Die singulären Kanten bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von

Hellmuth Kneser in Greifswald.

Behnke bewies zuerst[1]), daß die einspringenden Kanten des Regularitätsbereiches einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen analytisch sind, d. h. dadurch erhalten werden, daß man die eine Veränderliche als analytische Funktion der anderen ansetzt. Mit schärferen Annahmen über die Differenzierbarkeit, aber ohne eine unnötige Voraussetzung konnte ich dann[2]) einen recht kurzen Beweis angeben. Beiden gemeinsam ist die Benutzung der von Hartogs erkannten Eigenschaft des Regularitätsradius, daß sein Logarithmus eine „superharmonische" Funktion ist. Der neue, bei beliebig vielen Veränderlichen gültige Beweis, den ich hier geben will, stützt sich dagegen auf einen Hilfssatz, der auch jener Eigenschaft des Regularitätsradius zugrunde liegt und alle gestaltlichen Eigenschaften im Kleinen der Regularitäts- und Meromorphiebereiche beherrscht. Er rührt betreffs der Regularitätsbereiche von Hartogs[3]) her und wurde betreffs der Meromorphiebereiche bei zwei Veränderlichen in einem für die Anwendungen ausreichenden Sonderfall von E. E. Levi[4]), bei beliebiger Veränderlichenzahl mit einer für die Anwendung etwas hinderlichen Einschränkung von Osgood[5]), in voller, mehr als ausreichender Allgemeinheit in der vorstehenden Arbeit bewiesen, wo er als Satz 1 zu finden ist. Wegen seiner zentralen Stellung erscheint dieser Satz hier als das angemessenere Hilfsmittel: er ermöglicht die Verwendung berührender Parabeln an Stelle der höheren Gebilde, die bei der Verwendung des Regularitäts- bzw. Meromorphieradius implizite mit hereinspielen. Außerdem braucht bei dem gegenwärtigen Beweis keine Veränderliche vor der anderen ausgezeichnet zu werden, was die Rechnung vereinfacht.

---

[1]) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Un. 4 (1926), S. 347–365.

[2]) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Un. 5 (1926), S. 151–152.

[3]) Sitzber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Abt., 36 (1906), S. 223–242.

[4]) Annali di mat. (3) 17 (1910), S. 61–87.

[5]) Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, S. 168–169 der ersten Auflage (1924).

Ich führe den Beweis bei Meromorphiebereichen durch; bei Regularitätsbereichen geht er genau ebenso, da der zentrale Hilfssatz auch dort gilt.

In dem $2n$-dimensionalen Raume der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ seien zwei zweimal stetig differenzierbare $(2n-1)$-dimensionale Überflächen gegeben, die sich in einem Punkte P schneiden und dort verschiedene Tangential-Überebenen haben. Sie schneiden sich demzufolge in einer P enthaltenden $(2n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$. Die beiden Überflächen seien bestimmt durch Gleichungen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$, worin Φ und Ψ zwei zweimal stetig differenzierbare reelle Funktionen der Real- und Imaginärteile von $z_1, \ldots, z_n$ sind, die in P beide den Wert Null haben, während weder die ersten Ableitungen von Φ noch die von Ψ alle gleich Null sind und auch die einen den anderen nicht proportional sind. Die beiden Überflächen zerlegen die Umgebung von P in vier Teile nach den vier möglichen Vorzeichenkombinationen von Φ und Ψ. Für einen Bereich, der aus dreien von diesen vier Teilen besteht, z. B. den Bereich $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$, ist $\mathfrak{S}$ eine *einspringende Kante.*

Zur rechnerischen Behandlung ist es zweckmäßig, nicht die Ableitungen der Funktionen Φ und Ψ nach den Real- und Imaginärteilen zu benutzen, sondern die „Ableitungen nach den komplexen Veränderlichen und ihren Konjugierten". Sie werden definiert durch

$$d\Omega = \sum_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial z_\nu} dz_\nu + \sum_\nu \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu$$

und haben demnach die Werte

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} - i \frac{\partial \Omega}{\partial y_\nu}\right), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial \Omega}{\partial y_\nu}\right) \quad (z_\nu = x_\nu + i y_\nu).$$

