Monatshefte für Mathematik 80, 265—276 (1975)

Eine verallgemeinerte Darboux-Gleichung II

Von

Karl Wilhelm Bauer, Graz

(Eingegangen am 11. Dezember 1973)

Abstract

A Generalized Darboux Equation II. The paper is concerned with the elliptic equation

$$w_{z\bar{z}} + \left[\frac{n(n+1)}{(z-\bar{z})^2} - \frac{m(m+1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2} - \frac{p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2}\right] w = 0,$$

$$n, m, p, q \in \mathbb{N}_0 .$$

General representation theorems for the solutions are derived by differential operators if three parameters are different from zero or two parameters are equal. Some applications are given to pseudo-analytic functions and generalized Tricomi equations.

3. Lösungsdarstellungen durch Differentialoperatoren des Typs

$$d = a(z)(\partial/\partial z) + \overline{b(z)}(\partial/\partial \bar{z}) + c(z, \bar{z})$$

Andere Darstellungen für die Lösungen der in den Sätzen 1—4 aus Teil I ([1]) behandelten Differentialgleichungen erhält man durch sukzessive Anwendung geeigneter Differentialoperatoren auf die Differentialgleichung

$$h_{z\bar{z}} = 0 .$$

Sei $\mathfrak{G}$ zunächst ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit $1 - z\bar{z} \neq 0$. Wir bezeichnen mit $d_{1,p}$ den Differentialoperator

$$d_{1,p} = zr + \bar{z}s + p\frac{1+z\bar{z}}{1-z\bar{z}}, \qquad p \in \mathbb{N} .$$

Dann gilt die Vertauschungsrelation

$$d_{1,p}(rs) = (rs)\, d_{1,p} - 2rs - \frac{2p}{(1-z\bar{z})^2}\, d_{1,p} + \frac{2p(p-1)(1+z\bar{z})}{(1-z\bar{z})^3} .$$

Durch vollständige Induktion beweist man sodann den folgenden

Hilfssatz 1. *u_p, $p \in \mathbb{N}_0$, sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$r\,s\,u_p - \frac{p\,(p+1)}{(1-z\bar{z})^2}\,u_p = 0\ .$$

Dann stellt

$$u_{p+1} = d_{1,\,p+1}\,u_p$$

eine Lösung von

$$r\,s\,u_{p+1} - \frac{(p+1)\,(p+2)}{(1-z\bar{z})^2}\,u_{p+1} = 0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

Geht man von der Differentialgleichung

$$r\,s\,u - \frac{p\,(p+1)}{(1-z\bar{z})^2}\,u = 0 \tag{18}$$

aus und verwendet den Differentialoperator

$$d_{2,\,q} = -z^2 r + s - \frac{2\,q\,z}{1+z\bar{z}}\,, \qquad q \in \mathbb{N}\,,$$

so gilt die Vertauschungsrelation

$$d_{2,\,q}(r\,s) = (r\,s)\,d_{2,\,q} + 2\,z\,r\,s + \frac{2\,q}{(1+z\bar{z})^2}\,d_{2,\,q} + \frac{4\,q\,(q-1)\,z}{(1+z\bar{z})^3}\,.$$

Vollständige Induktion liefert sodann den

Hilfssatz 2. *v_q, $q \in \mathbb{N}_0$, sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$r\,s\,v_q + \left[\frac{-p\,(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q\,(q+1)}{(1+z\bar{z})^2}\right] v_q = 0\,;$$

dann stellt

$$v_{q+1} = d_{2,\,q+1}\,v_q$$

eine Lösung von

$$r\,s\,v_{q+1} + \left[\frac{-p\,(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{(q+1)\,(q+2)}{(1+z\bar{z})^2}\right] v_{q+1} = 0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

