Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale.

(Von Herrn *A. Clebsch.*)

Die Untersuchung der Kriterien des Maximums und des Minimums einfacher Integrale hat bekanntlich auf die Betrachtung der zweiten Variation geführt, und zu der Entdeckung merkwürdiger Eigenschaften derselben Veranlassung gegeben. Es zeigte sich, dafs man dieselbe durch partielle Integration auf eine einfachere Form zurückzuführen vermochte; das Resultat dieser Integration liefs sich indefs nicht angeben, wenn nicht die Integration gewisser Differentialgleichungen ausgeführt wurde, deren verwickelter Charakter die Geometer lange Zeit von Integrationsversuchen abschreckte.

Jacobi war es, welcher bei einfachen Integralen mit *einer* abhängigen Variablen einen Zusammenhang dieser Gleichungen mit denjenigen entdeckte, welche das Verschwinden der ersten Variation mit sich führt; und indem sich für diesen Fall dann die Integration jener Transformationsgleichungen mit leichter Mühe ergab, wurde für diese Untersuchungen ein ganz neuer Ausgangspunkt von grofser Bedeutsamkeit gewonnen.

In einem frühern Aufsatze, welcher im 55^{sten} Bande p. 254 dieses Journals enthalten ist, habe ich nachgewiesen, dafs die *Jacobi*schen Principien eine Anwendung auf alle Probleme der Variationsrechnung gestatten, welche überhaupt von einfachen Integralen abhängen; und es ist dadurch die Untersuchung der zweiten Variation zurückgeführt worden auf die Untersuchung der Werthe, welche eine homogene Function zweiter Ordnung annehmen kann, zwischen deren Argumenten gewisse lineare Bedingungsgleichungen stattfinden.

Dieser Fortschritt, welcher wesentlich durch die in dem erwähnten Aufsatze niedergelegte Methode bedingt ist, führt sogleich auf die Vermuthung, dafs entsprechende Transformationen sich auch bei denjenigen Problemen der Variationsrechnung werden aufstellen lassen, welche eine gröfsere Anzahl von unabhängigen Variabeln enthalten. In der That habe ich folgenden Satz gefunden, dessen Entwicklung den Inhalt des gegenwärtigen Aufsatzes zu bilden bestimmt ist:

Die zweite Variation eines beliebigen vielfachen Integrals läfst sich immer durch partielle Integrationen auf das Integral einer homogenen Function zweiter Ordnung zurückführen, deren Argumente den respective höchsten Differentialquotienten der Variationen der abhängigen Veränderlichen entsprechen, während diese Argumente zugleich durch eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen an einander geknüpft sind.

Ich werde auch hier, wie in dem genannten Aufsatze, zunächst Integrale betrachten, welche nur die ersten Ableitungen der abhängigen Functionen enthalten, wo zwischen diesen Functionen selbst dann noch beliebig viel partielle Differentialgleichungen erster Ordnung als Bedingungsgleichungen bestehen können. Am Schlusse werde ich kurz auf den allgemeinern Fall übergehen, welcher auf den genannten immer zurückführbar ist.

§. 1.

Bezeichnen wir durch V ein beliebiges vielfaches Integral, welches ein Maximum oder Minimum werden soll; durch F die Function unter dem Integralzeichen, welche die unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_r$ und die abhängigen Functionen $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(n)}$ nebst deren ersten Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial x}$ enthält, so dafs

$$(1.)\quad V = \int^{(r)} F\,dx_1\,dx_2 \dots dx_r.$$

Die Functionen y, welche so bestimmt werden sollen, dafs die erste Variation von V verschwindet, mögen noch durch eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung an einander gebunden sein, welche durch

$$(2.)\quad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \dots\quad \varphi_\varkappa = 0$$

bezeichnet werden sollen.

Setzen wir nunmehr

$$(3.)\quad \Omega = F + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_\varkappa\varphi_\varkappa,$$

wo die λ gewisse Multiplicatoren bedeuten, so ist auch

$$(4.)\quad V = \int^{(r)} \Omega\,dx_1\,dx_2 \dots dx_r,$$

und die y, λ finden ihre Bestimmung durch die Gleichungen (2.), verbunden mit den folgenden:

$$(5.)\quad\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial y^{(1)}} = \Sigma_m \dfrac{\partial}{\partial x_m} \dfrac{\partial\Omega}{\partial \dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial x_m}}, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y^{(2)}} = \Sigma_m \dfrac{\partial}{\partial x_m} \dfrac{\partial\Omega}{\partial \dfrac{\partial y^{(2)}}{\partial x_m}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y^{(n)}} = \Sigma_m \dfrac{\partial}{\partial x_m} \dfrac{\partial\Omega}{\partial \dfrac{\partial y^{(n)}}{\partial x_m}}, \end{cases}$$

während sich die Gleichungen (2.) diesen analog auch darstellen lassen durch:

$$(6.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_1} = 0,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_2} = 0,\quad \dots\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_\varkappa} = 0.$$

Die Entscheidung der Frage, ob eine bestimmte Lösung dieser Gleichungen das Integral V zu einem Maximum oder Minimum mache, hängt von der Untersuchung der zweiten Variation ab. Wenn wir in dem Ausdruck (4.) die $y^{(i)}$, λ_h um kleine Gröfsen $\varepsilon w^{(i)}$, $\varepsilon\mu_h$ wachsen lassen, und nach den Potenzen von ε entwickeln, so erhalten wir:

$$(7.)\quad V+\delta V+\delta^2 V = \int^{(r)} (\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\dots)\,dx_1\,dx_2\dots dx_r,$$

abgesehen von einem Theile, welcher durch die Veränderungen in den Grenzen herbeigeführt werden kann, und nur aus Integralen niederer Ordnung bestehen darf. Der Ausdruck

$$\int^{(r)} \Omega_1\,dx_1\,dx_2\dots dx_r$$

ist wegen der Gleichungen (5.) durch partielle Integrationen ebenfalls in Integrale niederer Ordnung auflösbar. Das Zeichen der zweiten Variation aber, d. h. von

$$(8.)\quad \delta^2 V = \varepsilon^2\int^{(r)} \Omega_2\,dx_1\,dx_1\dots dx_r,$$

ist für das Bestehen eines Maximums oder Minimums von Entscheidung. Diese Function ist es, welche jetzt näher untersucht werden soll.

§. 2.

Ω_2 ist eine homogene Function zweiter Ordnung der $n(r+1)+\varkappa$ Gröfsen w, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, μ; doch so, dafs die letzten nur auf lineare Weise in ihr vorkommen; und zwar kann man Ω_2 aus Ω_1 und Ω in der Weise darstellen, dafs

$$(9.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \Sigma_i w^{(i)} \dfrac{\partial \Omega}{\partial y^{(i)}} + \Sigma_i \Sigma_m \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial y^{(i)}}{\partial x_m}} + \Sigma_h \mu_h \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda_h}, \\ 2\Omega_2 = \Sigma_i w^{(i)} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y^{(i)}} + \Sigma_i \Sigma_m \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \dfrac{\partial y^{(i)}}{\partial x_m}} + \Sigma_h \mu_h \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_h}. \end{cases}$$

Da die Functionen y aber noch durch die Gleichungen (2.) an einander gebunden sind, welche auch durch die Functionen $y + \varepsilon w$ erfüllt sein müssen, so erhält man für die w eine Reihe von Bedingungsgleichungen, welche, wenn die Functionen φ durch Variation der y in $\varphi + \varepsilon \psi$ übergehen, sich darstellen durch:

$$(10.)\quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots \quad \psi_\varkappa = 0,$$

oder auch, was dasselbe ist, durch:

$$(11.)\quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_\varkappa} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die in die μ multiplicirten Theile von Ω_2 verschwinden.

Ich stelle mir nun die Aufgabe, durch theilweise Integration den Ausdruck $\delta^2 V$ so umzugestalten, dafs an die Stelle der Function Ω_2, welche $n(r+1)$ Argumente w, $\frac{\partial w}{\partial x}$ enthält, eine andere tritt, in welcher nur nr Argumente auftreten. Es mufs also Ω_2 zerlegt werden in einen Theil, welcher durch theilweise Integration vollständig in ein Aggregat von Integralen niederer Ordnung aufgelöst werden kann, und in einen andern, dessen nr Argumente sich als lineare Functionen der w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ darstellen müssen.

Der erste Theil der Function Ω_2 mufs aber nothwendig die Gestalt haben:

$$(12.)\quad \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial B_r}{\partial x_r} = \Theta(w),$$

wo die B homogene Functionen zweiter Ordnung der w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ bedeuten. Wenn man aber die Differentiationen in Θ ausgeführt denkt, so dürfen in demselben zweite Ableitungen der w nicht vorkommen. Daraus geht hervor, dafs erstlich die $\frac{\partial w}{\partial x}$ in die B überhaupt nur auf lineare Weise eingehen dürfen; und zweitens, dafs der Coefficient von $w^{(i)} \cdot \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_m}$ in B_s, und der Coefficient von $w^{(i)} \cdot \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s}$ in B_m gleich und entgegengesetzt sein müssen. So geht also $\Theta(w)$ in eine Function zweiter Ordnung der w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ über, welche die Eigenschaft hat, dafs sie die zweiten Dimensionen der letztern nur in den Verbindungen

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_s}\cdot\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_m}-\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s}$$

enthält. Das Aggregat dieser Terme höchster Ordnung in Θ soll durch $\left(\Theta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$ bezeichnet werden.

