Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend.

Von JOHANNES TROPFKE in Berlin.

Mit 43 Figuren.

(Fortsetzung.)

III. Euklid (Alexandria; um 325 v. Chr.).

A. Elementa.[31] *B. Data.*[32])

Gleichungsform: $\mathbf{x^2 + px = q}$ $(p = 10,\ q = 39;\ x = 3)$.

Elem. II, 4[33]): *Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden Teilstrecken, vermehrt um ihr doppeltes Rechteck* (Fig. 2).

Behauptung: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\overline{AC \cdot CB}$.

Beweis aus der Figur klar (bei Euklid zwei Beweise).

Sind die Teilstrecken $AC = p\ 2$ und $BC = x$, so ist die ganze Strecke $AB = \left(x + \frac{p}{2}\right)$ und die Rechtecke je $\frac{p}{2} \cdot x$. Dann ist nach II, 4

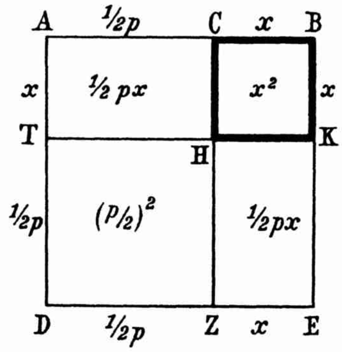

Fig. 2.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{1}{2}p\right)^2.$$

Legt man die Gleichungsform $x^2 + px = q$ zugrunde, so wird weiter

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = q + (\tfrac{1}{2}p)^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q} - \tfrac{1}{2}p.$$

Das ist die Methode der quadratischen Ergänzung, zunächst in geometrischem Gewande.

Elem. VI, 29[34]): *An eine gegebene Strecke* $(= p)$ *ein Parallelogramm (Quadrat), das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist* $(= q)$, *so*

31) Euclidis opera omnia, ed. I. L. Heiberg u. H. Menge. Leipzig. Vol. I, libros I—IV continens, 1883. Vol. II libros V—IX continens, 1884.

32) Eucl. Op.[31] Vol. VI, Euclidis Data cum commentario Marini et scholiis antiquis, ed. H. Menge, Leipzig 1896.

33) Op. I, S. 122—125.

34) Op. II, S. 166—171.

anlegen, daß ein ähnliches Parallelogramm (Quadrat) überschießt (Fig. 3).

Im folgenden wird die Quadratform gewählt.

Gegeben $AE = EB = \frac{1}{2}p$, eine Fläche q.

Die gegebene Fläche q zusammen mit dem Quadrat $(\frac{1}{2}p)^2$ sei in ein Quadrat verwandelt: $Z'M'X'N'$. Ferner sei über $EB = \frac{1}{2}p$ das Quadrat $EZLB$ gezeichnet und auf dasselbe — mit Z' auf Z und Seite auf Seite — das Quadrat $Z'M'X'N'$ gelegt, es heiße $ZMXN$. Dann ist Gnomon LXE gleich q. Wird BO mit x bezeichnet, so ist Rechteck LO = Rechteck EP = Rechteck $AN = \frac{1}{2}px$. Ersetzt man in dem Gnomon LXE Rechteck LO durch Rechteck AN, so ist das große Rechteck AX gleich q; andererseits besteht Rechteck AX aus den Teilen $\frac{1}{2}px + \frac{1}{2}px + x^2$. Daher ist $q = px + x^2$.

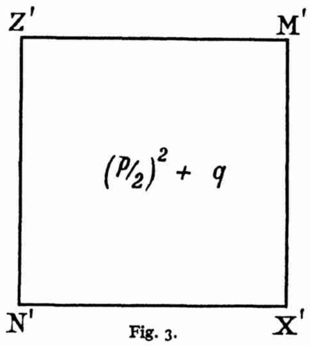

Fig. 3.

Die anzutragende Fläche q schießt über die Strecke $AB = p$ um das Quadrat x^2 hinaus.

Euklids Konstruktion ergibt sonach die geometrische Lösung der quadratischen Gleichungsform:

$$\boldsymbol{x^2 + q = px} \qquad (p = 10,\ q = 21;\ x_1 = 3).$$

Elem. II, 5[35]: *Wird eine Strecke AB in gleiche (Punkt C) und ungleiche (Punkt D) Teile geschnitten, so ist das Rechteck aus den ungleichen Teilen, vermehrt um das Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten, gleich dem Quadrat über der halben Strecke ($\frac{1}{2}AB$).*

Behauptung: $AD \cdot DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$.