$\mathfrak{G}_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, bezeichne nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit

$$(1-z\bar{z})\,(z+\varepsilon\bar{z}) \neq 0$$

und $d_{3,m}$ den Differentialoperator

$$d_{3,m} = -zr + \bar{z}s + m\frac{z-\varepsilon\bar{z}}{z+\varepsilon\bar{z}}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$d_{3,m}(rs) = (rs)\,d_{3,m} - \frac{2m}{(z+\varepsilon\bar{z})^2}\,d_{3,m} + 2m(m-1)\frac{z-\varepsilon\bar{z}}{z+\varepsilon\bar{z}},$$

und durch Induktion erhält man den folgenden

Hilfssatz 3. *w_m, $m \in \mathbb{N}_0$, sei eine beliebige in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$rs\,w_m + \left[\frac{-p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2} - \frac{\varepsilon m(m+1)}{(z+\varepsilon\bar{z})^2}\right] w_m = 0,$$

dann stellt

$$w_{m+1} = d_{3,m+1}\,w_m$$

eine Lösung von

$$rs\,w_{m+1} + \left[\frac{-p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2} - \frac{\varepsilon(m+1)(m+2)}{(z+\varepsilon\bar{z})^2}\right] w_{m+1} = 0$$

in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ dar.

Zusammenfassend liefern die Hilfssätze 1—3 den nachstehenden

Satz 5. *$\mathfrak{G}_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit*

$$(1-z\bar{z})(z+\varepsilon\bar{z}) \neq 0.$$

h sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $h_{z\bar{z}} = 0$.

Dann stellt

$$w = d_{3,m} \ldots d_{3,1}\,v$$

mit

$$v = d_{2,q} \ldots d_{2,1}\,u \tag{19}$$

und

$$u = d_{1,p} \ldots d_{1,1}\,h$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left[\frac{-p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2} - \frac{\varepsilon m(m+1)}{(z+\varepsilon\bar{z})^2}\right] w = 0, \tag{20}$$

$$p, q, m \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ dar. Dabei sind die Operatoren

$$d_{3,m} \,..\, d_{3,1}, \quad d_{2,q} \ldots d_{2,1} \quad \textit{bzw.} \quad d_{1,p} \ldots d_{1,1}$$

im Falle $m = 0$, $q = 0$ bzw. $p = 0$ durch den Einheitsoperator zu ersetzen.

Setzt man in (20) $m = q = 0$ bzw. $m = p = 0$, so erhält man als Spezialfälle die Differentialgleichungen

$$(1 - z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - p(p+1)w = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

und

$$(1 + z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} + q(q+1)w = 0, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

die in verschiedenen Arbeiten behandelt worden sind (vgl. z. B. [1], [4], [16], [17] und [18]). Die in Satz 5 zusammengefaßten Resultate liefern damit u. a. neue Darstellungen für die Lösungen der Differentialgleichungen (21) und (22).

Bezeichnet man mit $d_{4,m}$ den Differentialoperator

$$d_{4,m} = -zr + \bar{z}s + 2m\frac{z^2 + \bar{z}^2}{z^2 - \bar{z}^2}, \quad m \in \mathbb{N},$$

so gilt die Vertauschungsrelation

$$d_{4,m}(rs) = (rs)d_{4,m} + \frac{8mz\bar{z}}{(z^2 - \bar{z}^2)^2} d_{4,m} - \frac{16m(m-1)z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2)}{(z^2 - \bar{z}^2)^3},$$

und man erhält durch Induktion

Hilfssatz 4. *Im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ gelte $(1 - z\bar{z})(z^2 - \bar{z}^2) \neq 0$. w_m, $m \in \mathbb{N}_0$, sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung*

$$rs\,w_m + \left[\frac{-p(p+1)}{(1 - z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1 + z\bar{z})^2} - \frac{m(m+1)}{(z + \bar{z})^2} + \frac{m(m+1)}{(z - \bar{z})^2}\right] w_m = 0.$$

Dann stellt

$$w_{m+1} = d_{4,m+1}w_m$$

eine Lösung von

$$rs\,w_{m+1} + \left[\frac{-p(p+1)}{(1 - z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1 + z\bar{z})^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(m+1)(m+2)}{(z + \bar{z})^2} + \frac{(m+1)(m+2)}{(z - \bar{z})^2}\right] w_{m+1} = 0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

Unter Verwendung des Hilfssatzes 4 erhält man damit den folgenden

Satz 6. *$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit*

$$(1-z\bar{z})(z^2-\bar{z}^2)\neq 0.$$

h sei eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $h_{z\bar{z}}=0$.