In welcher Form nun auch die nr neuen Argumente sich darstellen mögen, so kann man sich die Gleichungen, mit deren Hülfe sie sich aus den w, $\frac{\partial w}{\partial x}$ zusammensetzen, dennoch immer nach den nr Gröfsen $\frac{\partial w}{\partial x}$ aufgelöst denken, und die linearen Verbindungen der neuen Argumente, welche in die so aufgelösten Gleichungen eingehen, als die neuen Argumente selber betrachten. Bezeichnen wir diese dann durch $W_m^{(i)}$, so haben sie also die Gestalt:

$$(13.)\qquad W_m^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}+\alpha_m^{i,1}w^{(1)}+\alpha_m^{i,2}w^{(2)}+\cdots\alpha_m^{i,n}w^{(n)},$$

wo die α noch zu bestimmende Coefficienten bedeuten, deren Zahl sich auf n^2r beläuft.

Bezeichnet man nun, dem Vorhergehenden analog, das Aggregat der Terme höchster Ordnung in Ω_2 durch $\left(\Omega_2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$, so sieht man ohne Weiteres, dafs der nach Ausführung der theilweisen Integration übrigbleibende Theil von Ω_2 nichts Anderes sein kann als

$$(\Omega_2(W))-(\Theta(W));$$

und dafs man also die Gleichung haben mufs:

$$(14.)\qquad \Omega_2 = (\Omega_2(W))-(\Theta(W))+\Theta(w),$$

welche die verlangte Transformation in sich schliefst. In derselben sind die Terme höchster Ordnung bereits übereinstimmend; die Coefficienten der $w^{(i)}.w^{(h)}$ und $w^{(i)}.\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_m}$ geben dann eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung der α und B.

Aber die Gleichung (14.) ist nicht nothwendig eine identische, sondern darf nur eine solche werden mit Hülfe der Bedingungsgleichungen (10.) oder (11.), welche die w mit einander verbinden. Soll also die Gleichung (14.) eine identische werden, so mufs man noch die Summe der Ausdrücke (11.) hinzufügen, multiplicirt mit linearen Functionen der w, deren Coefficienten willkürlich sind. Bemerken wir aber, dafs Ω_2 in der Form (9.) die verschwindenden Terme

$$\Sigma_h \mu_h \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_h}$$

enthielt, was eben ein Ausdruck der gedachten Form ist, nur dafs an die Stelle von linearen Functionen der w hier die μ getreten sind. Läfst man daher diese Terme in Ω_2 stehen, so kann man sie benutzen, um die Gleichung (14.) eben dadurch zu einer identischen zu machen, dafs man die μ als lineare Functionen der w darstellt; und die Aufgabe spricht sich daher so aus:

Die Gleichung (14.) *soll identisch erfüllt werden, indem den Ausdrücken* μ *die Gestalt*

$$(15.)\qquad \mu_h = M_h^{(1)} w^{(1)} + M_h^{(2)} w^{(2)} + \cdots M_h^{(n)} w^{(n)}$$

gegeben wird.

§. 3.

Aber die Aufgabe, wie sie in §. 2 enthalten, ist noch nicht bestimmt, wie man leicht übersehen kann.

Auch ist es von vorn herein zweckmäfsig, noch gewisse andere Forderungen an die gesuchte Transformation zu stellen. In der That, es ist wünschenswerth, *dafs alle zwischen den W bestehenden Bedingungsgleichungen sich durch diese allein darstellen lassen,* ohne dafs man es nöthig habe, auf die w zurückzugehen. Die Betrachtung der zweiten Variation hat es dann überhaupt nicht mehr mit den w zu thun, sondern allein mit den W, die durch gewisse gewöhnliche Gleichungen und Differentialgleichungen an einander gebunden erscheinen.

Diese Bemerkung genügt, um das gestellte Problem nicht nur bestimmt, sondern auch auflösbar zu machen, was es in der unbestimmten Fassung keineswegs allgemein ist.

Die Bedingungen, welche sich hierdurch ergeben, sind von zweierlei Art. Die ersten entspringen daraus, dafs die Functionen ψ sich als lineare Functionen der W allein müssen darstellen lassen, oder dafs, wenn man aus ihnen die Gröfsen $\frac{\partial w}{\partial x}$ mittelst der Gleichungen (13.) eliminirt, die Coefficienten der w verschwinden. Für jedes ψ erhält man auf diese Weise n Gleichungen.

Die andere Art von Bedingungsgleichungen geht daraus hervor, dafs die Gleichungen (13.) sich sollen ersetzen lassen durch gewisse zwischen den W ohne Beihülfe der w bestehende partielle Differentialgleichungen. Man bildet diese Form, indem man zunächst aus $W^{(i)}_m$ und $W^{(i)}_k$ die Differentialquotienten von w eliminirt. Dann wird also:

$$\frac{\partial W^{(i)}_m}{\partial x_k} - \frac{\partial W^{(i)}_k}{\partial x_m} = \Sigma_h w^{(h)} \left(\frac{\partial \alpha^{i,h}_m}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha^{i,h}_k}{\partial x_m} \right) + \Sigma_h \left(\alpha^{i,h}_m \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_k} - \alpha^{i,h}_k \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_m} \right).$$

In dem letzten Theil der rechten Seite kann man nun wieder $\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_m}$ mit Hülfe der Gleichungen (13.) eliminiren; und derselbe geht dann über in:

$$-\Sigma_h \Sigma_s w^{(s)} (\alpha^{i,h}_m \alpha^{h,s}_k - \alpha^{i,h}_k \alpha^{h,s}_m) + \Sigma_h (\alpha^{i,h}_m W^{(h)}_k - \alpha^{i,h}_k W^{(h)}_m).$$

Soll man also partielle Differentialgleichungen zwischen den W allein erhalten, so ist es nöthig, dafs die Coefficienten der w in dieser Gleichung verschwinden, und dafs also die α an einander gebunden sind durch die Gleichungen:

$$(16.) \qquad \frac{\partial \alpha^{i,s}_m}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha^{i,h}_k \alpha^{h,s}_m = \frac{\partial \alpha^{i,s}_k}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha^{i,h}_m \alpha^{h,s}_k,$$

während dann zwischen den W die ganz ähnlichen Gleichungen bestehen:

$$(17.) \qquad \frac{\partial W^{(i)}_m}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha^{i,h}_k W^{(h)}_m = \frac{\partial W^{(i)}_k}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha^{i,h}_m W^{(h)}_k.$$

Es soll nun die Bedeutung der Gleichungen (16.) untersucht und die allgemeine Form angegeben werden, welche die α ihnen zufolge annehmen; sodann aber soll gezeigt werden, dafs es für jedes System der W, welches den Gleichungen (17.) genügt, ein System der w giebt, welches die Gleichungen (13.) befriedigt, *und dafs also in der That die Gleichungen* (13.) *und* (17.) *als vollkommen aequivalent angesehen werden dürfen.*

§. 4.

Die Gleichung (16.) stellt ein System von $n^2 \cdot \frac{r.r-1}{2}$ Gleichungen dar. Multipliciren wir nun jene Gleichung mit irgend einer Gröfse u^s, und nehmen die Summe für s, so entsteht aus (16.) die Gleichung

$$\Sigma_s \frac{\partial \alpha^{i,s}_m}{\partial x_k} u^s + \Sigma_h \Sigma_s \alpha^{i,h}_k \alpha^{h,s}_m u^s$$
$$= \Sigma_s \frac{\partial \alpha^{i,s}_k}{\partial x_m} u^s + \Sigma_h \Sigma_s \alpha^{i,h}_m \alpha^{h,s}_k u^s.$$

Addiren wir hier noch auf beiden Seiten die gleichen Ausdrücke

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_k \partial x_m} + \Sigma_s \alpha_m^{i,s} \frac{\partial u^s}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_k^{i,h} \frac{\partial u^h}{\partial x_m}$$
$$= \frac{\partial^2 u^i}{\partial x_k \partial x_m} + \Sigma_s \alpha_k^{i,s} \frac{\partial u^s}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} \frac{\partial u^h}{\partial x_m}$$

und setzen zugleich

$$(18.)\qquad A_m^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} u^1 + \alpha_m^{i,2} u^2 + \cdots \alpha_m^{i,n} u^n,$$

so nimmt die obige Gleichung die Gestalt an:

$$(19.)\qquad \frac{\partial A_m^i}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha_k^{i,h} A_m^h = \frac{\partial A_k^i}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} A_k^h.$$