Die Reihenfolge, in der zwei solche Differentiationen ausgeführt werden, ist gleichgültig.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Ableitung nach z_ν durch ein angehängtes ν, die nach $\bar{z}_\nu$ durch ein angehängtes $\bar{\nu}$. Bei einer reellen Funktion Ω gelten dann die Beziehungen

$$(1) \qquad \Omega_{\bar{\nu}} = \overline{\Omega_\nu}, \quad \Omega_{\mu\bar{\nu}} = \overline{\Omega_{\bar{\mu}\nu}}, \quad \Omega_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \overline{\Omega_{\mu\nu}}.$$

Sind die Real- und Imaginärteile der Veränderlichen z ihrerseits differenzierbare Funktionen des Real- und Imaginärteils einer neuen komplexen Veränderlichen $t = u + iv$, so gilt die Kettenregel für das Differenzieren mittelbarer Funktionen, wie wenn $z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ die vermittelnden, t und $\bar{t}$ die schließlich unabhängigen Veränderlichen wären[6]).

---

[6]) Ausführlicher werden die Verhältnisse bei diesen uneigentlichen Ableitungen in der gleichzeitig entstandenen Dissertation von J. Krzoska auseinandergesetzt.

Die Voraussetzung, daß die Überflächen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ in P verschiedene Tangential-Überebenen haben oder daß in P die ersten Ableitungen von Φ denen von Ψ nicht proportional sind, besagt, daß

$$(2)\qquad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\Phi_1, \ldots, \Phi_n, & \Phi_{\bar 1}, \ldots, \Phi_{\bar n}\\ \Psi_1, \ldots, \Psi_n, & \Psi_{\bar 1}, \ldots, \Psi_{\bar n}\end{pmatrix} = 2$$

ist in P und daher auch in einer Umgebung von P. Wir setzen weiter

$$(3)\qquad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\Phi_1, \ldots, \Phi_n\\ \Psi_1, \ldots, \Psi_n\end{pmatrix} = 2$$

voraus und konstruieren durch einen beliebigen Punkt Q: $z_\nu = a_\nu$ auf $\mathfrak{S}$ eine Parabel

$$(4)\qquad z_\nu = a_\nu + b_\nu t + \frac{1}{2} c_\nu t^2, \qquad \bar z_\nu = \bar a_\nu + \bar b_\nu \bar t + \frac{1}{2} \bar c_\nu \bar t^2.$$

Die Ableitungen von Φ nach t und $\bar t$ errechnen sich zu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_\mu \Phi_\mu \frac{\partial z_\mu}{\partial t} + \sum_\mu \Phi_{\bar\mu} \frac{\partial \bar z_\mu}{\partial t} = \sum_\mu \Phi_\mu (b_\mu + c_\mu t),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar t} = \sum_\mu \Phi_\mu \frac{\partial z_\mu}{\partial \bar t} + \sum_\mu \Phi_{\bar\mu} \frac{\partial \bar z_\mu}{\partial \bar t} = \sum_\mu \Phi_{\bar\mu} (\bar b_\mu + \bar c_\mu \bar t),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} (b_\mu + c_\mu t)(b_\nu + c_\nu t) + \sum_\nu \Phi_\nu c_\nu,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial \bar t} = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\bar\nu} (b_\mu + c_\mu t)(\bar b_\nu + \bar c_\nu \bar t),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar t^2} = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\bar\mu\bar\nu} (\bar b_\mu + \bar c_\mu \bar t)(\bar b_\nu + \bar c_\nu \bar t) + \sum_\nu \Phi_{\bar\nu} \bar c_\nu.$$