Dann stellt

$$w=d_{4,m}\ldots d_{4,1}\,v$$

mit v gemäß (19) *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$w_{z\bar{z}}+\left[\frac{-p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2}+\frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2}-\frac{m(m+1)}{(z+\bar{z})^2}+\frac{m(m+1)}{(z-\bar{z})^2}\right]w=0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

Ähnliche Lösungsdarstellungen lassen sich für die in den Sätzen 3 und 4 behandelten Differentialgleichungen herleiten. Die entsprechenden Resultate werden in den nachstehenden Sätzen zusammengefaßt.

Satz 7. *$\mathfrak{G}_\varepsilon$, $\varepsilon=\pm 1$, sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit*

$$(z^2-\bar{z}^2)(1+\varepsilon z\bar{z})\neq 0.$$

h sei eine in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ definierte Lösung der Differentialgleichung $h_{z\bar{z}}=0$. Es gelte

$$d_{5,m}=r+s-\frac{2m}{z+\bar{z}},$$

$$d_{6,n}=r-s-\frac{2n}{z-\bar{z}},$$

$$d_{7,p}=z\,r+\bar{z}\,s+p\,\frac{1-\varepsilon z\bar{z}}{1+\varepsilon z\bar{z}}.$$

Dann stellt

$$w=d_{7,p}\ldots d_{7,1}\,v \tag{23}$$

mit

$$v=d_{6,n}\ldots d_{6,1}\,u \tag{24}$$

und

$$u=d_{5,m}\ldots d_{5,1}\,h$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left[\frac{-m(m+1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{n(n+1)}{(z-\bar{z})^2} + \frac{\varepsilon p(p+1)}{(1+\varepsilon z\bar{z})^2}\right] w = 0, \tag{25}$$

$$m, n, p \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

in $\mathfrak{G}_\varepsilon$ *dar. Dabei sind die Operatoren*

$$d_{7,p} \dots d_{7,1}, \quad d_{6,n} \dots d_{6,1} \quad \textit{bzw.} \quad d_{5,m} \dots d_{5,1}$$

im Falle $p = 0$, $n = 0$ *bzw.* $m = 0$ *durch den Einheitsoperator zu ersetzen.*

Setzt man in (25) $p = n = 0$, so folgt die Differentialgleichung

$$(z+\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - m(m+1) w = 0, \tag{26}$$

womit ein Spezialfall der in [5] behandelten Differentialgleichung

$$[\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]^2 w_{z\bar{z}} - m(m+1)\varphi' \overline{\psi'} w = 0 \tag{27}$$

vorliegt. Mit (23) erhält man damit eine neue Darstellung für die Lösungen der Differentialgleichung (26), die ohne Schwierigkeiten auf eine Darstellung der Lösungen von (27) verallgemeinert werden kann, wenn man anstelle von $d_{5,m}$ den Operator

$$d^*_{5,m} = R + S - \frac{2m}{\varphi + \bar{\psi}}$$

mit
$$R = \frac{1}{\varphi'} \frac{\partial}{\partial z}, \quad S = \frac{1}{\overline{\psi'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

verwendet. Dabei bezeichnen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zwei im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ holomorphe bzw. meromorphe Funktionen, die den Bedingungen genügen:

(i) $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ besitzen in $\mathfrak{G}$ nur endlich viele Polstellen von höchstens erster Ordnung,

(ii) $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ haben keine gemeinsamen Polstellen in $\mathfrak{G}$,

(iii) $[\varphi(z) + \overline{\psi(z)}]\varphi'(z)\psi'(z) \neq 0$ in $\mathfrak{G}$.