Es ist nun klar, dafs man diese Gleichungen ohne Weiteres an die Stelle der Gleichungen (16.) kann treten lassen, wenn man nur n verschiedene Systeme der u einführt, deren Determinante von Null verschieden ist. Bezeichnen wir die ein und demselben Systeme angehörigen u durch

$$u^{1,\sigma},\quad u^{2,\sigma},\quad \ldots\quad u^{n,\sigma},$$

so müssen wir ähnlich n Systeme der A unterscheiden, welche durch die Gleichung bestimmt sind:

$$(20.)\qquad A_m^{i,\sigma} = \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} u^{1,\sigma} + \alpha_m^{i,2} u^{2,\sigma} + \cdots \alpha_m^{i,n} u^{n,\sigma}.$$

Und an die Stelle der Gleichung (19.) tritt die folgende:

$$(21.)\qquad \frac{\partial A_m^{i,\sigma}}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha_k^{i,h} A_m^{h,\sigma} = \frac{\partial A_k^{i,\sigma}}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} A_k^{h,\sigma}.$$

Aber die A enthalten ja noch die n^2 vollkommen willkürlichen Gröfsen u. Diese kann ich mir so bestimmt denken, dafs alle A_1 verschwinden, d. h. dafs sie n von einander unabhängige Systeme von Lösungen der simultanen Gleichungen:

$$(22.)\qquad 0 = \frac{\partial u^i}{\partial x_1} + \alpha_1^{i,1} u^1 + \alpha_1^{i,2} u^2 + \cdots \alpha_1^{i,n} u^n$$

darstellen. Sehen wir, welche Werthe alsdann die übrigen Functionen A annehmen.

Wenn wir in (21.) $k=1$ setzen, so haben wir für jeden Werth von m, der von 1 verschieden ist:

$$0 = \frac{\partial A_m^{i,\sigma}}{\partial x_1} + \alpha_1^{i,1} A_m^{1,\sigma} + \alpha_1^{i,2} A_m^{2,\sigma} + \cdots \alpha_1^{i,n} A_m^{n,\sigma}.$$

Was mit der Gleichung (22.) zusammengestellt, ohne Weiteres zeigt, dafs die $A_m^{i,\sigma}$ nichts anderes sein können, als Lösungen dieses Systems, d. h. lineare Functionen von

$$u^{i,1},\quad u^{i,2},\quad \ldots\quad u^{i,n},$$

oder endlich, dafs

$$(23.)\qquad A_m^{i,\sigma} = \beta_m^{1,\sigma} u^{i,1} + \beta_m^{2,\sigma} u^{i,2} + \cdots \beta_m^{n,\sigma} u^{i,n},$$

wo die β von x_1 unabhängig sind.

Führen wir diese Werthe nun in diejenigen Gleichungen (21.) ein, in welchen weder m noch k den Werth 1 hat. Dann kommt:

$$(24.)\qquad \Sigma_\varrho \frac{\partial \beta_m^{\varrho,\sigma} u^{i,\varrho}}{\partial x_k} + \Sigma_h \Sigma_\varrho \alpha_k^{i,h} \beta_m^{\varrho,\sigma} u^{h,\varrho} = \Sigma_\varrho \frac{\partial \beta_k^{\varrho,\sigma} u^{i,\varrho}}{\partial x_m} + \Sigma_h \Sigma_\varrho \alpha_m^{i,h} \beta_k^{\varrho,\sigma} u^{h,\varrho}.$$

Für die Summe $\Sigma_h \alpha_k^{i,h} u^{h,\varrho} + \dfrac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_k}$, welche nichts anderes als $A_k^{i,\varrho}$ ist, können wir wieder aus (23.) ihren Werth setzen; und dadurch reducirt sich die obige Gleichung auf:

$$(25.)\qquad \Sigma_\varrho u^{i,\varrho}\left(\frac{\partial \beta_m^{\varrho,\sigma}}{\partial x_k} + \Sigma_\tau \beta_m^{\tau,\sigma} \beta_k^{\varrho,\tau}\right) = \Sigma_\varrho u^{i,\varrho}\left(\frac{\partial \beta_k^{\varrho,\sigma}}{\partial x_m} + \Sigma_\tau \beta_k^{\tau,\sigma} \beta_m^{\varrho,\tau}\right).$$

Da in diesen Gleichungen aber die Determinante der u nach der Voraussetzung nicht verschwinden soll, so mufs man die Gleichungen erfüllen:

$$(26.)\qquad \frac{\partial \beta_m^{\varrho,\sigma}}{\partial x_k} + \Sigma_\tau \beta_m^{\tau,\sigma} \beta_k^{\varrho,\tau} = \frac{\partial \beta_k^{\varrho,\sigma}}{\partial x_m} + \Sigma_\tau \beta_k^{\tau,\sigma} \beta_m^{\varrho,\tau},$$

welche von der unabhängigen Variablen x_1 ganz befreit sind, und sich nur dadurch von dem System (16.), welches die α bedingte, unterscheidet.

Man kann nun auf diese β dasselbe Verfahren anwenden, welches soeben zur Darstellung der α gedient hat. Wir können also die Gleichungen (26.) mit n von einander unabhängigen Systemen

$$v^{1,\lambda},\quad v^{2,\lambda},\quad \ldots\quad v^{n,\lambda}$$

multipliciren, wo die v aber von x_1 unabhängig sind, um Gleichungen zu gewinnen, welche mit (21.) analog sind, und analog den A neue Functionen B einführen, so dafs

$$(27.)\qquad B_m^{i,\lambda} = \frac{\partial v^{i,\lambda}}{\partial x_m} + \beta_m^{i,1} v^{1,\lambda} + \beta_m^{i,2} v^{2,\lambda} + \cdots;$$

und indem man dann die v so bestimmt denkt, dafs alle B_2 verschwinden, erhält man für $m = 3, 4, \ldots n$ die Gleichung

$$(28.)\qquad B_m^{i,\lambda} = \gamma_m^{1,\lambda} v^{i,1} + \gamma_m^{2,\lambda} v^{i,2} + \cdots,$$

wo die γ von x_1, x_2 unabhängig sind, und einem Systeme von Gleichungen genügen müssen, welches den Systemen (16.), (26.) vollkommen gleich ist, aber weder x_1 noch x_2 mehr enthält.

Auf diesem Wege fortschreitend, gelangt man allmälig zur vollständigen Darstellung der α, ausgedrückt durch

$$\begin{array}{llll} n^2 & \text{Functionen } u^{i,\sigma} & \text{von} & x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_n, \\ n^2 & \text{Functionen } v^{i,\sigma} & \text{von} & x_2,\, x_3,\, \ldots\, x_n, \\ n^2 & \text{Functionen } w^{i,\sigma} & \text{von} & x_3,\, \ldots\, x_n \end{array}$$

u. s. w.

Ich will jetzt zeigen, dafs man, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen, alle diese Functionen bis auf die u verschwinden lassen kann.

Multipliciren wir nämlich die Gleichung (23.) mit $v^{\sigma,\lambda}$, und nehmen nach σ die Summe, so kommt, mit Berücksichtigung von (27.):

$$\Sigma_\sigma A^{i,\sigma}_m v^{\sigma,\lambda} = u^{i,1} B^{1,\lambda}_m + u^{i,2} B^{2,\lambda}_m + \cdots - \left\{ u^{i,1} \frac{\partial v^{1,\lambda}}{\partial x_m} + u^{i,2} \frac{\partial v^{2,\lambda}}{\partial x_m} + \cdots \right\}.$$

Oder, indem man auch noch (28.) zu Hülfe nimmt:

$$(29.)\quad \Sigma_\sigma A^{i,\sigma}_m v^{\sigma,\lambda} + \Sigma_\sigma u^{i,\sigma} \frac{\partial v^{\sigma,\lambda}}{\partial x_m} = \gamma^{1,\lambda}_m \Sigma_\sigma u^{i,\sigma} v^{\sigma,1} + \gamma^{2,\lambda}_m \Sigma_\sigma u^{i,\sigma} v^{\sigma,2} + \cdots \gamma^{n,\lambda}_m \Sigma_\sigma u^{i,\sigma} v^{\sigma,n};$$

wo, wenn $m = 1$ oder $m = 2$ ist, die rechte Seite verschwindet.

Die linke Seite dieser Gleichung ist nichts Anderes als derjenige Ausdruck, in welchen $A^{i,\lambda}_m$ übergeht, sobald darin überall an die Stelle von $u^{i,\lambda}$ der Ausdruck $\Sigma_\sigma u^{i,\sigma} v^{\sigma,\lambda}$ gesetzt wird. Man sieht also, dafs überall die Functionen u, v nur in den Verbindungen

$$\Sigma_\sigma u^{i,\sigma} v^{\sigma,\lambda}$$

vorkommen. Und da die $u^{i,\sigma}$ keine andere Eigenschaft besitzen sollten, als n unabhängige Systeme von Lösungen der Gleichungen (22.) darzustellen, eine Eigenschaft, welche diesen Verbindungen ebenfalls zukommt, so kann man offenbar diese Verbindungen unmittelbar an die Stelle der $u^{i,\sigma}$ setzen, und durch $u^{i,\sigma}$ bezeichnen. Dann aber zeigen die Gleichungen (29.) *dafs, unbeschadet der Allgemeinheit, die A_1 sowohl als die A_2 gleich Null gesetzt werden können, und dafs die übrigen durch die Gleichung*

$$A^{i,\lambda}_m = \gamma^{1,\lambda}_m u^{i,1} + \gamma^{2,\lambda}_m u^{i,2} + \cdots \gamma^{n,\lambda}_m u^{i,n}$$

ausgedrückt werden, wo die γ sowohl von x_1 als von x_2 unabhängig sind.

