Diejenige Geradenschar von F_a^2, die aus Secanten von l_1 gebildet wird, entspricht den Schraubenbüscheln, deren Scheitel auf a' liegen. Alle Büschel haben einen Strahl mit dem Büschel (A, α) gemein, also werden die Strahlen des Hauptbüschels (A, α) durch die Geraden der genannten Schar abgebildet. Die Geraden von F_a^2, die mit l_1 zu derselben Schar gehören, entsprechen den Büscheln, deren Scheitel sich auf a befinden.

12. Sie werden die Bemerkung machen, meine Herren, daſs das, was ich Ihnen mitteilte, nur ein kleiner Teil der Abbildung eines Schraubensystems vierter Stufe ist. Es liegen viele Untersuchungen sehr nahe, von denen ich nur nenne die Untersuchung der weiteren in dem Schraubencomplex auftretenden Schraubennetze, der Regelscharen, die aus Schrauben gebildet werden, des Zusammenhanges mit anderen Abbildungsmethoden u. s. w. Die Mitteilung dieser Untersuchungen, mit denen ich mich zum Teil beschäftigt habe, zum Teil mich noch zu beschäftigen gedenke, würde mich hier aber zu weit führen.

Die Geometrie der Zwischenebene (und der Grenzfläche).

(Ein Beitrag zur elementaren Stereometrie der Lobatschewsky'schen Geometrie).

Von **Max Simon** in Straſsburg i. E.

Erklärung. Zwei Punkte A und B heiſsen entsprechend in Bezug auf eine bestimmte Richtung, wenn $\overline{AB}$ die durch A und B zu dieser Richtung gezogenen Parallelen unter gleichen inneren Winkeln schneidet, oder was dasselbe ist, wenn die Symmetrieaxe des Punktepaares $A|B$ der Richtung parallel ist. Zeichen des Entsprechens: $A \sim B$.

1) Satz: Sind a, b, c drei zu je 2 Parallelen im Raume (d. h. liegt c auſserhalb der Ebene (ab)), und ist A auf $a \sim B$ auf b, und $B \sim C$ auf c, so ist $A \sim C$.

Beweis. Die Symmetrieaxen zu $A|B$ und $B|C$ in der Ebene ABC müssen sich schneiden. Nicht sich schneidend können sie nicht sein, da sonst ihr Abstand (Axe) auf den Symmetrieebenen von $A|B$ und $B|C$ zugleich senkrecht stünde. Wären sie parallel, so könnten a, b, c in einer Ebene liegen gegen die Voraussetzung, oder es müſsten die Symmetrieebenen von $A|B$ und $B|C$ sich als Ebenen von Winkeln mit parallelen Schenkeln schneiden, ihre Schnittlinie stünde aber auf ABC senkrecht, und ihr Fuſspunkt wäre von ABC gleich weit entfernt, also müſsten die Axen von $A|B$ und $B|C$ sich dennoch schneiden, und ebenso die Symmetrieebenen von $A|B$, $B|C$

und $C|A$. Damit ist zugleich bewiesen, dafs die Punkte A, B, C stets auf Einem Kreise liegen, und dafs die 3 Symmetrieebenen sich in einer Geraden schneiden, der im Centrum auf ABC senkrechten, welche den Geraden a, b, c parallel ist.

Das Wesentliche des Beweises dieses Hauptsatzes fehlt bei Frischauf, der Beweis bei Lobatschewsky (geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien) ist fehlerlos, doch abhängig vom Parallelwinkel.

2) Sind A, B, C drei Punkte auf einem Kreise um M, so sind A, B, C paarweise entsprechend in Bezug auf jede der Richtungen des in M auf ABC errichteten Lotes. [Die 3 Symmetrieebenen schneiden sich in diesem Lot; zwei Gerade, welche derselben dritten in demselben Sinne parallel sind, sind es unter einander.]

Damit ist zugleich bewiesen:

Liegen A, B, C auf einer Abstandslinie, so sind die 3 Symmetrieebenen paarweise Nichtsichschneidende, deren gemeinsame Axe die Axe der Linien ist.