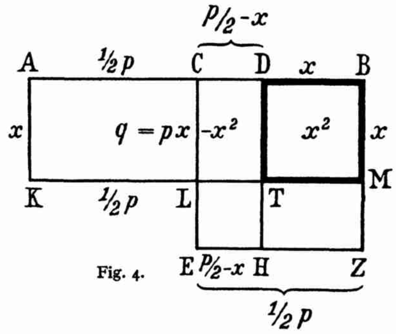

Fig. 4.

Beweis: Fig. 4. Die beiden Rechtecke AL und LB sind gleich, ebenso Rechteck CT und TZ. Daraus folgt

$$\overline{AL} + \overline{LD} = \text{Gnomon } LBH,$$

d. i. $\quad$ Rechteck $\overline{AD} \cdot \overline{DT} = \text{Gnomon } LHB$,

oder $\quad \overline{AD} \cdot \overline{DB} = \text{Gnomon } LHB$.

---

35) Op. I[31], S. 128—133.

Addiert man auf beiden Seiten das Quadrat $LTHE$ oder $\overline{CD}^2$, so wird

$$AD \cdot DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nennt man die ganze Strecke AB p und DB x, so ist

$$AC = \tfrac{1}{2}p,\ CB = \tfrac{1}{2}p,\ CD = (\tfrac{1}{2}p - x),\ AD = p - x;$$

daher wird der bewiesene Satz

$$AD \cdot DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$$

zu

$$(p - x)\,x + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2.$$

Legt man die Gleichungsform $x^2 + q = px$ zu Grunde, nach der $px - x^2 = q$ ist, so ergibt sich

$$q + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

$$(\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 - q$$

$$\tfrac{1}{2}p - x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

$$x = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}.$$

Dies ist die bekannte Lösungsformel. Die zweite Lösungsformel

$$x = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$

gibt Euklid *nicht*. Daher wird von Späteren vielfach die Subtraktion der Wurzelgröße bevorzugt. Indes kann sie — und wurde sie später — (S. 30) mit Hilfe desselben Satzes II, 5 gefunden werden.

Elem. VI, 28[36]: *An eine gegebene Strecke* ($= p$) *ein Parallelogramm (Quadrat), das einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist* ($= q$) *so anlegen, daß ein ähnliches Parallelogramm (Quadrat) fehlt* (Fig. 5).

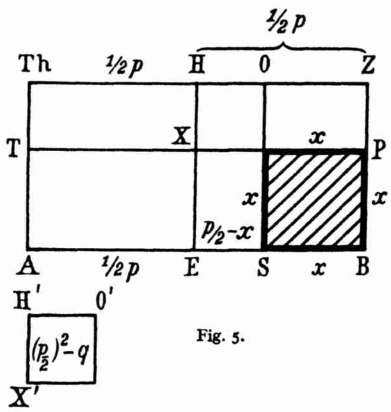

Fig. 5.

Gegeben sei $AE = EB = \tfrac{1}{2}p$, eine Fläche q.

Die bekannte Fläche $(\tfrac{1}{2}p)^2$, vermindert um die gegebene Fläche q, sei in ein Quadrat $X'H'O'$ verwandelt. Es muß also die Bedingung[37]) erfüllt sein, daß $(\tfrac{1}{2}p)^2$ größer als q ist. Über $EB = \tfrac{1}{2}p$ sei das Quadrat $EHZB$ gezeichnet und auf dasselbe (mit H' auf H und Seite auf Seite) das Quadrat $X'H'O'$, gleich XHO gelegt. Dann ist der vom Quadrat $\overline{EB}^2$ übrig bleibende Gnomon XBO gleich q. Nimmt man von dem Gnomon XBO das Rechteck OB fort und legt es auf das ihm gleiche AX, so ist auch das Rechteck TS gleich q. Es fehlt also beim

36) Op. II[31], S. 162—167. 37) Op. II[31] S. 162, Z. 5f.

Antragen von q an $AB = p$ das Quadrat über SB. Nennt man $SB = BP = x$, so ist $SB^2 = x^2$, Rechteck $TB = px$ und Rechtecke $TS = px - x^2$. Da TS die anzutragende Fläche q war, so ist $q = px - x^2$, also

$$x^2 + q = px.$$

Euklids Konstruktion VI, 28 gibt also die geometrische Lösung der quadratischen Normalform $x^2 + q = px$.