Man braucht jetzt aber nur dieselbe Schlufsweise zu wiederholen, um zu zeigen, dafs man auch die A_3 sämmtlich verschwinden lassen, und die übrigen dann auf lineare Ausdrücke der u reduciren kann, deren Coefficienten auch noch von x unabhängig sind. So gelangt man endlich zu dem Schlufs, dafs überhaupt alle A_m gleich Null gesetzt werden können; und somit hat man das Theorem bewiesen:

Die allgemeinsten Werthe der Functionen α, welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial \alpha_m^{i,s}}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha_k^{i,h} \alpha_m^{h,s} = \frac{\partial \alpha_k^{i,s}}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} \alpha_k^{h,s},$$

sind diejenigen, welche man aus der Bestimmung der α durch die Gleichungen

$$(30.)\qquad 0 = \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_k} + \alpha_k^{i,1} u^{1,\sigma} + \alpha_k^{i,2} u^{2,\sigma} + \cdots \alpha_k^{i,n} u^{n,\sigma}$$

gewinnt, wo die u vollkommen beliebige n^2 Functionen darstellen, deren Determinante nicht verschwindet.

§. 5.

Hieran knüpft sich nun leicht der Beweis, dafs auch die Ausdrücke der W, wie sie in den Gleichungen (13.) gegeben sind, die allgemeinsten Functionen darstellen, welche den Gleichungen (17.) genügen.

Aus der Ableitung dieser Gleichungen folgt zunächst, dafs sie in der That erfüllt werden müssen, wenn man

$$(31.)\qquad \left\{\begin{aligned} W_m^{(i)} &= \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} w^{(1)} + \alpha_m^{i,2} w^{(2)} + \cdots \alpha_m^{i,n} w^{(n)} \\ &= \mathrm{W}_m^{(i)} \end{aligned}\right.$$

setzt, wo die w irgend beliebige Functionen bedeuten. Und da die Gleichungen (17.) linear sind, so bleiben sie offenbar immer richtig, wenn man statt $W_m^{(i)}$ darin die Differenz $W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)}$ einführt.

Nun ist es ohne Zweifel immer möglich, welches auch die wirklichen Werthe der W sein mögen, die Functionen w so zu bestimmen, dafs für $m = 1$ diese Differenz $W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)}$ verschwindet. Dann folgt aber aus den Gleichungen (17.) für $k = 1$, und für ein m, welches von 1 verschieden ist:

$$\frac{\partial (W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)})}{\partial x_1} + \Sigma_h \alpha_1^{i,h} (W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)}) = 0,$$

d. h. es mufs $W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)}$ eine lineare Function der Lösungen von (22.) sein, oder:

$$(32.)\qquad W_m^{(i)} - \mathrm{W}_m^{(i)} = b_m^1 u^{i,1} + b_m^{(2)} u^{i,2} + \dots b_m^{(n)} u^{i,n};$$

wo die b_m von x_1 unabhängig sind.

Führen wir nunmehr diese Werthe in diejenigen Gleichungen (17.) ein, für welche weder $m=1$ noch $k=1$. Dann erhalten wir zunächst:

$$\Sigma_\varrho \frac{\partial (b_m^\varrho u^{i,\varrho})}{\partial x_k} + \Sigma_h \Sigma_\varrho \alpha_k^{i,h} b_m^\varrho u^{h,\varrho} = \Sigma_\varrho \frac{\partial (b_k^\varrho u^{i,\varrho})}{\partial x_m} + \Sigma_h \Sigma_\varrho \alpha_k^{i,h} b_m^\varrho u^{h,\varrho}.$$

Hier verschwinden aber die Coefficienten von b_m^ϱ und b_k^ϱ in Folge der Gleichungen (30.), welche die α definiren.

Sonach bleibt nur übrig:

$$\Sigma_\varrho u^{i,\varrho} \left(\frac{\partial b_m^\varrho}{\partial x_k} - \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_m} \right) = 0;$$

oder, weil die Determinante der u nicht verschwinden darf:

$$\frac{\partial b_m^\varrho}{\partial x_k} = \frac{\partial b_k^\varrho}{\partial x_m},$$

oder

$$(33.)\qquad b_m^\varrho = \frac{\partial c^\varrho}{\partial x_m}.$$

Dies in die rechte Seite der Gleichung (32.) eingeführt, giebt derselben aber die Gestalt:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial x_m} u^{i,1} + \frac{\partial c^{(2)}}{\partial x_m} u^{i,2} + \dots \frac{\partial c^{(n)}}{\partial x_m} u^{i,n},$$

oder auch:

$$\frac{\partial (c^{(1)} u^{i,1} + c^{(2)} u^{i,2} + \dots c^{(n)} u^{i,n})}{\partial x_m} - \left(c^{(1)} \frac{\partial u^{i,1}}{\partial x_m} + c^{(2)} \frac{\partial u^{i,2}}{\partial x_m} + \dots c^{(n)} \frac{\partial u^{i,n}}{\partial x_m} \right),$$

oder endlich, indem man aus den Gleichungen (30.) für die $\frac{\partial u}{\partial x}$ ihre Werthe substituirt:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} (\Sigma_\varrho c^\varrho u^{i,\varrho}) + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} (\Sigma_\varrho c^\varrho u^{i,\varrho});$$

was ein Ausdruck von der Form der $\mathrm{W}_m^{(i)}$ ist, nur dafs an die Stelle der w hier $\Sigma_\varrho c^\varrho u^{i,\varrho}$ getreten ist.

So sehen wir aus der Gleichung (32.), dafs wir zu dem allgemeinsten Ausdrucke von W gelangen, wenn wir in W statt $w^{(i)}$ den Ausdruck

$w^{(i)} + \Sigma_\varrho c^\varrho u^{i,\varrho}$ einsetzen. Und da dieser Ausdruck um Nichts allgemeiner ist als die ganz willkürliche Function $w^{(i)}$, so kann man ihn wiederum durch $w^{(i)}$ bezeichnen, und gelangt dann zu dem folgenden Theorem:

Die allgemeinsten Werthe der Functionen $W_m^{(i)}$, welche den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial W_m^{(i)}}{\partial x_k} + \Sigma_h \alpha_k^{i,h} W_m^{(h)} = \frac{\partial W_k^{(i)}}{\partial x_m} + \Sigma_h \alpha_m^{i,h} W^{(h)},$$

wo die α durch die Gleichungen

$$0 = \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_k} + \alpha_k^{i,1} u^{1,\sigma} + \alpha_k^{i,2} u^{2,\sigma} + \cdots \alpha_k^{i,n} u^{n,\sigma}$$

definirt sind, und die u ganz willkürliche Functionen darstellen, sind:

$$W_m^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} w^{(1)} + \alpha^{i,2} w^{(2)} + \cdots \alpha_m^{i,n} w^{(n)},$$

wo die w willkürliche Functionen bedeuten.

§. 6.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir endlich im Stande die Aufgabe, welche den eigentlichen Gegenstand dieser Untersuchungen ausmacht, vollständig zu formuliren.

Es soll die zweite Variation

$$\int^{(r)} \Omega_2 \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_r$$

durch theilweise Integration auf das Integral einer homogenen Function mit nr Argumenten $W_m^{(i)}$ zurückgeführt werden, welche mit den frühern Argumenten $w^{(n)}$ durch die Gleichungen

$$W_m^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} w^{(1)} + \alpha_m^{i,2} w^{(2)} + \cdots$$

verbunden sind; während die Coefficienten α mit Hülfe der Gleichungen

$$0 = \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m} + \alpha_m^{i,1} u^{1,\sigma} + \alpha_m^{i,2} u^{2,\sigma} + \cdots$$

auf n^2 Functionen u zurückkommen; und während ferner die x Functionen $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda}$ in lineare Functionen der W übergehn.

Die Transformation der Function Ω_2 ist nach dem Frühern (14.) durch die Gleichungen

$$(34.)\qquad \Omega_2 = (\Omega_2(W)) - (\Theta(W)) + \Theta(w)$$

ausgedrückt, in welcher die μ durch die Ausdrücke (15.) zu ersetzen sind; und in welcher endlich die Coefficienten der $\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s}$ bereits übereinstimmen.