Liegen die drei Punkte auf einem Grenzkreis, so sind die drei Ebenen Zwischenebenen, d. h. sie haben nur den unendlich fernen Punkt in der Richtung der Radien gemeinsam.

3) Der Abstand zweier nichtsichschneidenden Geraden in zwei ebensolchen Ebenen liegt stets mit dem Abstand der beiden Ebenen in einer Ebene.

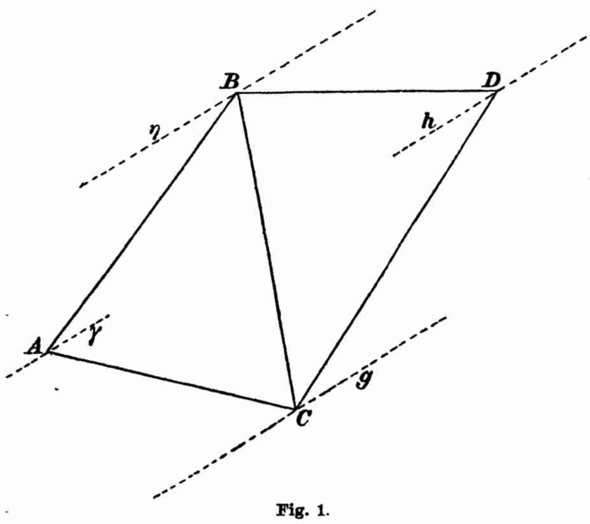

Fig. 1.

Sei Fig. 1 AB der Abstand beider Ebenen; g und h die Geraden. Fälle von A auf g das Lot AC und errichte auf AC in A das Lot γ in der Ebene (A, g), so steht γ auf der Ebene ABC senkrecht, und ebenso g. Das in B auf ABC errichtete Lot η liegt mit γ und mit g je in einer Ebene und als Lot auf AB in (B, h). Es sind η, γ, g drei paarweise Nichtsichschneidende (Insecanten), AB, AC, BC ihre Abstände. Ebenso sind

η, h, g drei paarweise Insecanten, BD, BC, DC ihre Abstände; es stehen also BA, BC, BD in B auf η senkrecht, also ist $ABCD$ ein ebenes Viereck.

Da alle zu derselben Geraden g einer von zwei insecanten Ebenen insecante in der anderen zu derselben Axe gehören, und diese durch den Fufspunkt des Abstandes der Ebenen geht, wie eben bewiesen, so giebt Satz 3 eine Construction desselben.

Zusatz: Eine Ebene, welche zwei insecante Ebenen so schneidet, dafs die Summe der inneren Neigungswinkel zwei Rechte beträgt, geht durch die Mitte des Abstandes, und vice versa.

Die Zwischenebenen.

Die Ebenen aller Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln schneiden sich in der Geraden, welche beiden Schenkelstrahlen zugleich parallel ist, und umgekehrt: Ebenen, welche sich schneiden, stimmen in den beiden Richtungen der Schnittgeraden überein; Ebenen, welche auf derselben Geraden senkrecht stehen, stimmen in keiner Richtung überein, sind nichtsichschneidend. Dazwischen giebt es Zwischenebenen, welche in einer Richtung übereinstimmen, wie man sofort sieht, wenn man dem Zusatz zu 2) die Fassung giebt:

4) Zwei Ebenen, welche auf derselben dritten senkrecht stehen und sie in Parallelen schneiden, sind Zwischenebenen.

Schnitten sie sich, so müfste ihre Schnittgerade auf der dritten senkrecht stehen und in ihrem Fufspunkte die Parallelen sich schneiden.

