2. Zum Zusammenhang zwischen dem Satz vom g.g.T. und dem ZPE -Satz

Elemente der Mathematik 19 (1964), 133-134

Wir wollen hier einen Erweiterungsbereich der Menge **N** der natürlichen Zahlen angeben, in dem der Satz vom g.g.T., nicht aber der ZPE-Satz gilt. Es wird sich dabei zeigen, dass jedoch wenigstens eine verallgemeinerte Produktzerlegung in unzerlegbare Elemente möglich ist.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{N}$, die aus allen unendlichen Folgen natürlicher Zahlen und der konstanten Folge $(0)_{k\in N}$ besteht. Auf $\mathcal{N}$ definieren wir Verknüpfungen durch

$$A + B =_{def} (a_k+b_k)_{k\in N} \text{ und } A\cdot B =_{def} (a_k b_k)_{k\in N}$$

für $A = (a_k)_{k\in N}$ und $B = (b_k)_{k\in N}$ aus $\mathcal{N}$.

$$A > B \Leftrightarrow_{def} a_k > b_k \text{ für alle } k\in N.$$

Addition und Multiplikation sind assoziativ und kommutativ, ausserdem gilt das Distributivgesetz. Die Relation > ist verträglich mit den Verknüpfungen von . In die so erhaltene Struktur lassen sich die natürlichen Zahlen mit Hilfe der konstanten Folgen isomorph einbetten. Nullelement ist 0 und Einselement ist 1.

Für die Teilbarkeitstheorie wesentliche Eigenschaften der natürlichen Zahlen übertragen sich auf $\mathcal{N}$. Für $0 \neq A = (a_k)_{k\in N}$ und $B = (b_k)_{k\in N}$ aus $\mathcal{N}$ gilt nämlich

$$A|B \text{ genau dann, wenn für alle } k\in \mathbf{N} \text{ gilt } a_k|b_k.$$

Es folgt $1|A$ für alle $A\in \mathcal{N}$ und $A|A$ für alle $A \neq 0$, $A\in \mathcal{N}$. 1 und A sind also triviale Teiler von A.

Aus den Komponenten von 1 und A lassen sich neue Teiler zusammenstellen.

Für jedes $T = (t_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $t_k = a_k$ oder $t_k = 1$für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt $T|A$. Wir wollen Teiler dieser Art auch zu den trivialen Teilern von $A \neq 0$ zählen. In diesem Sinne sehen wir Elemente aus $\mathcal{N}$, die nur solche trivialen Teiler besitzen, als unzerlegbare Elemente an.

Offensichtlich ist $P = (p_k)_{k \in \mathbf{N}} > 1$ aus $\mathcal{N}$ genau dann unzerlegbar, wenn p_k für alle $k \in \mathbf{N}$ Primzahl ist. Ein unzerlegbares Element aus $\mathcal{N}$ braucht jedoch nicht Primelement zu sein, denn aus $P|AB$, P unzerlegbar, folgt im allgemeinen nicht $P|A$ oder $P|$ B. Man wähle etwa $P = 2$, $A = (a_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Mit $a_k = 2$ für ungerades k und $a_k = 3$ für gerades k und $B = (b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $b_k = 3$ für ungerades k und $b_k = 2$ für gerades k. Es gilt also nicht der ZPE-Satz.

Um den g.g.T. zweier Elemente $A, B \in \mathcal{N}$, die nicht beide 0 sind, zu bestimmen, können wir ebenfalls auf die Komponenten von A und B zurückgreifen. Für $A = (a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ und $B = (b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ist $D = (d_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $d_k = (a_k, b_k)$ für alle $k \in N$ der g.g.T. von A und B. Sei nämlich $T|A$ und $T|B$, $T = (t_k)_{k \in \mathbf{N}}$ aus $\mathcal{N}$, dann gilt $t_k|a_k$ und $t_k|b_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Aus $d_k = (a_k, b_k)$ und $t_k|d_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$ folgt $T|D$, $D|A$ und $D|B$. Es gilt also der Satz vom g.g.T. .

Verwenden wir eine Produktdefinition, die LAUGWITZ (1959) in anderem Zusammenhang benutzt, so lässt sich für alle Elemente aus $\mathcal{N}$, die grösser als 1 sind, wenigstens eine Zerlegung in ein Produkt unzerlegbarer Elemente gewinnen. Für $P_V =_{\mathrm{def}} (p_{kv_k})_{k \in \mathbf{N}}$ mit $0 \neq V = (v_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $V \in \mathcal{N}$, schreiben wir

$$Q =_{\mathrm{def}} \prod_{V=M}^{N} P_V ,$$

wobei

$$Q = (q_k)_{k\in N} = \left(\prod_{m=m_k}^{n_k} p_{km}\right)_{k\in N}$$

mit N = $(n_k)_{k\in N}$ > M =$(m_k)_{k\in \mathbf{N}}$. Damit gilt:

Zu jedem A = $(a_k)_{k\in \mathbf{N}}$ > 1 aus *N* existiert eine Darstellung

(1) $$A = \prod_{V=1}^{S} P_V \ ,$$

wobei die P_V unzerlegbare Elemente sind und S∈*N* eindeutig bestimmt ist. Für alle k∈**N** sei nämlich

$$a_k = \prod_{m=1}^{s_k} s_k$$

die kanonische Zerlegung von a_k, dann folgt mit $P_V = (p_{kvk})_{k\in \mathbf{N}}$, V= $(v_k)_{k\in \mathbf{N}}$ und eindeutig bestimmtem S = $(s_k)_{k\in \mathbf{N}}$ die Darstellung (1). Dass die Darstellung (1) nicht nur formal sinnvoll ist, erkennt man daran, dass für alle P_V aus (1) gilt P|A, wenn für alle k∈**N** gilt $1 \le v_k \le s_k$. Allerdings ist Darstellung (I) im allgemeinen nicht eindeutig.

Literatur

Laugwitz, D., Eine Einführung der δ-Funktionen, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-nat. Kl. (1959), 41-59.