Bezeichnen wir für den Augenblick durch Φ die rechte Seite von (34.), so ergeben sich zunächst die für die w und $\frac{\partial w}{\partial x}$ linearen Gleichungen

$$(35.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial w^{(i)}} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial w^{(i)}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}}, \end{cases}$$

deren Coefficienten auf beiden Seiten übereinstimmen müssen. Aus der zweiten dieser Gleichungen ergeben sich nur $n^2 r$ Gleichungen, da die Coefficienten der $\frac{\partial w^i}{\partial x_m}$ in ihnen bereits übereinstimmend gemacht sind; und aus der ersten Gleichung ergeben sich dann noch $\frac{n.n+1}{2}$ neue Gleichungen, welche von den Coefficienten der Producte $w^{(i)}.w^{(h)}$ in (34.) herrühren.

Jedenfalls mufs es daher genügen, wenn man die n ersten Gleichungen (35.) für n von einander unabhängige Werthsysteme der w erfüllt, und sodann zeigt, dafs den zweiten Gleichungen noch vollständig genügt werden kann.

Statt der ersten Gleichungen (35.) kann man sich aber auch der folgenden bedienen, welche mit Hülfe der zweiten Gleichung daraus gebildet sind:

$$(36.)\qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial w^{(i)}} - \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}} = \frac{\partial \Phi}{\partial w^{(i)}} - \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial \Phi}{\partial \dfrac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}}.$$

In diese Gleichung führe ich nun für die w successive die verschiedenen Systeme der u ein, und erhalte demnach aus (36.) n^2 Gleichungen. Sehen wir, wie sich in Folge dessen die rechte Seite umgestaltet.

Die Functionen u haben, in Folge der Gleichungen (13.) und (30.) die Eigenschaft, an Stelle der w gesetzt, die W sämmtlich identisch verschwinden zu machen. Derjenige Theil also von Φ, welcher die W zu Argumenten hat, verschwindet dann aus (36.) vollständig, und es bleibt von

Φ nur $\Theta(w)$ übrig. Aber $\Theta(w)$ ist eine homogene Function, welche die einmalige Integration in allen ihren Theilen zuläfst; daher mufs sie die Gleichungen

$$(37.)\quad \frac{\partial \Theta}{\partial w^{(i)}} - \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_m}} = 0$$

identisch erfüllen; und es verschwindet daher die rechte Seite von (36.) vollständig. Bezeichnet man nun durch Ω_2^σ diejenige Function, in welche Ω_2 übergeht, wenn darin die $w^{(i)}$ durch die $u^{i,\sigma}$ ersetzt werden, so zeigt sich also, dafs die $u^{i,\sigma}$ den Gleichungen genügen müssen:

$$(38.)\quad \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial u^{i,\sigma}} - \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} = 0.$$

Hier ist noch eine Bemerkung erforderlich. In Ω_2 kommen die Functionen μ vor, welche, um die Gleichung (34.) zu einer identischen zu machen, den Ausdrücken (15.) gleich gesetzt werden mufsten. Bei den Differentiationen in (35.), (36.), (38.) müfsten daher auch die μ als Functionen der w aufgefafst werden.

In der That aber verschwinden die durch eine Differentiation nach den μ entstehenden Theile aus den Gleichungen (38.) vollständig. Der betreffende Theil von $\frac{\partial \Omega_2}{\partial w^{(i)}}$ ist nämlich

$$\Sigma_h \frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_h} \cdot \frac{\partial \mu_h}{\partial u^{(i)}};$$

da nun die Ausdrücke $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_h}$ sich zugleich als lineare Functionen der W darstellen sollen, so müssen dieselben offenbar verschwinden, wenn man die $w^{(i)}$ in die $u^{i,\sigma}$ übergehen, d. h. die W sämmtlich verschwinden läfst. Somit kann man also bei der Differentiation in (38.) die μ als von den u ganz unabhängig betrachten, und nur ihnen zuletzt durch Einführung der u in (15.) die Werthsysteme

$$\mu_1^\sigma,\ \mu_2^\sigma,\ \dots\ \mu_\varkappa^\sigma$$

beilegen.

Zugleich aber hat man die Gleichungen zu erfüllen:

$$(39.)\quad \frac{\partial \Omega_1^\sigma}{\partial \lambda_1} = 0,\quad \frac{\partial \Omega_1^\sigma}{\partial \lambda_2} = 0,\quad \dots\quad \frac{\partial \Omega_1^\sigma}{\partial \lambda_\varkappa} = 0,$$

welche $n\varkappa$ an der Zahl, und also der vollständige Ausdruck dafür sind, dafs die Functionen $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda}$ sich als lineare Verbindungen der W, ohne Beihülfe der w, darstellen lassen.

Die Gleichungen (38.), (39.) zusammen dienen nun dazu, die Functionen $u^{i,\sigma}$ und μ_h^σ, oder, wenn man will, die Functionen u und M, deren Zahl ebenso grofs ist, zu bestimmen; und zwar hat man $n.\varkappa + n^2$ Gleichungen mit ebensoviel unbekannten Gröfsen. Aber in diesen Gleichungen kommen die den verschiedenen Werthen von σ entsprechenden Systeme der Unbekannten getrennt, und stets auf dieselbe Weise vor. Man hat daher das merkwürdige Resultat, welches die unmittelbare Erweiterung der von *Jacobi* eingeführten Betrachtungen darstellt:

Die verschiedenen Systeme der $u^{(i)}$ und μ_h sind ebensoviel verschiedene Lösungen der Systeme von partiellen Differentialgleichungen:

$$(40.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial u^{(i)}} = \Sigma_m \dfrac{\partial}{\partial x_m} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \dfrac{\partial u^{(i)}}{\partial x_m}} \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_h} = \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_h} = 0, \end{cases}$$

welche das Integral

$$\delta^2 V = \varepsilon^2 \int^r \Omega_2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_r$$

zu einem Maximum oder Minimum machen.

§. 7.

Die Lösungen der Gleichungen (40.) kann man nun leicht darstellen, wenn die Lösungen der Gleichungen (5.), (6.) als bekannt vorausgesetzt werden.

Es seien $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(n)}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die allgemeinsten Lösungen der Gleichungen (5.), (6.). Sei a irgend eine darin vorkommende willkürliche Constante, P irgend eine darin vorkommende willkürliche Function. Dann erhält man offenbar neue Lösungen, wenn man die Constante a in $a + \varepsilon\alpha$, die Function P in $P + \varepsilon\Pi$ übergehen läfst, wo α eine neue willkürliche Constante, Π eine neue willkürliche Function, deren Argumente mit denen von P übereinstimmen, und ε eine sehr kleine Gröfse bedeutet. Durch diese Operation gehen nun, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt, die y über in $y + \varepsilon u + \cdots$, die λ in $\lambda + \varepsilon\mu + \cdots$, und man hat die Gleichungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} u^{(i)} = \Sigma\left(\alpha\frac{\partial y^{(i)}}{\partial a}+\Pi\frac{\partial y^{(i)}}{\partial P}\right), \\ \mu_h = \Sigma\left(\alpha\frac{\partial \lambda_h}{\partial a}+\Pi\frac{\partial \lambda_h}{\partial P}\right), \end{cases}$$

wo die Summen über alle in den $y^{(i)}$, λ_h enthaltenen willkürlichen Constanten und Functionen auszudehnen sind. Zugleich aber geht Ω über in

$$\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2+\cdots;$$

wo nur in den Functionen Ω_1, Ω_2 jetzt die u an Stelle der w getreten sind. Nun ist offenbar

$$\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial y^{(i)}} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial u^{(i)}},$$

$$\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial\frac{\partial y^{(i)}}{\partial x_m}} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_m}},$$

$$\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial\lambda_h} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots)}{\partial\mu_h}.$$

Und hieraus folgt sogleich:

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial y^{(i)}} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial u^{(i)}},$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\frac{\partial y^{(i)}}{\partial x_m}} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_m}},$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\lambda_h} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_h}.$$

Und da nun die Gleichungen (5.), (6.), indem man darin $\Omega+\varepsilon\Omega_1+\varepsilon^2\Omega_2\ldots$, wie es gestattet ist, an die Stelle von Ω treten läfst, als Coefficienten von ε die Gleichungen geben:

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial y^{(i)}} = \Sigma_m\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\frac{\partial y^{(i)}}{\partial x_m}},$$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial\lambda_h} = 0,$$

so sieht man mit Hülfe der obigen Gleichungen, dafs die hier eingeführten u und μ nichts anderes darstellen, als die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (40.). *Die verschiedenen Systeme der $u^{i,\sigma}$, μ_h^σ müssen sich also aus den Gleichungen* (41.) *gewinnen lassen, indem man nur den α und Π verschiedene Werthsysteme beilegt; d. h. es mufs sein:*

$$(42.)\quad \begin{cases} u^{i,\sigma} = \Sigma\left(\alpha^\sigma \dfrac{\partial \gamma^{(i)}}{\partial a} + \Pi^\sigma \dfrac{\partial \gamma^{(i)}}{\partial P}\right), \\ \mu_h^\sigma = \Sigma\left(\alpha^\sigma \dfrac{\partial \lambda_h}{\partial a} + \Pi^\sigma \dfrac{\partial \lambda_h}{\partial P}\right); \end{cases}$$

wodurch diese Gröfsen vollständig auf Bekanntes zurückgeführt sind.