5) Durch jeden Punkt aufserhalb einer Ebene giebt es zu ihr in jeder ihrer Richtungen eine und nur eine Zwischenebene (Abkürzung: Z.). Die Construction der einen ist nach Satz 4 evident. Wenn A der Punkt, ε die Ebene, fällt man von A auf ε das Lot AB, zieht durch B den Parallelstrahl BC, durch A zu BC den Parallelstrahl AD, errichtet in A auf BAD das Lot AX, so ist Ebene AXD nach 4) Z. von ε. Dafs sie die einzige ist, folgt unmittelbar daraus, dafs ABD auf ABX senkrecht steht, also die Projection von BA auf ADX in AD fällt; und dafs der Neigungswinkel der kleinste Winkel ist, den eine Gerade mit Linien der Ebene durch ihren Schnittpunkt bildet.

Folgerungen von 5): Sind zwei Ebenen Z. zur selben dritten in derselben Richtung, so sind sie untereinander Z. Durch jede einer Ebene parallele Gerade läfst sich zu ihr eine Z. legen.

Jede Ebene durch eine Gerade der gemeinsamen Richtung — Hauptgerade — auf der einen Z. schneidet die andere in einer Hauptgeraden. — Die Zwischenebenen vertreten völlig die Stelle der Parallelstrahlen in der Lobatschewsky'schen Planimetrie. —

In jedem Punkt der Z. zu einer Grundebene giebt es zwei ausgezeichnete Richtungen: die gemeinsame oder Hauptrichtung und die auf ihr senkrechte, die Normale.

Jede Gerade ist entweder Hauptgerade oder nicht — Nebengerade —, und dann besitzt sie einen Punkt, den Hauptpunkt, für welchen sie selbst die normale Richtung ist.

(Dafs es nur einen Hauptpunkt giebt, folgt daraus, dafs nie zwei parallele Gerade auf derselben dritten senkrecht stehen.)

6) Wird eine Nebengerade einer von zwei Zwischenebenen auf die andere projicirt, so geht der Abstand der Geraden und ihrer Projection durch die Hauptpunkte beider Geraden.

Das vom Hauptpunkt A der Geraden n gefällte Projectionslot trifft ν in α (Fig. 2), dann steht nach 5) n auf der Ebene $(\alpha A,\, g)$ bezw. $(\alpha A,\, \gamma)$, wenn g und γ Hauptstrahlen sind, senkrecht, also auch ν.

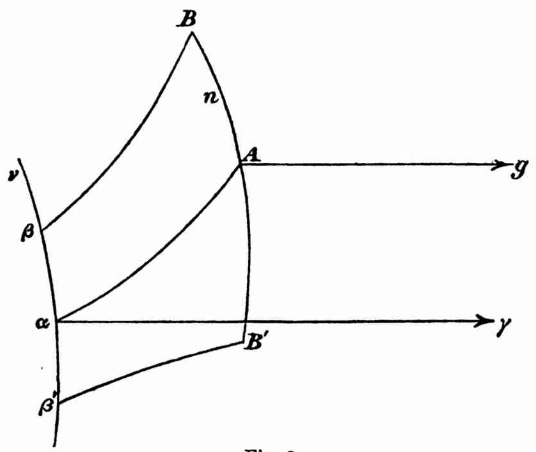

Fig. 2.

Dieser Satz führt die Aufgaben: „Zu einem gegebenen Winkel die Parallel-Distanz zu bestimmen“ und „zu zwei Insecanten den Abstand zu ermitteln“ auf einander zurück und löst die letztere ohne Hülfe der Abstandslinie. Die erstere wird räumlich ohne weiteres gelöst mit Hülfe des Satzes von den Ebenen der Winkel mit parallelen Schenkeln; die andere führt dann zur Aufgabe: „Durch zwei gegebene Insecanten n und ν die Zwischenebenen zu legen“. (Fig. 3.) Gegeben die Insecanten n und ν, construire die Ebene (n, ν), errichte auf sie in ν die auf (n, ν) senkrechte Ebene ε. Fälle von C, beliebig auf n, das Lot CD auf ν (welches zugleich Lot auf ε ist). Trage in C an CD den Parallelwinkel für die Distanz CD beliebig an, und fälle von D auf den freien Schenkel das Lot DF' und von F' auf CD das Lot $F'M$. Beschreibe um M mit $F'M$ in der auf CD senkrechten Ebene den Kreis M, fälle von D auf n die senkrechte Ebene, triff den Kreis in F bezw. φ, ziehe CF bezw. $C\varphi$, lege durch n und CF die Ebene, so ist dies die Zwischenebene; construire in (n, CF) die zu Winkel (n, CF) — $(n, C\varphi)$ — gehörige

Distanz auf n: CB; fälle von B auf ν das Lot $B\beta$, so ist $B\beta$ der Abstand.

