))))))$.

[ ] Die Menge $\{i \mid M_i \text{ hält auf Eingabe } \epsilon \text{ nach 1437 Schritten}\}$ ist entscheidbar.

[ ] Es gibt ein j, so dass M_j auf Eingabe i die Funktion φ_i berechnet.

Aufgabe 5.1 *(Gödelnumerierung)*

Turingmaschinen $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \{q_1\})$ lassen sich als Wörter codieren. Dabei reicht es aus, nur die Übergangsfunktion δ als Wort $w_\delta = w_1 w_2 \ldots w_n$ zu codieren, wobei jedes Wort $w_i = qXpYD$ einen möglichen Übergang $\delta(q, X) = (p, Y, D)$ definiert.

a) Geben Sie eine Funktion $k : \Delta^* \to I\!N$ mit $\Delta = Q \cup \Gamma \cup \{R, L\}$ an, die die Beschreibung von Turingmaschinen durch natürliche Zahlen codiert. Die Codierung soll dabei unabhängig von der Größe der Zustandsmenge Q und des Bandalphabets Γ sein, d.h. die Funktion k^{-1} kann ohne Angabe von $|Q|$ und $|\Gamma|$ berechnet werden.

   Codieren Sie w_δ als natürliche Zahl. Verwenden Sie zur Berechnung der Codierung Primzahlen, wobei p_i die i-te Primzahl ist. Nehmen Sie an, dass die Mengen Q, Γ und $\{R, L\}$ geordnet sind. Geben Sie an, wie die Funktion k^{-1} berechnet werden kann.

b) Geben Sie die Gödelnummer $k(M)$ für die Turingmaschine $M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_1\})$ mit $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$ und $\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, R)$ an.

Aufgabe 5.2 *(Aufzählbarkeit von Mengen)*

Zeigen Sie die folgenden Sätze.

a) Eine Menge L ist genau dann *semi-entscheidbar*, wenn es eine Turingmaschine gibt, die alle Elemente $w \in L$ in *beliebiger* Reihenfolge auf das Band schreibt.

b) Eine Menge L ist genau dann *entscheidbar*, wenn es eine Turingmaschine gibt, die alle Elemente $w \in L$ in einer *kanonischen (lexikographischen)* Reihenfolge auf das Band schreibt.

Hausaufgabe 5.3 *(Gödelnumerierung und "Universalität")*

a) Geben Sie eine Funktion $k : A^* \to \mathbb{N}$ an, die Wörter über dem geordneten Alphabet $A = \{a_1, ..., a_n\}$ für beliebiges n durch natürliche Zahlen codiert. Die Codierung soll dabei unabhängig von der Größe des Alphabets sein, d.h. die Funktion k^{-1} kann ohne Angabe von $|A|$ berechnet werden. Benutzen Sie die Idee aus Aufgabe 5.1.

b) Sei $A = \{o, h, l, n, a, b\}$ eine geordnete Menge. Geben Sie das Wort $k^{-1}(458419500)$ an.

c) Geben Sie einen "universellen" λ-Term u_λ an, so dass $u_\lambda\,(v_\lambda)\,(w)$ die Anwendung des λ-Terms v_λ auf w simuliert.

Hausaufgabe 5.4 *(Berechenbarkeit mit Turingmaschinen)*

Seien $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, $g_1 : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ und $g_2 : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ Turing-berechenbare Funktionen und f außerdem total. Zeigen Sie, dass dann auch $h : \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ definiert durch $h(w_1, w_2, w_3) :=$ " `if` $f(w_1) = 1$ `then` $g_1(w_2)$ `else` $g_2(w_3)$" Turing-berechenbar ist. Geben Sie dazu eine knappe und präzise Beschreibung einer (Mehr-Band-) Turingmaschine $M_{h'}$ an, die h':$\{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $h'(w_1\#w_2\#w_3) := h(w_1, w_2, w_3)$ berechnet.

Hausaufgabe 5.5 *(Abzählbarkeit und Aufzählbarkeit von Mengen)*

Sei $\text{range}(f) := \{y \in \mathbb{N} \mid \text{ es gibt ein } x \text{ mit } f(x) = y\}$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist *aufzählbar* genau dann, wenn es eine berechenbare Funktion f mit $\text{range}(f) = M$ gibt. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist *abzählbar* genau dann, wenn es eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass alle aufzählbaren Mengen auch abzählbar sind.

b) Zeigen Sie, dass M entscheidbar ist genau dann, wenn M und $\overline{M}$ aufzählbar sind. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Seien M_1, M_2 und M_3 Turingmaschinen, die M entscheiden bzw. M und $\overline{M}$ aufzählen. Geben Sie eine knappe und präzise Beschreibung an, wie sich aus M_1 die Maschinen M_2 und M_3 konstruieren lassen und umgekehrt.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