§. 8.

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der Function Θ übrig, und diese erfolgt mit Hülfe der zweiten Gleichung (35.)

Erinnern wir uns, dafs jede der Gleichungen, welche dieselbe darstellt, nur auf n Gleichungen führen kann, indem man die Coefficienten der w auf beiden Seiten einander gleich setzt, so genügt es offenbar, um diese Gleichung zu einer identischen zu machen, wenn man sie für n verschiedene den w beigelegte, unabhängige Werthsysteme erfüllt. Diese Werthsysteme seien wiederum die der u. Dann verschwinden in der Function Φ wieder sämmtliche von den W abhängige Glieder, und die zweite Gleichung (35.) geht in die folgende über:

$$(43.)\quad \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \dfrac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} = \frac{\partial \Theta^\sigma}{\partial \dfrac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}}.$$

Gehen wir nun auf die Beschaffenheit der Function Θ genauer ein. In der Gleichung (12.) stellte sich $\Theta(w)$ dar durch den Ausdruck

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial B_r}{\partial x_r},$$

wo die B_h homogene Functionen zweiter Ordnung der w und $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ waren, doch so, dafs die letztern nur auf lineare Weise darin vorkamen, und dafs aufserdem der Coefficient von $w^{(i)}\cdot\dfrac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s}$ in B_k dem Coefficienten von $w^{(i)}\cdot\dfrac{\partial w^{(h)}}{\partial x_k}$ in B_s gleich und entgegengesetzt war. Man kann also allgemein setzen:

$$(44.)\quad B_k = \Sigma_i \Sigma_h b_k^{i,h} w^{(i)} w^{(h)} + \Sigma_i \Sigma_h \Sigma_s a_{k,s}^{i,h} w^{(i)} \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s},$$

wo die Coefficienten b, a den Bedigungen unterliegen:

$$(45.)\quad b_k^{i,h} = b_k^{h,i}, \quad a_{k,s}^{i,h} = -a_{k,s}^{h,i} = -a_{s,k}^{i,h} = a_{s,k}^{h,i}.$$

Die Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen ist dann

$$\frac{n.n+1}{2}r+\frac{n.n-1}{2}\cdot\frac{r.r-1}{2};$$

und da (43.) nur $n^2.r$ Gleichungen liefert, so wird die Aufgabe scheinbar unbestimmt. Es läfst sich indefs zeigen, dafs es genügt, eine einzige Lösung zu kennen, und dafs für den vorliegenden Zweck alle Lösungen dasselbe Resultat liefern.

Wenn man in Θ die Werthe aus (44.) einführt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$(45.)\quad \Theta = \Sigma_i\Sigma_h\Sigma_k\frac{\partial b_k^{i,h}}{\partial x_k}w^{(i)}w^{(h)} + \Sigma_i\Sigma_h\Sigma_s w^{(i)}\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s}\left(2b_s^{i,h}+\Sigma_k\frac{\partial a_{k,s}^{i,h}}{\partial x_k}\right) + \Sigma_i\Sigma_h\Sigma_s\Sigma_k a_{k,s}^{i,h}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_k}\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_s};$$

und hierdurch geht die Gleichung (43.) über in:

$$(46.)\quad \frac{\partial\Omega_2^\sigma}{\partial\frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} = \Sigma_h u^{h,\sigma}\left(2b_m^{h,i}+\Sigma_k\frac{\partial a_{k,m}^{h,i}}{\partial x_k}\right)+2\Sigma_h\Sigma_s a_{s,m}^{h,i}\frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_s}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $u^{i,\varrho}$ und nehmen dann die Summe nach i, so kommt demnach:

$$\Sigma_i u^{i,\varrho}\frac{\partial\Omega_2^\sigma}{\partial\frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} = 2\Sigma_h\Sigma_i b_m^{h,i}u^{i,\varrho}u^{h,\sigma} + \Sigma_h\Sigma_i u^{h,\sigma}u^{i,\varrho}\left(\Sigma_k\frac{\partial a_{k,m}^{h,i}}{\partial x_k}\right) + 2\Sigma_h\Sigma_i\Sigma_s a_{s,m}^{h,i}u^{i,\varrho}\frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_s}.$$

Bezeichnen wir endlich durch $(\varrho,\sigma)_m$ die Ausdrücke:

$$(47.)\quad (\varrho,\sigma)_m = \tfrac{1}{2}\Sigma_i\left(u^{i,\varrho}\frac{\partial\Omega_2^\sigma}{\partial\frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} - u^{i,\sigma}\frac{\partial\Omega_2^\varrho}{\partial\frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m}}\right),$$

so kommt:

$$(48.)\quad (\varrho,\sigma)_m = \Sigma_h\Sigma_i u^{h,\sigma}u^{i,\varrho}\left(\Sigma_k\frac{\partial a_{k,m}^{h,i}}{\partial x_k}\right) + \Sigma_h\Sigma_i\Sigma_s a_{s,m}^{h,i}\left(u^{i,\varrho}\frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_s}+u^{h,\sigma}\frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_s}\right),$$

eine Gleichung, aus welcher die Functionen b ganz verschwunden sind. Bemerken wir, dafs (48.) $\frac{n.n-1}{2}.r$ Gleichungen darstellt, und denken wir uns die a bestimmt, so bleiben also aus dem System (46.) noch $\frac{n.n+1}{2}.r$ Gleichungen übrig, welche zur Bestimmung der b vollständig ausreichen. Um diese Bestimmung in symmetrischer Weise auszuführen, kann man nun, den Ausdrücken (47.) parallel, die Bezeichnungen einführen:

$$(49.)\quad [\varrho,\sigma]_m = 2\Sigma_i\left(u^{i,\varrho}\frac{\partial\Omega_2^\sigma}{\partial\frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} + u^{i,\sigma}\frac{\partial\Omega_2^\varrho}{\partial\frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m}}\right),$$

woraus sich dann ergiebt:

$$(50.)\quad \Sigma_h\Sigma_i b_m^{h,i} u^{i,\varrho}u^{h,\sigma} = [\varrho,\sigma]_m + \Sigma_h\Sigma_i\Sigma_s a_{s,m}^{h,i}\left(u^{i,\varrho}\frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_s} - u^{h,\sigma}\frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_s}\right).$$

Wenden wir uns aber zur genaueren Betrachtung der Gleichungen (48.).

§. 9.

Bei der Transformation der Function Ω_2 kommt es allein auf denjenigen Theil an, welcher in der reducirten Form unter dem $r$fachen Integrale stehen bleibt. Dieser Theil ist aber

$$(\Omega_2(W)) - (\Theta(W)),$$

und zwar ist, der jetzt eingeführten Bezeichnung zufolge:

$$(51.)\quad (\Theta(W)) = \Sigma_i\Sigma_h\Sigma_k\Sigma_s a_{k,s}^{i,h} W_k^i W_s^h.$$

Die vorliegende Aufgabe hat aber darauf geführt, dafs die a nicht vollständig bestimmt erscheinen, sondern eine unendliche Anzahl von Werthsystemen zulassen. Ich will nun zeigen, ***dafs die verschiedenen Ausdrücke, welchen $(\Theta(W))$ in Folge dessen gleich werden kann, sich nur um Functionen unterscheiden können, welche die einmalige Integration in allen ihren Theilen zulassen, welche also für den gegenwärtigen Zweck vollkommen aus der Betrachtung verschwinden.***

Bezeichnen wir durch c die Differenz zweier entsprechenden, verschiedenen solchen Systemen angehörigen a, und durch H die Differenz der dadurch entstehenden Functionen $(\Theta(W))$. Ich will beweisen, dafs H immer die einmalige Integration in allen seinen Theilen gestattet.