Beweis: Es ist nur zu beweisen, dafs das in C auf der Ebene FCD errichtete Lot in die Ebene (n, CF) fällt. Errichtet man in dieser Ebene in C das Lot auf CF, so steht es auf DF senkrecht, weil DF auf der Ebene (n, CF) senkrecht steht, somit ist dieses Lot auch senkrecht auf FCD, also ist die Ebene (n, CF) Zwischenebene zu ε.

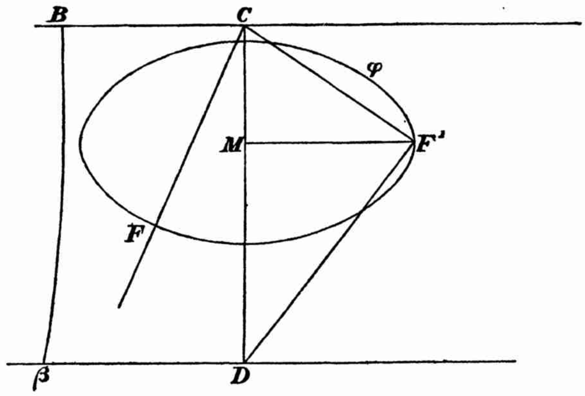

Fig. 3.

Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst: „Den Abstand zweier insecanten Ebenen ohne Abstandslinie zu construiren", und „die gemeinsame Richtung zweier Zwischenebenen zu finden."

Werden zwei Z. von einer Ebene geschnitten, und ist eine der Schnittgeraden keine Axe, so sind die Schnittgeraden Insecanten.

7) Alle Geraden einer von zwei Z., welche Insecanten derselben Geraden der anderen sind, gehören zu derselben Axe, und diese Axe hat die Hauptrichtung.

Der Satz ist die Verallgemeinerung von 6) und kann auch lauten:

Construirt man zu zwei Insecanten zweier Z. den Abstand und errichtet in den Fufspunkten jeder Ebene das Lot auf der betreffenden Geraden, so haben diese Lote die Hauptrichtung, und die Ebene dieser Lote steht auf beiden Z. zugleich senkrecht (Normalschnitt).

Der Beweis folgt aus dem Satze über die drei Schnittgeraden dreier Ebenen und dem Satze: Steht eine von zwei Insecanten, deren Abstand in ε liegt, auf ε senkrecht, so auch die andere:

Jede Senkrechte auf einer der Axen in einer der Ebenen ist Insecante zu jeder Senkrechten auf der anderen Axe in der anderen Ebene.

8) Werden zwei Z. von einer Ebene nicht in Hauptlinien geschnitten, so ist die Summe der inneren Neigungs-

winkel nach der Seite des Parallelismus hin kleiner als zwei Rechte.

(Werden zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten etc.)

Seien (Fig. 2) n und ν zwei Insecanten zweier Z. ε und η; A und α ihre Hauptpunkte, also $A\alpha$ ihr Abstand; g und γ, die Hauptlinien in A und α, sind also auf n und ν senkrecht. Trägt man auf ν zu beiden Seiten von α gleiche Strecken ab bis β und β', so sind β und β' für die Hauptrichtung entsprechende Punkte (vgl. Erklärung). Errichtet man in β und β' Lote auf ν in der Ebene (ν, n), und schneiden sie n in B und B', so sind B und B' gleichweit entfernt von A, also auch entsprechend, und die Lote βB und $\beta' B'$ sind gleich lang.

