Thesen zur Dissertation

Finite Majorizing Measures

vorgelegt von Dipl.-Math. Bettina Bühler

1. Finite Majorisierende Maße auf metrischen Räumen

1.1 Wir fixieren eine Zahl $q > 28$ und bezeichnen im folgenden mit c, c_0, c_1 und c_2 positive Konstanten, die nur von q abhängen. Des weiteren sei (T, d) ein metrischer Raum mit

$$0 < D(T) = \sup_{s,t \in T} d(s,t) < \infty.$$

Wir definieren für $A \subseteq T$ and $\varepsilon > 0$ die Überdeckungszahl $N(A, d, \varepsilon)$ durch

$$N(A,d,\varepsilon) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}; \bigvee_{t_1,\ldots,t_n \in T} \left(A \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{n} B(t_\ell, \varepsilon) \right) \right\}.$$

Außerdem wählen wir $N_0 \in \mathbb{Z}$ mit $N(T, d, q^{-N_0}) = 1 < N(T, d, q^{-N_0-1})$ und Zahlen $N_1 \in \mathbb{Z}, N_2 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit $N_0 \leq N_1 < N_2$.

1.2 Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(T,d)$ die Wahrscheinlichkeitsmaße auf (T, d) bzgl. der Borel σ-algebra. $\mathcal{Z}_{N_1}^{N_2}$ sei die Menge der Folgen

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{N_1}, \ldots, \mathcal{A}_{N_2}) \qquad (\text{oder } \mathcal{A} = (\mathcal{A}_{N_1}, \mathcal{A}_{N_1+1}, \ldots) \quad \text{für } N_2 = \infty),$$

die folgende Eigenschaften erfüllen:

(a) $\mathcal{A}_j$ ist eine endliche meßbare Zerlegung von T, $N_1 \leq j \leq N_2$,
(b) $N(A, d, q^{-j}) = 1$ für $A \in \mathcal{A}_j$, $N_1 \leq j \leq N_2$,
(c) $A_{j+1}(t) \subseteq A_j(t)$ für $t \in T$ und $N_1 \leq j < N_2$,
dabei ist $A_j(t)$ diejenige Menge aus $\mathcal{A}_j$, die t enthält.

Wir definieren

$$M\Theta_{N_1}^{N_2} = \inf \left\{ \sup_{t \in T} \sum_{j=N_1+1}^{N_2} q^{-j} \sqrt{\ln \frac{1}{\mu(A_j(t))}} \, ; \mathcal{A} \in \mathcal{Z}_{N_1}^{N_2}, \mu \in \mathcal{P}(T,d) \right\}.$$

1.3 Es gilt:

$$\sup\{M\Theta_{N_1}^{N_2}; N_2 < \infty\} \leq M\Theta_{N_1}^{\infty} \leq c \cdot \sup\{M\Theta_{N_1}^{N_2}; N_2 < \infty\}.$$

1.4 Wir setzen

$$, {}_{N_1}^{N_2} = \sup \left\{ \int\limits_{2q^{-N_2}}^{2q^{-N_1}} \int\limits_{T} \sqrt{\ln \frac{1}{\nu\left(B(t,\varepsilon)\right)}}\, \nu(dt)\, d\varepsilon ; \nu \in \mathcal{P}(T,d) \right\}.$$

1.5 Damit erhalten wir

$$c_1 , {}_{N_1}^{N_2} \leq M\Theta_{N_1}^{N_2} \leq c_2 , {}_{N_1}^{N_2+1}.$$

1.6 Wir definieren

$$\mathcal{I}\Theta_{N_1}^{N_2} = \inf \left\{ \sup_{t\in T} \int\limits_{2q^{-N_2}}^{2q^{-N_1}} \sqrt{\ln \frac{1}{\mu\left(B(t,\varepsilon)\right)}}\, d\varepsilon \,;\, \mu \in \mathcal{P}(T,d) \right\}$$

und

$$U\Theta_{N_1}^{N_2} = \inf\{\mathcal{I}\Theta_{N_1}^{N_2}(T,d')\,;\, d' \text{ Ultrametrik }, d' \geq d\}.$$

1.7 Wir erhalten

$$c_1 \mathcal{I}\Theta_{N_1}^{N_2} \leq M\Theta_{N_1}^{N_2} \leq c_2 \mathcal{I}\Theta_{N_1}^{N_2+1}$$

und

$$c_1 \mathcal{I}\Theta_{N_1-2}^{N_2-2} \leq U\Theta_{N_1}^{N_2} \leq c_2 M\Theta_{N_1}^{N_2}.$$

1.8 Für $N_2 < \infty$ gibt es eine induktive Konstruktion, nämlich:
Wir setzen $\overline{\phi}_{N_2}(t) = \overline{\phi}_{N_2+1}(t) = 0$ für $t \in T$ und

$$\overline{\phi}_j(t) = \sup \left\{ c_0 q^{-j}\sqrt{\ln n} + \min_{1\leq \ell \leq n} \overline{\phi}_{j+2}(t_\ell)\,;\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in B(t,q^{-j}), \\ d(t_\ell,t_k) > q^{-j-1}, \ell,k \leq n, \ell \neq k \end{array} \right\}$$

für $N_1 \leq j \leq N_2 - 1$.
Definieren wir $\overline{\phi}_{N_1}^{N_2}$ durch

$$\overline{\phi}_{N_1}^{N_2} = \sup\{\overline{\phi}_j(t)\,;\, t \in T, N_1 \leq j \leq N_2+1\},$$

so gilt

$$c_1 M\Theta_{N_1}^{N_2} \leq \overline{\phi}_{N_1}^{N_2} + q^{-N_1}\sqrt{\ln N(T,d,q^{-N_1})} \leq c_2 M\Theta_{N_1}^{N_2+1}.$$