Aus der Gleichung (48.) folgt dann:

$$(52.)\quad 0 = \Sigma_h \Sigma_i u^{h,\sigma} u^{i,\varrho} \left(\Sigma_k \frac{\partial c^{h,i}_{k,m}}{\partial x_k}\right) + \Sigma_h \Sigma_i \Sigma_s c^{h,i}_{s,m} \left(u^{i,\varrho} \frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_s} + u^{h,\sigma} \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_s}\right),$$

während aus (51.) zugleich hervorgeht:

$$(53.)\quad H = \Sigma_i \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_s c^{i,h}_{k,s} W^i_k W^h_s.$$

Damit H die einmalige Integration zulasse, ist es nöthig und hinreichend, dafs es die Gleichungen

$$(54.)\quad \frac{\partial H}{\partial w^{(p)}} = \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial H}{\partial \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x_m}}$$

erfülle. Diese Gleichungen sind aber, wie man leicht zeigt, keine andern als die Gleichungen (52.), woraus das Behauptete erhellt. In der That, wenn wir die Gleichung (54.) bilden, so erhalten wir zunächst, mit Berücksichtigung der Werthe der W:

$$\Sigma_i \Sigma_h \Sigma_k \Sigma_s c^{i,h}_{k,s} \alpha^{i,p}_k W^{(h)}_s = \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} (\Sigma_h \Sigma_s c^{p,h}_{m,s} W^{(h)}_s)$$

$$= \Sigma_h \Sigma_s W^{(h)}_s \left(\Sigma_m \frac{\partial c^{p,h}_{m,s}}{\partial x_m}\right) + \Sigma_h \Sigma_s \Sigma_m c^{p,h}_{m,s} \frac{\partial W^{(h)}_s}{\partial x_m}.$$

Nehmen wir nun die Gleichungen (17.) hinzu, durch welche die W definirt sind, so zeigt sich leicht, indem man immer die Gleichung

$$c^{p,h}_{m,s} = -c^{h,p}_{m,s} = -c^{p,h}_{s,m} = c^{h,p}_{s,m}$$

bemerkt, dafs das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung durch

$$-\Sigma_h \Sigma_s \Sigma_m \Sigma_q c^{p,h}_{m,s} \alpha^{h,q}_m W^{(q)}_s$$

ersetzt werden kann, und dafs also jene Gleichung übergeht in:

$$0 = \Sigma_h \Sigma_s W^{(h)}_s \left\{ \Sigma_m \frac{\partial c^{p,h}_{m,s}}{\partial x_m} - \Sigma_i \Sigma_k c^{i,h}_{k,s} \alpha^{i,p}_k - \Sigma_i \Sigma_k c^{p,i}_{k,s} \alpha^{i,h}_k \right\}$$

oder dafs endlich, da die in den W enthaltenen w ganz beliebig sollen bleiben können, die Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$0 = \Sigma_m \frac{\partial c^{p,h}_{m,s}}{\partial x_k} - \Sigma_k \Sigma_i (c^{i,h}_{k,s} \alpha^{i,p}_k + c^{p,i}_{k,s} \alpha^{i,h}_k).$$

Statt der $n^2.r$ verschiedenen Gleichungen, welche diese Gleichung darstellt, kann man jedoch auch diejenigen $n^2.r$ wählen, welche aus ihr hervorgehen, wenn man sie mit $u^{p,\varrho}.u^{h,\sigma}$ multiplicirt, und nach h und p summirt. Dann kommt aber:

$$0 = \Sigma_p \Sigma_h \Sigma_m \frac{\partial c^{p,h}_{m,s}}{\partial x_k} u^{p,\varrho} u^{h,\sigma}$$

$$-\Sigma_k \Sigma_i \{\Sigma_h c^{i,h}_{k,s} (\Sigma_p \alpha^{i,p}_k u^{p,\varrho}) u^{h,\sigma} + \Sigma_p c^{p,i}_{k,s} (\Sigma_h \alpha^{i,h}_k u^{h,\sigma}) u^{p,\varrho}\}$$

oder, mit Hülfe der Gleichungen (30.):

$$0 = \Sigma_h \Sigma_p \Sigma_m \frac{\partial c^{p,h}_{m,s}}{\partial x_k} u^{p,\varrho} u^{h,\sigma} + \Sigma_k \Sigma_i \left\{ \Sigma_h c^{i,h}_{k,s} u^{h,\sigma} \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_k} + \Sigma_p c^{p,i}_{k,s} u^{p,\varrho} \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_k} \right\},$$

eine Gleichung, welche durch eine veränderte Bezeichnung der Indices unmittelbar in (52.) übergeht. Die angedeutete Eigenschaft der Function H ist also nachgewiesen, und zugleich, dafs man nur eine einzige unter den unendlich vielen möglichen Functionen Θ aufzusuchen nöthig hat.

§. 10.

Um nun endlich die Bestimmung der a wirklich auszuführen, kann man den Gleichungen (48.) die Gestalt geben:

$$(\varrho, \sigma)_m = \Sigma_k \Sigma_h \Sigma_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u^{h,\sigma} u^{i,\varrho} a^{h,i}_{k,m}),$$

oder wenn man

$$(55.) \quad z^{\sigma,\varrho}_{k,m} = \Sigma_h \Sigma_i (u^{h,\sigma} u^{i,\varrho} a^{h,i}_{k,m})$$

setzt:

$$(56.) \quad (\varrho, \sigma)_m = \frac{\partial z^{\varrho,\sigma}_{1,m}}{\partial x_1} + \frac{\partial z^{\varrho,\sigma}_{2,m}}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial z^{\varrho,\sigma}_{r,m}}{\partial x_r}.$$

Die Functionen z haben dann mit den a die Eigenschaft

$$(57.) \quad z^{\sigma,\varrho}_{k,m} = z^{\varrho,\sigma}_{m,k} = -z^{\varrho,\sigma}_{k,m} = -z^{\sigma,\varrho}_{m,k}$$

gemeinsam, und die a bestimmen sich aus ihnen sehr leicht mittelst linearer Gleichungen.

Die Gleichung (56.) steht mit einer wichtigen Eigenschaft der Functionen $(\varrho, \sigma)_m$ in Zusammenhang. Differentiiren wir nämlich diese Gleichung nach x_m und nehmen nach m die Summe, so erhalten wir:

$$(58.) \quad \frac{\partial (\varrho, \sigma)_1}{\partial x_1} + \frac{\partial (\varrho, \sigma)_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial (\varrho, \sigma)_r}{\partial x_r} = 0.$$

Dies ist in der That eine Fundamentalgleichung für die Functionen $(\varrho, \sigma)_m$.

Sie soll direct aus den Gleichungen abgeleitet werden, welchen die u genügen. Zu diesem Zweck braucht man nur die Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial u^{i,\sigma}} = \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}},$$

$$\frac{\partial \Omega_2^\varrho}{\partial u^{i,\varrho}} = \Sigma_m \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\varrho}{\partial \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m}},$$

respective mit $u^{i,\varrho}$ und $-u^{i,\sigma}$ multiplicirt, zu addiren und die Summe nach i zu bilden. Dann kommt:

$$\Sigma_i \left(u^{i,\varrho} \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial u^{i,\sigma}} - u^{i,\sigma} \frac{\partial \Omega_2^\varrho}{\partial u^{i,\varrho}} \right)$$

$$= \Sigma_i \Sigma \left(u^{i,\varrho} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} - u^{i,\sigma} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\varrho}{\partial \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m}} \right),$$

und wenn man nun auf beiden Seiten den Ausdruck

$$\Sigma_i \Sigma_m \left(\frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\sigma}{\partial \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m}} - \frac{\partial u^{i,\sigma}}{\partial x_m} \frac{\partial \Omega_2^\varrho}{\partial \frac{\partial u^{i,\varrho}}{\partial x_m}} \right)$$

hinzufügt, so erhält man auf der linken Seite nach bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen zweiter Ordnung, und mit Rücksicht darauf, dafs $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_h}$ verschwindet, identisch Null; während zugleich die rechte Seite die zu beweisende Gleichung

$$0 = \frac{\partial (\varrho, \sigma)_1}{\partial x_1} + \frac{\partial (\varrho, \sigma)_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial (\varrho, \sigma)_r}{\partial x_r}$$

ergiebt.

Diese Gleichung läfst sich so aussprechen, *dafs die Functionen*

$$(\varrho, \sigma)_1, \quad (\varrho, \sigma)_2, \quad \ldots \quad (\varrho, \sigma)_r$$

sich stets als Unterdeterminanten ein und derselben Functionaldeterminante darstellen lassen, und dies giebt zu einer merkwürdigen Darstellung der Functionen z Veranlassung. ***Denken wir uns die Functionen dieser Determinante gefunden,*** *d. h. die partielle Differentialgleichung*

$$(59.) \quad 0 = (\varrho, \sigma)_1 \frac{\partial \varphi^{\varrho,\sigma}}{\partial x_1} + (\varrho, \sigma)_2 \frac{\partial \varphi^{\varrho,\sigma}}{\partial x_2} + \cdots (\varrho, \sigma)_r \frac{\partial \varphi^{\varrho,\sigma}}{\partial x_r},$$

deren Multiplicator Eins ist, vollständig integrirt, und bezeichnen wir die Lösungen derselben durch

$$\varphi^{\varrho,\sigma},\quad \varphi_1^{\varrho,\sigma},\quad \ldots\quad \varphi_{r-2}^{\varrho,\sigma},$$

und die aus ihnen gebildeten partiellen Functionaldeterminanten, welche den Functionen (ϱ,σ) *gleich wer en, durch* $\Delta_1^{\varrho,\sigma}$, $\Delta_2^{\varrho,\sigma}$, $\ldots$ $\Delta_r^{\varrho,\sigma}$, *so erhält man Lösungen der Gleichungen* (56.), *wenn man setzt:*

$$(60.)\qquad z_{h,m}^{\varrho,\sigma} = \varphi^{\varrho,\sigma}\left(\frac{\partial\Delta_m}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}}\right)^{\varrho,\sigma} = -\varphi^{\varrho,\sigma}\left(\frac{\partial\Delta_h}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}}\right)^{\varrho,\sigma}.$$

Denn hieraus folgt, nach bekannten Eigenschaften der Functionaldeterminanten:

$$\frac{\partial z_{1,m}^{\varrho,\sigma}}{\partial x_1}+\frac{\partial z_{2,m}^{\varrho,\sigma}}{\partial x_2}+\cdots = \Sigma_h\frac{\partial\varphi^{\varrho,\sigma}}{\partial x_h}\left(\frac{\partial\Delta_m}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}}\right)^{\varrho,\sigma} = \Delta_m^{\varrho,\sigma},$$

oder gleich $(\varrho,\sigma)_m$, was zu beweisen war.