Bezeichnet sodann h eine beliebige in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung $h_{z\bar{z}} = 0$, so erhält man durch

$$w = d^*_{5,m} \dots d^*_{5,1} h \tag{28}$$

eine in $\mathfrak{G}$ definierte Lösung der Differentialgleichung (27). Vergleicht man dieses Ergebnis mit der in [5] gewonnenen Darstellung

$$w = \sum_{k=0}^{m} A_k^m \frac{R^k g + S^k \bar{f}}{(\varphi + \bar{\psi})^{m-k}}, \tag{29}$$

so zeigt sich, daß die Erzeugenden in (28) bzw. (29) durch die Relation

$$h(z, \bar{z}) = g(z) + \overline{f(z)}$$

verknüpft sind.

Geht man von der in Satz 4 behandelten Differentialgleichung aus, so erhält man mit Hilfe des Differentialoperators

$$d_{8,p} = z r + \bar{z} s + 2 p \frac{1 + z^2 \bar{z}^2}{1 - z^2 \bar{z}^2}$$

eine entsprechende Lösungsdarstellung.

Satz 8. *$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit*

$$(z^2 - \bar{z}^2)(1 - z\bar{z}) \neq 0.$$

h sei eine beliebige in G definierte Lösung der Differentialgleichung $h_{z\bar{z}} = 0$. Dann stellt

$$w = d_{8,p} \ldots d_{8,1} v$$

mit v gemäß (24) eine Lösung der Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left[\frac{-m(m+1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{n(n+1)}{(z-\bar{z})^2} - \frac{p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2}\right] w = 0$$

in $\mathfrak{G}$ dar.

4. Anwendung

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$W_{\bar{z}} = a W + b \overline{W} \tag{30}$$

werden nach L. Bers [7] pseudoanalytische Funktionen genannt. Transformiert man (30) mit $a = A_{\bar{z}}$ gemäß

$$W = w e^{A},$$

so erhält man

$$w_{\bar{z}} = c\,\bar{w} \quad \text{mit} \quad c = b\,e^{\bar{A}-A}. \tag{31}$$

Falls

$$c_z \text{ reellwertig}, \tag{32}$$

so genügen der Realteil u und der Imaginärteil v einer Lösung w von (31) den Differentialgleichungen

$$u_{z\bar{z}} - (c\,\bar{c} + c_z)\,u = 0 \tag{33}$$

bzw.

$$v_{z\bar{z}} - (c\,\bar{c} - c_z)\,v = 0. \tag{34}$$

Geht man z. B. (vgl. [6]) von

$$c = \frac{m\,\overline{\alpha'}}{\alpha + \bar{\alpha}}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

aus, wobei

$$\alpha'\,(\alpha + \bar{\alpha}) \neq 0$$

im betrachteten einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ vorausgesetzt wird, so genügen u bzw. v den Differentialgleichungen

$$u_{z\bar{z}} - (m-1)\,m\,\frac{\alpha'\,\overline{\alpha'}}{(\alpha + \bar{\alpha})^2}\,u = 0 \tag{36}$$

bzw.

$$v_{z\bar{z}} - m\,(m+1)\,\frac{\alpha'\,\overline{\alpha'}}{(\alpha + \bar{\alpha})^2}\,v = 0. \tag{37}$$

Mit (36) liegt jedoch eine Differentialgleichung des Typs (37) vor, wobei lediglich $m-1$ durch m zu ersetzen ist. Alle in $\mathfrak{G}$ definierten reellwertigen Lösungen dieser Differentialgleichungen lassen sich aber unter Verwendung von [5], Satz 3, angeben. Setzt man $w = u + i\,v$ sodann in

$$w_{\bar{z}} = \frac{m\,\overline{\alpha'}}{\alpha + \bar{\alpha}}\,\bar{w} \tag{38}$$

ein, so erhält man (vgl. [6], Satz 4)

$$w = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}\,(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha + \bar{\alpha})^{m-k}} \left\{ m \left(\frac{1}{\alpha'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f - (m-k)\,\overline{\left(\frac{1}{\alpha'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f} \right\}, \tag{39}$$

wobei $f(z)$ eine beliebige in G holomorphe Funktion bezeichnet.