Entsprechendes gilt von den Ableitungen von Ψ. Im Punkte Q ist also

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum\limits_\mu \Phi_\mu b_\mu = A, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar t} = \sum\limits_\mu \Phi_{\bar\mu} \bar b_\mu = \bar A,\\[2ex] \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum\limits_\mu \Psi_\mu b_\mu = A', & \dfrac{\partial \Psi}{\partial \bar t} = \sum\limits_\mu \Psi_{\bar\mu} \bar b_\mu = \bar A', \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \sum\limits_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu} b_\mu b_\nu + \sum\limits_\nu \Phi_\nu c_\nu = C, & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar t^2} = \sum\limits_{\mu,\nu} \Phi_{\bar\mu\bar\nu} \bar b_\mu \bar b_\nu + \sum\limits_\nu \Phi_{\bar\nu} \bar c_\nu = \bar C,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \sum\limits_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\nu} b_\mu b_\nu + \sum\limits_\nu \Psi_\nu c_\nu = C', & \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar t^2} = \sum\limits_{\mu,\nu} \Psi_{\bar\mu\bar\nu} \bar b_\mu \bar b_\nu + \sum\limits_\nu \Psi_{\bar\nu} \bar c_\nu = \bar C', \end{cases}$$

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial \bar t} = \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\bar\nu} b_\mu \bar b_\nu = E, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\, \partial \bar t} = \sum_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\bar\nu} b_\mu \bar b_\nu = E'.$$

Hierin sind nach (1) von selbst A und $\bar A$, A' und $\bar A'$, C und $\bar C$, C' und $\bar C'$ konjugiert, E und E' reell. Wir setzen $A = 1$, $A' = -1$ und bestimmen aus den Gleichungen (5) die Koeffizienten b_ν. Das ist nach (3) möglich, und es werden nicht alle zu Null. Mit den aus (7) errechneten Werten E und E' setzen wir $C = E - 1$, $C' = E' - 1$ und bestimmen die Koeffizienten c_ν aus den Gleichungen (6). Dann haben die Ableitungen von Φ und Ψ nach u und v $(t = u + iv)$ die Werte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{t}} = A + \bar{A} = 2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = i\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{t}}\right) = i(A - \bar{A}) = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = A' + \bar{A}' = -2, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial v} = i(A' - \bar{A}') = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{t}^2} = 2E - C - \bar{C} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} = 2E' - C' - \bar{C}' = 2.$$

Daraus folgt, daß in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes der u-v-Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes selbst $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$ ist. In der Tat, es ist $\Phi > 0$ rechts von einer Kurve, die die v-Achse im Nullpunkt berührt und dort nach rechts konvex gekrümmt ist, und $\Psi > 0$ links von einer Kurve, die die v-Achse im Nullpunkt berührt und dort nach links konvex gekrümmt ist. Bei unserer Festsetzung der Koeffizienten b_ν und c_ν erhalten wir also eine Parabel, die in einer gewissen Umgebung von Q ganz im Gebiet $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$ verläuft.

Nun sei die Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ in einer gewissen Umgebung von P meromorph in allen Punkten mit $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$. Wieder sei Q ein Punkt aus dieser Umgebung und auf $\mathfrak{S}$. Wir bestimmen Werte $p_1, \ldots, p_n$, so daß

$$(8) \qquad \sum_\nu p_\nu \Phi_\nu + \sum_\nu \bar{p}_\nu \Phi_{\bar{\nu}} > 0, \qquad \sum_\nu p_\nu \Psi_\nu + \sum_\nu \bar{p}_\nu \Psi_{\bar{\nu}} > 0$$

ist, mit den Werten der Ableitungen in Q. Das ist nach (3) möglich; es braucht ja nur jeweils die erste Summe einen positiven Realteil zu haben. Dann gilt (8) wegen der Stetigkeit der Ableitungen auch, wenn wir die Werte der Ableitungen in hinreichend benachbarten Punkten einsetzen. Setzen wir

$$(9) \qquad z_\nu = a_\nu + b_\nu t + \frac{1}{2} c_\nu t^2 + w_\nu,$$

so wird $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$ für hinreichend kleine von Null verschiedene Werte von t und $w_\nu = 0$. Setzen wir in (9)

