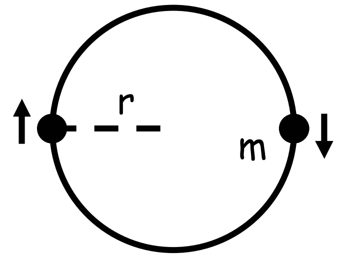
Aufgabe 1: Masse eines zusammengesetzten mechanischen Systems

Betrachten Sie ein System von zwei gleichartigen punktförmigen Körpern der Ruhemasse m, die von einer gegenseitigen Anziehungskraft auf einer Kreisbahn mit Radius r gehalten werden.

(Der Einfluss des Kraftfeldes auf die Masse soll vernachlässigt werden)



a. Wie groß ist die Ruhemasse M des Gesamtsystems als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω? Betrachten Sie sowohl den relativistischen Fall als auch den nichtrelativistischen Grenzfall.

b. Untersuchen Sie den ultrarelativistischen Grenzfall (v -> c), wobei die Gesamtmasse M endlich bleiben soll.

Was muss dann für die Masse m gelten?

Wie groß sind Winkelgeschwindigkeit und Gesamtdrehimpuls als Funktion von M und r?

Ist ein solches System in der Praxis realisierbar?

c. Betrachten Sie stattdessen ein System von zwei nichtwechselwirkenden Photonen der Energie E_γ, Gesamtimpuls 0 und Bahndrehimpuls $1\hbar$.

Verifizieren Sie, dass sich dieses System unter Lorentz-Transformationen verhält wie ein Objekt der Masse $M=2E_\gamma$.

d. Versuchen Sie, eine Relation zwischen den Fällen b. und c. herzustellen. Wie groß wäre der äquivalente „Radius"?

Aufgabe 1 Lösung

a) Geschwindigkeit jedes Körpers: $v = \omega \cdot r$

Energie jedes Körpers: $E = \gamma m \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (c=1)$

Ruhemasse des Gesamtsystems: $\boxed{M = 2E = \frac{2m}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}}$

<u>nichtrelativistischer Grenzfall</u>: $v, \omega \to 0 \; , \; \gamma \to \frac{1}{1-\frac{1}{2}v^2} \to 1 + \frac{1}{2}v^2 \to 1$

$$E = \gamma m \to m + \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{E_{kin}} \to m$$

$$M = 2E \to 2m + mv^2 = 2m + m\omega^2 r^2 \to 2m$$

im extrem nichtrelativistischen Grenzfall ist die <u>Gesamtmasse gleich der Summe der Einzelmassen</u> ("Massenerhaltung")

b) <u>ultrarelativistischer Grenzfall</u>: $v = \omega r \to c = 1$

- setze $\varepsilon = \sqrt{1-\omega^2 r^2} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow M = \frac{2m}{\varepsilon}$, endlich für $v \to 1 \; (\varepsilon \to 0)$

  $\Rightarrow m = \frac{M\varepsilon}{2} \longrightarrow 0$, <u>die Masse m muß gegen 0 gehen</u> (masselos)

- $\omega = \frac{v}{r} \to \frac{c}{r}$, <u>das System dreht sich um so schneller um seinen Schwerpunkt, je kleiner r ist</u>

- $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 = \vec{r} \times \vec{p} \; , \; \vec{p} = \gamma m \vec{v} \;\Rightarrow L = |\vec{L}_1 + \vec{L}_2| = 2\gamma m v r \overset{v=1}{=} 2Er = Mr$

  <u>$L = M \cdot r$ entspricht einem internen Eigendrehimpuls</u> ("Spin")

- in der Praxis realisierbar?

  streng gesehen: Nein. Keine Kraft bekannt, die zwei masselose Teilchen auf Kreisbahn zusammenhalten kann (aber mathematisch erlaubt)

c) 2 Photonen, Gesamtimpuls 0 $\Rightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, $E_1 = E_2 = E_\gamma$, $E = 2E_\gamma \overset{!}{=} M$

Lorentztransformation $\vec{v}$ entlang beliebiger Achse

$$\Rightarrow 1.\ \gamma: \quad \vec{p}_1{}' = \gamma(\vec{p}_1 + \vec{v}E_\gamma), \quad E_1' = \gamma(E_\gamma + \vec{v}\vec{p}_1)$$

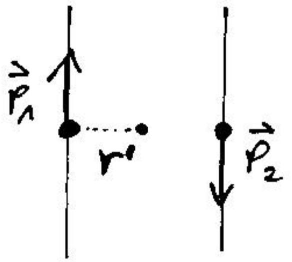
$$2.\ \gamma: \quad \vec{p}_2{}' = \gamma(\vec{p}_2 + \vec{v}E_\gamma) = \gamma(-\vec{p}_1 + \vec{v}E_\gamma), \quad E_2' = \gamma(E_\gamma + \vec{v}\vec{p}_2) = \gamma(E_\gamma - \vec{v}\vec{p}_1)$$

Summe: $\boxed{\vec{p}\,'} = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = 2\gamma\vec{v}E_\gamma \boxed{= \gamma M\vec{v}}$

$\boxed{E'} = E_1' + E_2' = 2\gamma E_\gamma \boxed{= \gamma M}$

$\Rightarrow$ System verhält sich wie Objekt der Masse $M = 2E_\gamma$

d)



Analogie:

b): $\underset{m \to 0}{M = 2E}$ $\quad L = Mr$

c): $\underset{m = 0}{M = 2E_\gamma}$ $\quad L = r'p_1 + r'p_2 = 2E_\gamma r' = Mr' \overset{!}{=} 1\hbar$

Das System hat einen äquivalenten "Radius" von $\boxed{r' = \frac{\hbar}{M} = \frac{\hbar}{2E_\gamma}}$

Ein solches System ist physikalisch ohne Weiteres realisierbar