Steht $A\alpha$ auf γ senkrecht, so ist ν die Projection von n auf η, und βB wie $\beta' B'$ sind ebenfalls Lote auf η; $g\gamma$ geht dann durch $A\alpha$ und ist Normalschnitt von ε und η.

9) Sind β und β' zwei entsprechende Punkte auf η, und errichtet man in ihnen die Lote auf η, und das in β schneidet ε in B, so schneidet das andere in B', und βB und $\beta' B'$ sind gleich.

10) Wenn zwei Lote auf einer von zwei Z. bis zur anderen gemessen gleich lang sind, so sind sowohl ihre Fuſspunkte als auch ihre Endpunkte entsprechend.

Voraussetzung: βB und $\beta' B'$ senkrecht η und gleich lang; $\beta\beta'$ kann nicht die Hauptrichtung sein, weil sonst zwei Parallelen an zwei Stellen gleichen Abstand hätten. Sei β_2 der β entsprechende Punkt auf $\beta\beta'$, und $\beta_2 B_2$ das betreffende Lot, so müſste $\beta_2 B_2 = \beta B = \beta' B'$ sein, und es hätten drei Punkte einer Geraden von einer anderen gleichen Abstand, d. h. $\beta_2 \equiv \beta'$.

11) Errichtet man in zwei für irgend eine Richtung λ entsprechenden Punkten einer Ebene ε gleich lange Lote auf der Ebene (nach derselben Seite), und zieht durch ihre Endpunkte Parallelstrahlen zu λ, so ist die Ebene der Strahlen Z. zur Ebene ε in der Richtung λ.

12) Errichtet man auf drei Punkten eines Grenzkreises einer Ebene ε drei gleich lange Lote, so liegen ihre Enden auf einer Z. zu ε für die Axe des Grenzkreises.

(Grund: Satz 5.)

13) Die drei Endpunkte liegen wieder in einem Grenzkreis (S. 10).

14) Die Lote von zwei für die Hauptrichtung entsprechenden Punkten einer von zwei Z. auf die andere sind gleich lang, und ihre Fuſspunkte sind entsprechend für die Hauptrichtung.

Sind (Fig. 4) α und $\beta \sim$ (stets gemeint: für die Hauptrichtung) in einer von zwei Z. η, und construirt man durch α und β die Normalschnitte mittelst der Lote αM und βN auf η, und in jedem zu α bezw. β den entsprechenden Punkt A bezw. B in ε, so sind A und $B \sim$ (entweder Congruenz der Streifen, oder Satz 1).

Man kann den Hauptsatz 1) hier direct beweisen für den Specialfall, dafs das Prisma rechtwinklig, und mittelst seiner allgemein.

15) Ein paar Normalschnitte eines Paares Z. bilden selbst wieder ein Paar Z. in gleicher Richtung.

(Ihre Schnittgerade müfste auf beiden ursprünglichen zugleich senkrecht stehen; auch direct S. 4.)

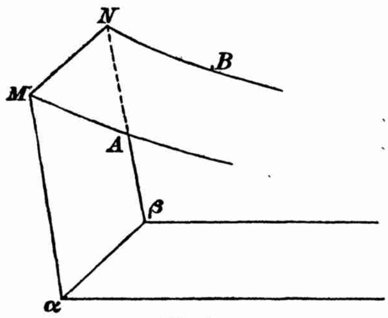

Fig. 4.

16) Das erste Paar ist wieder ein Paar Normalschnitte des zweiten (S. 5).

Folgerung: Auch $\alpha\beta$ und AB sind gleich, daher sind die Grenzbogen αA und βB, sowie die Bogen $\alpha\beta$ und AB einander gleich, und es stehen je zwei benachbarte auf einander senkrecht; danach ist die Existenz von Rechtecken auf der Grenzfläche nachgewiesen, und damit das Parallelenaxiom etc.

17) Das Viereck $\alpha AB\beta$ ist ein ebenes.