Während sich aber hier die Functionen z aus den zweiten Differentialquotienten einer Functionaldeterminante zusammensetzen, deren constituirende Elemente man im Allgemeinen nicht als bekannt voraussetzen darf, so giebt es einen andern Weg, welcher zur unmittelbaren Darstellung gewisser Lösungen von (56.) führt. *Man kann nämlich setzen*:

$$(61.)\qquad z_{h,m}^{\varrho,\sigma} = \frac{1}{r}\left\{\int(\varrho,\sigma)_m\,dx_h - \int(\varrho,\sigma)_h\,dx_m\right\};$$

denn differentiirt man nun nach x_h und summirt, so kommt, mit Rücksicht auf die Gleichung (58.):

$$\Sigma_h\frac{\partial z_{h,m}^{\varrho,\sigma}}{\partial x_h} = (\varrho,\sigma)_m,$$

wie es sein sollte.

Die Gleichung (61.) enthält also die Lösung des vorliegenden Problems. Ich weise hierbei auf die merkwürdige Thatsache hin, *dafs sich aus dem ganzen Verlauf der Untersuchung keine Bedingung über die specielle Beschaffenheit der Lösungen* $u^{i,\sigma}$ *des Systems* (40.) *ergeben hat.* Solche Bedingungen treten bekanntlich ein, sobald nur *eine* unabhängige Variable vorhanden ist; und zwar ist die Bedingung die, dafs die constanten Werthe, welche die Functionen (ϱ,σ) dann annehmen, sämmtlich der Null gleich seien. Eine solche Bedingung tritt also in keinem anderen Falle wieder auf. In der

That führte die zweite Gleichung (35.) auf $n^2 r$ Gleichungen mit

$$\frac{n.n+1}{2}r+\frac{n.n-1}{2}.\frac{r.r-1}{2}$$

unbestimmten Functionen. Die Differenz beider Zahlen ist $\frac{n.n-1}{2}.\frac{r.r-3}{2}$. Man hat also, wenn $r=3$ ist, ebensoviel zu bestimmende Functionen als Gleichungen vorhanden sind, und wenn $r>3$, sogar mehr. Für $r=1$ und $r=2$ sind aber $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen mehr vorhanden als Functionen; und wirklich führt dann (56.) auf die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen:

$$(\varrho,\sigma) = 0.$$

Für $r=2$ aber sind diese $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungen keine andern als die Gleichungen (58.), welche identisch erfüllt werden. Ja, dieser Umstand verringert auch für $r=3$ etc. die Anzahl der Gleichungen um $\frac{n.n-1}{2}$, so dafs bereits für $r=3$ die Aufgabe wahrhaft unbestimmt wird. Und so zeigt es sich, dafs $r=2$ den einzigen Fall angiebt, in welchem die Aufgabe bestimmt ist, ohne auf Bedingungen für die u zu führen. Und in diesem Falle ist

$$z^{\varrho,\sigma}_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left\{\int(\varrho,\sigma)_2 dx_1 - \int(\varrho,\sigma)_1 dx_2\right\},$$

oder auch:

$$z^{\varrho,\sigma}_{1,2} = \int((\varrho,\sigma)_2 dx_1 - (\varrho,\sigma)_1 dx_2),$$

wo nunmehr unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential steht.

§. 11.

Das Resultat der vorstehenden Entwicklungen läfst sich nun in dem folgenden Theorem zusammenfassen:

Es seien $u^{1,\sigma}$, $u^{2,\sigma}$, ... $u^{n,\sigma}$ Systeme von Functionen, welche aus den Lösungen der Gleichungen* (5.), (6.) *so zusammengesetzt sind, dafs

$$(42.)\qquad u^{i,\sigma} = \Sigma\alpha^\sigma\frac{\partial y^{(i)}}{\partial a}+\Sigma\Pi^\sigma\frac{\partial y^{(i)}}{\partial P},$$

U bezeichne ihre Determinante, $U^{i,\sigma}$ sei gleich $\frac{\partial U}{\partial u^{i,\sigma}}$; dann reducirt sich das Integral

$$\int^{(r)}\Omega_2(w)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_r$$

durch theilweise Integration auf

$$\int^{(r)}((\Omega_2(W))-(\Theta(W)))\,dx_1\,dx_2\ldots dx_r,$$

wo die Argumente $W_k^{(i)}$ *die Form haben:*

$$(13.30.)\qquad W_k^{(i)} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_k} - \Sigma_\sigma \Sigma_h w^{(h)} \frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_k}\cdot\frac{U^{i,\sigma}}{U},$$

oder, wo dieselben an einander gebunden sind durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial W_m^{(i)}}{\partial x_k} - \Sigma_h \Sigma_\sigma \frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_k}\cdot\frac{U^{i,\sigma}}{U}\cdot W_m^{(h)} = \frac{\partial W_k^{(i)}}{\partial x_m} - \Sigma_h \Sigma_\sigma \frac{\partial u^{h,\sigma}}{\partial x_m}\cdot\frac{U^{i,\sigma}}{U}\cdot W_k^{(h)};$$

und wo der Coefficient $a_{k,m}^{h,i}$, *mit welchem* $W_k^{(h)}.W_m^{(i)}$ *in* $(\Theta(W))$ *multiplicirt ist, die Gestalt hat:*

$$a_{k,m}^{h,i} = \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{U^{h,\sigma}.U^{i,\varrho}}{rU^2}\Big(\int(\varrho,\sigma)_m dx_h - \int(\varrho,\sigma)_h dx_m\Big)$$

$$= \frac{1}{2rU}\Sigma_\varrho \Sigma_\sigma \frac{\partial^2 U}{\partial u^{h,\sigma}\partial u^{i,\varrho}}\Big(\int(\varrho,\sigma)_m dx_h - \int(\varrho,\sigma)_h dx_m\Big).$$

Zugleich gehen dann die Gleichungen

$$(10.)\qquad \psi_1 = 0,\quad \psi_2 = 0,\quad \ldots\quad \psi_\varkappa = 0$$

in lineare Bedingungsgleichungen zwischen den $W_k^{(i)}$ *über.*

Die Form dieser letzten, so wie der durch theilweise Integration abgesonderten Integrale niederer Ordnung, ist nach dem Obigen leicht anzugeben.

Ich knüpfe hieran nur noch eine Bemerkung, welche die allgemeinere Aufgabe trifft, bei welcher unter dem Integralzeichen auch höhere Differentialquotienten eingehen. Man kann dann die niederen Differentialquotienten sämmtlich als neue abhängige Variable einführen, und durch hinzugefügte Bedingungsgleichungen die Natur derselben definiren. Bemerken wir aber, dafs in dem eben ausgesprochenen Theorem $W_k^{(i)}$ die Form hat:

$$U.W_k^{(i)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_k} & \frac{\partial u^{i,1}}{\partial x_k} & \frac{\partial u^{i,2}}{\partial x_k} & \ldots & \frac{\partial u^{i,n}}{\partial x_k} \\ w^{(1)} & u^{1,1} & u^{1,2} & \ldots & u^{1,n} \\ w^{(2)} & u^{2,1} & u^{2,2} & \ldots & u^{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w^{(n)} & u^{n,1} & u^{n,2} & \ldots & u^{n,n} \end{vmatrix}.$$

Entspricht nun nicht $w^{(i)}$ einem der höchsten unter den Differentialquotienten, welche als Variable neu eingeführt sind, so wird es immer unter den Reihen

$$w^{(h)}, \quad u^{h,1}, \quad u^{h,2}, \quad \dots \quad u^{h,n}$$

eine solche geben, welche der Reihe

$$\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u^{i,1}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u^{i,2}}{\partial x_k}, \quad \dots \quad \frac{\partial u^{i,n}}{\partial x_k}$$

genau gleich ist. Es wird also $W_k^{(i)}$ dann immer verschwinden, und somit erhält man das folgende Theorem:

Ein Integral, welches beliebig hohe Differentialquotienten der abhängigen Variabeln enthält, zeigt nach Anwendung der vorliegenden Transformation unter dem Integralzeichen eine homogene Function zweiter Ordnung, deren Argumente den respective höchsten Differentialquotienten der abhängigen Variabeln entsprechen.

Steigen also die Differentialquotienten, respective auf den $p_1$ten, $p_2$ten, ... $p_n$ten Grad, so ist die Anzahl der Argumente in der reducirten Function zweiter Ordnung:

$$\Sigma_h \frac{r.r+1.r+2 \dots r+p_h-1}{1.2.3 \dots p_h}.$$

Berlin, den 12. Juni 1858.