Auch in Elem. VI, 28 kennt Euklid nur eine Lösung: $x_1 < \frac{1}{2}p$. Die zweite Lösung, für die die Wurzel nicht subtrahiert, sondern addiert wird, also $x > \frac{1}{2}p$ ist, entging ihm auch hier.

Elem. II, 6[38]: *Wird eine Strecke AB (durch C) in gleiche Teile geteilt und um eine gewisse Strecke (BD) verlängert, so ist das Rechteck aus der angetragenen Strecke (BD) und der Gesamtstrecke (AD), vermehrt um das Quadrat der halben Strecke ($\frac{1}{2}AB = CB$), gleich dem Quadrat über der Summe der halben Strecke und dem angetragenen Stück (CD)* (Fig. 6).

Behauptung: $\quad AD \cdot DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2.$

Beweis: $\overline{AD} \cdot \overline{DB}$ ist das Rechteck $\overline{AD} \cdot \overline{DM}$. Eben so groß ist der Gnomon LDH, wenn man für das Rechteck $\overline{AL}$ das ihm gleiche Rechteck $\overline{HM}$ setzt. Also

$$AD \cdot DB = \text{Gnomon } LDH.$$

Fügt man auf beiden Seiten das Quadrat $EHNL = \overline{CB}^2$ hinzu, so vervollständigt sich Gnomon LDH zu dem Quadrat über CD. Es ergibt sich also

$$AD \cdot DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$$

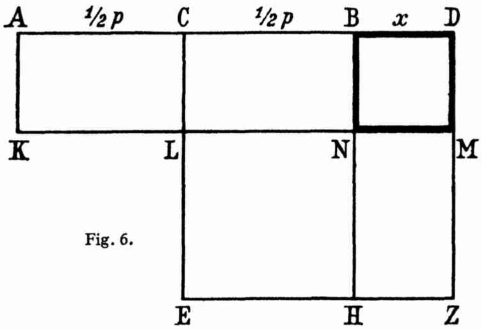

Fig. 6.

Nennt man die gegebene Strecke AB p und die angetragene Strecke BD x, dann ist $AC = \frac{1}{2}p$, ferner $AD = p + x$ und $CD = (\frac{1}{2}p + x)$. Aus Satz II, 6 wird durch Einsetzen

$$AD \cdot DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(p + x) \cdot x + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p + x)^2$$

$$px + x^2 + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p + x)^2.$$

Diese Beziehung führt wieder auf die zuerst behandelte Grundform der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px = q \qquad (p = 10,\ q = 39;\ x = 3).$$

38) Op. I[31], S. 132—135.

Nach Einsetzung von q für $px + x^2$ wird

$$q + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p + x)^2$$
$$\tfrac{1}{2}p + x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 + q} - \tfrac{1}{2}p.$$

Bei Betrachtung der angeführten euklidischen Sätze und Konstruktionen fällt auf, daß der Normalfall der quadratischen Gleichung

$$x^2 = px + q$$

fehlt. Wir wissen aber aus den Data (S. 35), daß Euklid auch diesen Fall durch eine geometrische Konstruktion lösen kann.

Untersuchen wir hier deshalb die Reichweite der Sätze II, 5 und 6 genauer. Es handelt sich bei beiden um eine Folge von vier Punkten. Drei von ihnen ACB sind fest: $AB = p$, $AC = CB = \tfrac{1}{2}p$. Der vierte Punkt D kann verschiedene Lagen zu den drei festen annehmen. Liegt D zwischen A und B, so ist dies Euklid II, 5; liegt D außerhalb AB, so kommen wir zu Euklid II, 6. Beide Fälle haben wieder zwei Möglichkeiten. In Euklid II, 5 kann D zwischen CB oder zwischen CA liegen; bei Euklid II, 6 rechts von B oder links von A. In allen vier Fällen sei der Abstand DB mit x bezeichnet. Die Ausnutzung der euklidischen Sätze kann dann, wie die Figuren erläutern, mit modernen Symbolen folgendermaßen wiedergegeben werden.

Eukl. II, 5a (Fig. 7).