(Zusatz zu S. 7.) Im Viereck $\alpha AB\beta$ sind alle Winkel einander gleich, wegen der Doppelsymmetrie um die Axen je zweier gegenüberliegenden Seiten, welche von den Mittelschnitten ausgeschnitten werden; die Diagonalen sind gleich und halbiren einander. (Beweis wie in Simon, Elemente der Geometrie.) Ihr Schnittpunkt S ist der Mittelpunkt des dem Viereck umschriebenen Kreises, kurz: das ebene Viereck $\alpha AB\beta$, das dem Rechteck auf der Grenzfläche entspricht, hat alle Eigenschaften des euklidischen Rechtecks ohne die rechten Winkel.

Die Punkte über Kreuz A und β, B und α sind gleichfalls $\sim$. (Entweder nach 1), oder die Schnittgerade der beiden Mittelebenen geht durch S, hat die Hauptrichtung und steht auf $\alpha AB\beta$ senkrecht.) [Zwei Geraden zweier sich schneidender Ebenen, welche einander parallel sind, sind der Schnittgeraden parallel.]

18) Die Diagonalebenen ($A\infty$, $\beta\infty$) sowie ($B\infty$, $\alpha\infty$) bilden mit beiden Paaren Z. wechselweise gleiche Winkel.

19) Wird ein Paar Z. von einer Ebene in Hauptlinien geschnitten, so sind die Wechselwinkel gleich, oder was dasselbe ist, betragen die inneren Neigungswinkel zusammen zwei Rechte (Herstellung der Figur $\alpha AB\beta$).

20) Umkehrung des vorigen (Beweis: S. 8).

21) Legt man durch eine Hauptlinie a der einen von zwei Z. Schnittebenen, welche die andere in b und c schneiden, so ist die Summe der Neigungswinkel des Prisma (a, b, c) gleich zwei Rechten (S. 18).

22) In jedem dreiseitigen Prisma ist die Summe der drei Neigungswinkel der drei Seitenflächen gleich zwei Rechten. (Man lege durch a zu (bc) die Zwischenebene.)

23) Werden zwei Ebenen von einer dritten so geschnitten, dafs die Schnittlinien parallel und die Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Ebenen Z.

24) Schneiden sich drei Ebenen in drei Geraden, welche sich schneiden, so ist die Summe der drei inneren Neigungswinkel gröfser als zwei Rechte; schneiden sie sich in drei Insecanten, so ist diese Summe kleiner als zwei Rechte (drei zu je zwei Insecanten stehen auf derselben Ebene senkrecht). S. 22 und S. 24 zusammen umfassen alle Fälle und sind nach dem Drobisch-Möbius'schen Princip umkehrbar.

Man construirt ein paar Z. dadurch, dafs man in einer Ebene s zwei parallele Strahlen a und b zieht und durch a und b zu s die Lotgitterebenen $(l_a, a) \cdot (l_b, b)$ legt; diese beiden Zwischenebenen A und B begrenzen eine Configuration, welche man Raumstreifen nennen kann. Zieht man dann in s zum ebenen Streifen (ab) die Mittellinie m, welche a und b parallel ist, so ist die Lotgitterebene $(l_m, m) = M$ der Mittelschnitt des Raumstreifens, ist selbst zu A oder B eine Z. in gleicher Richtung, und der halbe Raumstreifen läfst sich mit dem ganzen zur Deckung bringen. Die Haupteigenschaft von M giebt der Satz:

Die Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte in A und B wird von M halbirt.

25) M schneidet den zu zwei solchen Punkten gehörigen Streifen in der Streifenaxe.

Wird ein Paar Z. von einem in derselben Richtung parallelen zweiten Paar geschnitten, so lassen sich zu jedem Punkt α auf einer der vier Schnittparallelen die entsprechenden auf den drei anderen bestimmen. Diese vier Punkte α, A, β, B sind zu je zwei $\sim$, die vier Neigungswinkel betragen zusammen vier Rechte, die gegenüberliegenden Seiten und Winkel sind gleich, das Viereck hat alle wesentlichen Eigenschaften des Parallelogramms, aber es gilt der Satz:

26) Ausgenommen den Fall, dafs beide Paare sich rechtwinklig durchschneiden, sind alle entsprechenden Schnittvierecke windschief.