Die Lösungen von (31) stellen andererseits auch Lösungen der elliptischen Differentialgleichung

$$w_{z\bar{z}} - (c_z/c)\, w_{\bar{z}} - c\,\bar{c}\, w = 0 \tag{40}$$

dar (vgl. [22], S. 140). Ist umgekehrt w eine Lösung von (40), so genügen die Funktionen

$$w_1 = \tfrac{1}{2}\,[w + (1/\bar{c})\,\bar{w}_z] \quad \text{und} \quad w_2 = (1/2\,i)\,[w - (1/\bar{c})\,\bar{w}_z]$$

der Differentialgleichung (31), und es gilt

$$w = w_1 + i\, w_2\,. \tag{41}$$

Damit läßt sich jede Lösung w der Differentialgleichung (40) gemäß (41) darstellen, wobei w_1 und w_2 Lösungen von (31) bezeichnen. In diesem Zusammenhang werden die Lösungen von (40) nach I. N. Vekua [22] als komplexe Potentiale der Differentialgleichung (31) bezeichnet. Im Fall der Differentialgleichung (38) lautet also die Differentialgleichung der komplexen Potentiale

$$w_{z\bar{z}} + \frac{\alpha'}{\alpha + \bar{\alpha}}\, w_{\bar{z}} - m^2\, \frac{\alpha'\,\overline{\alpha'}}{(\alpha + \bar{\alpha})^2}\, w = 0\,,$$

deren Lösungen man unter Berücksichtigung von (39) und (41) sofort angeben kann.

Entsprechende Resultate erhält man, wenn man in (31) anstelle von (35) geeignete andere Funktionen verwendet, bei denen der Real- bzw. Imaginärteil von w elliptischen Differentialgleichungen der hier behandelten Art genügen. Dies sei im folgenden an zwei Beispielen demonstriert.

Geht man von

$$c = \frac{-m}{z + \bar{z}} + \frac{n}{z - \bar{z}}\,, \quad m, n \in \mathbb{N}\,, \tag{42}$$

aus, so genügt c_z der Bedingung (32), und man erhält für u bzw. v die Differentialgleichungen

$$u_{z\bar{z}} + \left[\frac{-m\,(m+1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{n\,(n+1)}{(z-\bar{z})^2}\right] u = 0\,,$$

$$v_{z\bar{z}} + \left[\frac{-m\,(m-1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{n\,(n-1)}{(z-\bar{z})^2}\right] v = 0\,.$$

Die Differentialgleichung der komplexen Potentiale lautet hier

$$w_{z\bar z}+\frac{m(z-\bar z)^2-n(z+\bar z)^2}{(z^2-\bar z^2)[m(z-\bar z)-n(z+\bar z)]}w_{\bar z}-\left[\frac{m^2}{(z+\bar z)^2}-\frac{n^2}{(z-\bar z)^2}\right]w=0.$$

Die mit (42) gebildete Differentialgleichung (31) stellt den Spezialfall einer in [15] behandelten Differentialgleichung dar.

Verwendet man z. B.

$$c=\frac{m}{z+\bar z}+\frac{n}{z-\bar z}+\eta\frac{(n-m)z}{1+\eta z\bar z},\quad \eta=\pm 1,\quad n,m\in\mathbb{N},$$

so genügt c_z wiederum der Bedingung (32), und man erhält zur Bestimmung von u bzw. v die verallgemeinerten Darboux-Gleichungen

$$u_{z\bar z}+\left[\frac{-(m-1)m}{(z+\bar z)^2}+\frac{n(n+1)}{(z-\bar z)^2}+\eta\frac{(n-m)(n-m-1)}{(1+\eta z\bar z)^2}\right]u=0,$$

$$v_{z\bar z}+\left[\frac{-m(m+1)}{(z+\bar z)^2}+\frac{(n-1)n}{(z-\bar z)^2}+\eta\frac{(n-m)(n-m+1)}{(1+\eta z\bar z)^2}\right]v=0.$$