$$(10) \qquad w_\nu = p_\nu s$$

mit reellem s, so wird

$$\frac{d\Phi}{ds} = \sum_\nu p_\nu \Phi_\nu + \sum_\nu \bar{p}_\nu \Phi_{\bar{\nu}} > 0, \qquad \frac{d\Psi}{ds} > 0$$

für hinreichend kleine Werte von t und $s = 0$, also wegen der Stetigkeit der Ableitungen $\operatorname{Max}(\Phi, \Psi) > 0$ für hinreichend kleine Werte von t und hinreichend kleine positive Werte von s. Durch die Einsetzung (9) wird aus f eine Funktion $g(w_1, \ldots, w_n; t)$, die in der Umgebung des Nullpunktes meromorph ist für alle die Werte, für die die Werte von $z_1, \ldots, z_n$ dem Gebiet $\mathrm{Max}(\Phi, \Psi)$ angehören, also insbesondere bei kleinem positivem R für $|t| = R$, $w_\nu = 0$ und für $|t| \leqq R$ und beliebig kleine Werte von $w_1, \ldots, w_n$ (nämlich die Werte (10) mit kleinem positivem s). Nach der ersten Aussage ist g auch meromorph für $|t| = R$, $w_\nu \leqq R_1$ bei genügend kleinem R_1. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 1 aus der vorstehenden Arbeit erfüllt. Er besagt, daß g auch für $w_\nu = 0$, $t = 0$ meromorph ist. Dann ist aber auch

$$f(z_1, \ldots, z_n) = g(z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n; 0)$$

meromorph für $z_\nu = a_\nu$; denn die in g eingesetzten Werte sind nicht durchweg singulär für die Funktion g, wie eben die linke Seite zeigt.

Wir haben gefunden: Ist die Funktion f in einer gewissen Umgebung von P meromorph für alle Werte mit $\mathrm{Max}(\Phi, \Psi) > 0$, und gilt (3), so ist sie auch in Q, d. h. in allen Punkten von $\mathfrak{S}$ meromorph. Soll also $\mathfrak{S}$ eine einspringende Kante des Meromorphiebereiches, d. h. f auf $\mathfrak{S}$ wesentlich singulär sein, so ist die Annahme (3) durch

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix}\Phi_1, \ldots, \Phi_n \\ \Psi_1, \ldots, \Psi_n\end{pmatrix} = 1$$

zu ersetzen; der Rang Null kommt nicht in Frage, da die Ableitungen nicht alle gleich Null sind. Wir können also

$$\Psi_\nu = \lambda \Phi_\nu, \qquad \Psi_{\bar\nu} = \bar\lambda \Phi_{\bar\nu}$$

setzen. Wegen (2) und (11) ist $\lambda \neq \bar\lambda$, λ nicht reell. Ist z. B. $\Phi_n \neq 0$, $\Psi_n \neq 0$, so können wir $\mathfrak{S}$ darstellen, indem wir z_n als Funktion von $z_1, \ldots, z_{n-1}$ ansetzen. Dann gilt

$$\sum_\nu \Phi_\nu dz_\nu + \sum_\nu \Phi_{\bar\nu} d\bar z_\nu = 0,$$

$$\sum_\nu \Psi_\nu dz_\nu + \sum_\nu \Psi_{\bar\nu} d\bar z_\nu = \lambda \sum_\nu \Phi_\nu dz_\nu + \bar\lambda \sum_\nu \Phi_{\bar\nu} d\bar z_\nu = 0.$$

Wegen $\lambda \neq \bar\lambda$ hat dies

$$\sum_\nu \Phi_\nu dz_\nu = 0$$

zur Folge, d. h. z_n hängt analytisch von $z_1, \ldots, z_{n-1}$ ab. Also ist eine einspringende Kante des Meromorphiebereiches einer analytischen Funktion immer dadurch zu erhalten, daß man eine Veränderliche analytisch von den übrigen abhängen läßt.

(Eingegangen am 24. 10. 1931.)