(Die Schnittlinie l der Mittelebenen geht durch die Mitte S_1 von αB und S_2 von $A\beta$ und steht auf beiden senkrecht; $S_1 S_2$ ist der Abstand von $A\beta$ und $B\alpha$.)

Die Sätze über die Zwischenebenen enthalten eigentlich die ganze Geometrie der Grenzfläche.

Die Grenzfläche (Horisphäre Lobatschewsky's, Fläche F Bolyai's) werde mit G bezeichnet.

S. 1[a]) Durch zwei Punkte einer Fläche G ist auf ihr nur ein Grenzkreis möglich (Satz 1).

S. 2[a]) Eine Ebene, welche mit G einen Punkt gemeinsam hat, schneidet G in einem Kreis bezw. Grenzkreis oder berührt sie.

Die Ebene ε gehe durch A auf G und nicht durch die zu A gehörige Axe a, dann läſst sich a auf ε projiciren in p, auſser wenn ε in A auf a senkrecht; dann liegt auf p noch ein Punkt B von G, denn wenn der Winkel zwischen p und a gleich φ, so ist $AB = 2\, d\varphi$ ($d\varphi$ Paralleldistanz zu φ), und dies ist nur 0, wenn φ gleich 90, wo also B mit A zusammenfällt, und unendlich, wenn $\varphi = 0$, d. h. ε parallel a. Die Mitte von AB sei M, die Senkrechte l in M auf AB in (a, p) ist dann parallel a, also eine Axe der G und zugleich als Projectionslot senkrecht ε. Jeder Punkt des um M mit MA in der Ebene ε geschlagenen Kreises liegt dann zugleich auf G, und jeder Punkt, der zugleich auf ε und G liegt, liegt auf diesem Kreise; denn wenn X ein Punkt des Kreises, so trifft das von M auf AX gefällte Lot AX in der Mitte μ, die Symmetrieebene η von AX enthält dann l. Die Parallele zu l durch μ in η ist parallel a, steht auf AX in der Mitte μ senkrecht, somit ist $X \sim A$ für Richtung a, d. h. X auf G. — Umgekehrt wenn Z ein Punkt, der zugleich auf ε und G liegt, v die Mitte von AZ, und ζ die Parallele durch v zu a oder l ist, so liegen ζ, l und das in v auf der Ebene ε errichtete Lot alle drei in einer Ebene; diese ist die Symmetrieebene von A und Z, und somit M von A und Z gleich weit entfernt.

Geht die Ebene ε durch a, so liegt nach Definition von G der ganze in ε durch A und a bestimmte Grenzkreis auf G, und nur dieser. Steht ε in A auf a senkrecht, so hat der gemeinsame Kreis den Radius O, die Ebene ist Tangentiale von G, und A.

Damit ist die Beziehung der Ebene, welche einen Punkt mit G enthält, in gegenseitig eindeutiger d. h. umkehrbarer Weise geordnet.

Folgerung. Eine Ebene, welche insecant zu einer Tangentialen von G ist und auf derselben Axe senkrecht steht, schneidet G in einem Kreise, wenn sie auf der Seite des Parallelismus liegt, und im entgegengesetzten Falle hat sie keinen Punkt gemein.

S. 3[a]) Die Grenzfläche ist in sich verschiebbar und ändert ihre Lage durch Rotation um eine ihrer Axen nicht.

S. 4[a]) G wird durch jede ihrer Grenzlinien in zwei symmetrische Teile geteilt; der Grenzkreis durch ein paar Gegenpunkte steht in G auf der Halbirungsebene senkrecht; die Grenzfläche ist nicht umkehrbar, es giebt wie auf der Kugel Congruenz und Symmetrie.

S. 5[a]) In jedem Grenzbogendreieck auf G ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte.