Bemerkungen zur Note des Herrn Philip E. B. Jourdain über das Prinzip der kleinsten Aktion.*)

Von

MORITZ RÉTHY in Budapest.

I. Aus der Gleichung (5) des Herrn Jourdain (l. c. pag. 416)

$$(5)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\Big(2T\frac{d\delta t}{dt}+\delta_1 T+\sum_\nu Q_\nu\delta q_\nu\Big)dt=0,$$

wo die q_ν freie Koordinaten bedeuten, und den beiden Annahmen (in den letzten Zeilen von pag. 418), daß

a) die Variationen δq_ν an den Grenzen t_0 und t_1 verschwinden, und

b) die Gleichung

$$\delta_1 T=\sum_\nu Q_\nu\delta q_\nu$$

zu jeder Zeit stattfindet, folgt mittels der ($\delta_1 T$ definierenden) Identität (4) des Herrn Jourdain (pag. 416) jedenfalls, daß die Bewegung des materiellen Systems die natürliche sein muß.

Die (pag. 418) ohne jedwede Verifikation hingestellte Behauptung, daß im Falle der natürlichen Bewegung aus den Prämissen a) und b) auch das Verschwinden von

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt$$

folge, ist hingegen leider eine irrtümliche.

Aus der Identität (4) des Herrn Jourdain (pag. 416) folgt nämlich die ihr äquivalente Identität

$$(\dagger)\qquad \delta_1 T\,dt+T\delta\,dt\equiv\delta(T\,dt)+\Big(\sum_\nu q'_\nu\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}-2T\Big)d\delta t-\frac{\partial T}{\partial t}\delta t\,dt.$$

---

*) Math. Ann. Bd. 62, pag. 413—418.

Da andererseits seine Gleichung (5) bei den Annahmen a) und b) durch die natürliche Bewegung befriedigt wird, so folgt aus ihr (indem man an Stelle von $\sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu$ der Annahme b) gemäß $\delta_1 T\,dt$ setzt und hernach die Identität (†) anwendet) die Gleichung

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta(T dt) + \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_\nu q'_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} - 2T\Big) d\delta t - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial t}\,\delta t\,dt.$$

Demnach verschwindet $\delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt$ *bei den Jourdainschen Annahmen* a) *und* b) *ohne weiteres gewiß nicht,* es wäre denn, daß wir es mit dem Lagrangeschen Spezialfall zu tun haben, wo T eine homogene quadratische Funktion der q' ist mit von t explizit unabhängigen Koeffizienten, welcher Fall doch bei Herrn Jourdain ausgeschlossen ist. Die Prämissen a) und b) sind vielmehr im allgemeinen durch die Voraussetzung zu ergänzen, daß

c) die Variation δt mittels der Gleichung definiert sei:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{\partial T}{\partial t}\,\delta t + \Big(2T - \sum q'_\nu \frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\Big) \frac{d\delta t}{dt}\Big) dt = 0.$$

Daß der Satz nach dieser notwendigen Ergänzung seine Einfachheit vollständig einbüßt, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden.

II. Aus den Identitäten (11) und (11*) auf Seite 173 meiner (in den Math. Ann. Bd. 58 erschienenen) Arbeit folgt bei der Bezeichnung (10*) die allgemeine Identität

$$\delta((1+c)\,T dt) - d\Big((1+c)\,T\delta t + \sum_i^n \frac{\partial T}{\partial q'_i}\,\delta' q_i\Big)$$
$$\equiv \Big(c\,\delta' T + \sum_1^n \Big(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i}\Big)\delta' q_i\Big) dt,$$

wo c eine willkürliche Konstante und

$$\delta.' \equiv \delta. - \frac{d.}{dt}\,\delta t$$

bedeuten. Treffe ich daher bezüglich δt die Vorschrift*)

---

*) Auf pag. 176 meiner zitierten Arbeit (Z. 5 und 6) ist diese Gleichung (††) gemeint; an Stelle von $\delta' T\,dt$ in Z. 6 ist nämlich zu schreiben

$$\delta' T\,dt + d(T\delta t).$$

$$(\dagger\dagger)\quad d\left((1+c)T\delta t+\sum_1^n{}^i\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right)+\left(c\delta' T-\sum_1^n{}^i Q_i\delta' q_i\right)dt=0,$$

so folgt daraus die Gleichung

$$\delta((1+c)T dt)=\sum_1^n{}^i\left(Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i\,dt;$$

es ist daher die Gleichung

$$(\dagger\dagger\dagger)\qquad (1+c)\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}^i\left(Q_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)\delta' q_i\,dt$$

gewiß wahr, sobald nur δt_0 und δt_1 der aus $(\dagger\dagger)$ folgenden Gleichung

$$(\dagger\dagger)'\quad\left[(1+c)T\delta t+\sum_1^n{}^i\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\left(c\delta' T-\sum_1^n{}^i Q_i\delta' q_i\right)dt=0$$

gemäß bestimmt werden. Ist aber diese letztere Gleichung für beliebige Zeitpunkte t_1 erfüllt, und werden die Verhältnisse $\frac{\delta q_i}{\delta t}$ den zwischen den q_i' bestehenden Bedingungsgleichungen der Bewegung unterworfen, so verschwindet $\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt$, wie aus $(\dagger\dagger\dagger)$ folgt, dann und nur dann, wenn die Bewegung des materiellen Systems die natürliche ist. Dieser Ausspruch enthält meinen Satz und den des Herrn Voss; die Gleichung $(\dagger\dagger)'$ kann dabei, indem man den Integrand $c\delta' T-\sum Q\delta q=0$ setzt, in zwei Gleichungen zerlegt werden.

Herr Jourdain will nun (in der ersten Alinea von 3. pag. 417—8) gezeigt haben, daß die mit $\delta' q_i$ bezeichneten Größen $\delta q_i - q_i'\delta t$ ganz allgemein nur dann virtuelle Verrückungen bedeuten könnten, wenn δt verschwindet. Seine Gründe leuchten mir, ich muß es gestehen, nicht ein; insbesondere erscheint mir das Herbeiziehen des Hamiltonschen Prinzips (pag. 418, Z. 3—5) völlig fremdartig und verdächtig.*) Ist

*) In der Fußnote pag. 75, Z. 3 seiner in „Quart. Journ. of Math. 1904“ erschienenen Arbeit spricht Herr Jourdain klar aus, daß die in Rede stehende Ableitung des Herrn Voss „two fundamental errors“ enthält, von denen der eine der eben dargestellte sein soll. Da beide vermeintlichen Fehler zusammen stehen und fallen, so will ich vom zweiten nicht reden.

doch bei dieser Frage nur der eine Umstand maßgebend, daß die Verhältnisse $\frac{\delta q_i}{\delta t}$ so definiert werden, daß daraus für die Größen $\delta' q_i$ *homogene* lineare Gleichungen von einfacher physikalischer Bedeutung hervorgehn, die dem Wert von δt für sich genommen gar keine Beschränkung auferlegen. In dieser Definition und in den daraus gezogenen Folgerungen möge Herr Jourdain einen inneren Widerspruch direkt (ohne Einmischung fremder Prinzipien) und klar nachweisen.