1.9 Der Einfluß der Indexverschiebungen ist abschätzbar:
Für $N_2 \geq N_1 + 2$ ist

$$M\Theta_{N_1+1}^{N_2} \leq M\Theta_{N_1}^{N_2} \leq (1+q) \cdot M\Theta_{N_1+1}^{N_2}.$$

Außerdem ist

$$M\Theta_{N_1}^{N_2} \leq M\Theta_{N_1}^{N_2+1} \leq c\left(M\Theta_{N_1}^{N_2} + q^{-(N_2+1)}\sqrt{\ln N(T,d,q^{-(N_2+1)})}\right).$$

2. Zusammenhang mit Gaußprozessen

2.1 Wir setzen nun $T \subseteq \ell_2$ und $d(s,t) = \|s-t\|_2$ voraus und betrachten den Gaußprozeß $X = (X_t)_{t \in T}$ mit

$$X_t = \sum_{\ell=1}^{\infty} t_\ell g_\ell \quad \text{für } g_1, g_2, \ldots \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0,1),\ t = (t_\ell).$$

2.2 Es sei $\mathcal{C}_{N_2} = \left\{ T_{N_2} \subseteq T\,;\ T \subseteq \bigcup_{r \in T_{N_2}} B(r, 2q^{-N_2}) \right\}.$
Bemerkt sei, daß $\mathcal{C}_\infty = \{T\}$.
Definieren wir

$$CF_{N_1}^{N_2}(T) = \inf\left\{ \sup_{t \in T_{N_2}} \mathbb{E} \sup_{\substack{s \in T_{N_2} \\ d(s,t) \leq 2q^{-N_1}}} X_s\,;\ T_{N_2} \in \mathcal{C}_{N_2} \right\}$$

und

$$\overline{CF}_{N_1}^{N_2}(T) = \inf\left\{ \mathbb{E} \sup_{\substack{s,t \in T_{N_2} \\ d(s,t) \leq 2q^{-N_1}}} |X_s - X_t|\,;\ T_{N_2} \in \mathcal{C}_{N_2} \right\},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 M\Theta_{N_1+1}^{N_2-1} &\leq CF_{N_1}^{N_2}(T) + q^{-N_1-1}\sqrt{\ln N(T,d,q^{-N_1-1})} \\ &\leq \overline{CF}_{N_1}^{N_2}(T) + q^{-N_1-1}\sqrt{\ln N(T,d,q^{-N_1-1})} \\ &\leq c_2 M\Theta_{N_1}^{N_2}. \end{aligned}$$

2.3 Weiterhin sei

$$\mathcal{D}_{N_2} = \left\{ S_{N_2} \subseteq T\,;\ \bigwedge_{\substack{s,t \in S_{N_2} \\ s \neq t}} \big(d(s,t) > 2q^{-N_2}\big) \right\},$$

insbesondere $\mathcal{D}_\infty = \{S\,;\, S \subseteq T\}$.
Wir setzen

$$\overline{DF}_{N_1}^{N_2}(T) = \sup \left\{ \mathbb{E} \sup_{\substack{s,t \in S_{N_2} \\ d(s,t) \le 2q^{-N_1}}} |X_s - X_t|\,;\; S_{N_2} \in \mathcal{D}_{N_2} \right\}.$$

Dann gilt

$$\overline{CF}_{N_1}^{N_2}(T) \le \overline{DF}_{N_1}^{N_2}(T) \le \frac{q}{q-2} \cdot \overline{CF}_{N_1-1}^{N_2+1}(T).$$

2.4 Wir bezeichnen mit $SP(N_1)$ die Menge aller Zerlegungen $\mathcal{A}_{N_1}$, die durch eine Überdeckung von T mit $N(T, d, q^{-N_1})$ oder $N(T, d, q^{-N_1})+1$ Kugeln vom Radius q^{-N_1} induziert werden. Ist A eine Menge in einer solchen Zerlegung, so gibt es einen Punkt $u(A) \in T$ mit $A \subseteq B(u(A), q^{-N_1})$.

Wir erhalten eine Funktion $u : T \to T$, wenn wir $u(t) = u(A)$ für $t \in A$ setzen. $SF(N_1)$ sei die Menge aller derartigen Funktionen u.

2.5 Für $T_{N_2} \in \mathcal{C}_{N_2}$ und $u \in SF(N_1)$ sei

$$\mathcal{S}(M, T_{N_2}, u) = \left\{ (s_n);\quad \begin{array}{l} \bigwedge\limits_{n} \left(s_n \in \ell_2, \|s_n\|_2 \le \frac{M}{\sqrt{\ln \max\{n,2\}}} \right), \\ \bigwedge\limits_{t \in T_{N_2}} \left(t - u(t) \in \overline{\operatorname{conv}}\{0, s_1, s_2, \ldots\} \right) \end{array} \right\}.$$

Außerdem definieren wir die Größen

$$M_{N_1}^{N_2}(T) = \inf_{T_{N_2} \in \mathcal{C}_{N_2}} \sup_{u \in SF(N_1)} \inf\{M;\, \mathcal{S}(M, T_{N_2}, u) \ne \emptyset\}$$

und

$$F_{N_1}^{N_2}(T) = \inf_{T_{N_2} \in \mathcal{C}_{N_2}} \sup_{u \in SF(N_1)} \mathbb{E} \sup_{t \in T_{N_2}} |X_t - X_{u(t)}|.$$

Dann gilt

$$CF_{N_1+1}^{N_2}(T) \le 4F_{N_1}^{N_2}(T) \le c_1 M_{N_1}^{N_2}(T) \le c_2 M \Theta_{N_1}^{N_2}.$$