Die komplexen Potentiale genügen in diesem Fall der Differentialgleichung

$$w_{z\bar z}+\frac{\dfrac{m}{(z+\bar z)^2}+\dfrac{n}{(z-\bar z)^2}-\dfrac{\eta(n-m)}{(1+\eta z\bar z)^2}}{\dfrac{m}{z+\bar z}+\dfrac{n}{z-\bar z}+\dfrac{(n-m)z}{1+\eta z\bar z}}w_{\bar z}-$$
$$-\left[\frac{m^2}{(z+\bar z)^2}-\frac{n^2}{(z-\bar z)^2}-\frac{\eta(n-m)^2}{(1+\eta z\bar z)^2}\right]w=0.$$

Die hier behandelte verallgemeinerte Darboux-Gleichung (4) steht darüber hinaus in enger Beziehung zu einer Klasse verallgemeinerter Tricomi-Gleichungen. Geht man von der Differentialgleichung

$$\eta\Psi_{\xi\xi}+\Psi_{\eta\eta}+\frac{6n+5}{2\eta}\Psi_\eta+$$
$$+\left[\frac{-m(m+1)}{\xi^2}-\frac{4p(p+1)}{(1-\xi^2-\frac{4}{9}\eta^3)^2}+\frac{4q(q+1)}{(1+\xi^2+\frac{4}{9}\eta^3)^2}\right]\eta\Psi=0,$$

für die gesuchte Funktion $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$, ξ, η reellwertig, aus, so erhält man in der elliptischen Halbebene ($\eta > 0$) mit

$$\Phi(x, y) = \Psi(\xi, \eta), \quad x = \xi, \quad y = \tfrac{2}{3}\eta^{\frac{3}{2}},$$

die Differentialgleichung

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \frac{2(n+1)}{y}\Phi_y + \\ + \left[\frac{-m(m+1)}{x^2} - \frac{4p(p+1)}{(1-x^2-y^2)^2} + \frac{4q(q+1)}{(1+x^2+y^2)^2}\right]\Phi = 0. \quad (43)$$

Geht man durch

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

zu komplexen Variablen über, so folgt mit

$$w(z, \bar{z})\,[i/(z-\bar{z})]^{n+1} = \Phi(x, y)$$

anstelle von (42) die verallgemeinerte Darboux-Gleichung

$$w_{z\bar{z}} + \left[\frac{-m(m+1)}{(z+\bar{z})^2} + \frac{n(n+1)}{(z-\bar{z})^2} - \frac{p(p+1)}{(1-z\bar{z})^2} + \frac{q(q+1)}{(1+z\bar{z})^2}\right]w = 0.$$

Transformiert man dagegen gemäß

$$X(x, t) = \Psi(\xi, \eta), \quad x = \xi, \quad t = \tfrac{2}{3}(-\eta)^{\frac{3}{2}},$$

so erhält man in der hyperbolischen Halbebene ($\eta < 0$)

$$X_{xx} - X_{tt} - \frac{2(n+1)}{t}X_t + \\ + \left[\frac{-m(m+1)}{x^2} - \frac{4p(p+1)}{(1-x^2+t^2)^2} + \frac{4q(q+1)}{(1+x^2-t^2)^2}\right]X = 0.$$

Verwendet man hier

$$\frac{\varphi(u, v)}{(u-v)^{n+1}} = X(x, t), \quad u = x + t, \quad v = x - t,$$

so genügt $\varphi(u, v)$ der klassischen Darboux-Gleichung

$$\varphi_{uv} + \left[\frac{-m(m+1)}{(u+v)^2} + \frac{n(n+1)}{(u-v)^2} - \frac{p(p+1)}{(1-uv)^2} + \frac{q(q+1)}{(1+uv)^2}\right]\varphi = 0.$$

Literatur

[1] BAUER, K. W.: Eine verallgemeinerte Darboux-Gleichung I. Mh. Math. **80**, 1—11 (1975).
(Die im Text angeführten Literaturzitate beziehen sich sämtlich auf die ausführliche Literaturliste in [1].)

Prof. Dr. K. W. BAUER
1. Lehrkanzel und Institut für Mathematik
Technische Universität
Kopernikusgasse 24
A-8010 Graz, Österreich