$\boldsymbol{x < \tfrac{1}{2}p}$

$$AD \cdot DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$$
$$(p - x)\,x + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

$\boldsymbol{x^2 + q = px}$

$$q + (\tfrac{1}{2}p - x)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$
$$(\tfrac{1}{2}p - x) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$
$$x = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}.$$

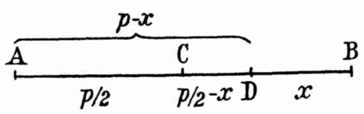

Fig. 7.

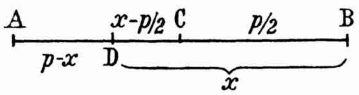

Fig. 8.

Eukl. II, 5b (Fig. 8).

$\boldsymbol{x > \tfrac{1}{2}p}$

$$AD \cdot DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2$$
$$(p - x)\,x + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$

$\boldsymbol{x^2 + q = px}$

$$q + (x - \tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2$$
$$(x - \tfrac{1}{2}p) = \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}$$
$$x = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2 - q}.$$

Eukl. II, 6a (Fig. 9).

$$AD \cdot DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(x + p)\, x + (\tfrac{1}{2} p^2) = (x + \tfrac{1}{2} p)^2$$

$\mathbf{x^2 + px = q}$

$$q + (\tfrac{1}{2} p)^2 = (x + \tfrac{1}{2} p)^2$$

$$x + \tfrac{1}{2} p = \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 + q}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 + q} - \tfrac{1}{2} p.$$

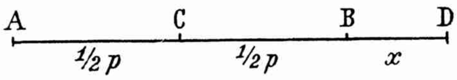

Fig. 9.

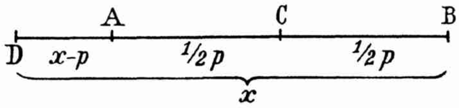

Fig. 10.

Eukl. II, 6b (Fig. 10).

$$AD \cdot DB + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(x - p) \cdot x + (\tfrac{1}{2} p)^2 = (x - \tfrac{1}{2} p)^2$$

$\mathbf{x^2 = px + q}$

$$q + (\tfrac{1}{2} p)^2 = (x - \tfrac{1}{2} p)^2$$

$$(x - \tfrac{1}{2} p) = \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 + q}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2} p)^2 + q} + \tfrac{1}{2} p.$$

Zu beachten sind noch die extremen Fälle. Bei II, 5a kann D auf B fallen. Dann ist $BD = x = 0$, damit wird aber aus $AD \cdot DB = q$ auch $q = 0$ sein müssen. Ähnlich liegt die Sache, wenn D auf A fällt; dann ist $x = p$ und wiederum $q = 0$. Die Gleichung $x^2 = px$ hat also die beiden Lösungen 0 und p. Diese Sonderfälle sind natürlich im Altertum und in der Araberzeit von den Mathematikern nicht beachtet worden, da sie einen Wert $x = 0$ nicht anerkennen. Anders ist es mit dem Fall, daß bei Euklid II, 5 D auf C fällt. Dann wird $x = \tfrac{1}{2} p$: von der zweiten Zeile bleibt nur übrig $q = (\tfrac{1}{2} p)^2$. Die Araber erörtern diesen Fall zumeist, Euklid lehnt ihn ab, da er ja (S. 28) die Bedingung stellt, daß $(\tfrac{1}{2} p)^2$ größer als q sein soll. Bei dem Satz Euklid II, 6 treten weitere Sonderfälle nicht auf.

Euklid hat also mit seinen Sätzen II, 4—6 die vollständige Lösung der Gleichung zweiten Grades gebracht: es muß seine Bedeutung haben, daß diese drei Sätze eine besondere Gruppe für sich in Buch II bilden.

Der Normalfall $x^2 + px = q$ ist doppelt gelöst, einmal durch II, 4, dann durch II, 6a. Wir finden nunmehr auch den Fall der größeren Wurzel bei $x^2 + q = px$ und den oben vermißten Normalfall $x^2 = px + q$. Über die Lage von D hat Euklid in seinem Beweis von II, 6 gar keine Voraussetzung gemacht: sein Satz gilt eben allgemein, also auch für II, 6b. Eine Bestätigung finden wir unten in dem Auftreten dieses Normalfalles in den Data. Die Allgemeingültigkeit von Euklid II, 5 könnte man ebenso dafür heranziehen, daß Euklid auch der größere Wurzelwert $x_2 > \frac{1}{2}p$ bekannt war. Dem widerspricht aber, daß er in der Konstruktionsaufgabe VI, 28 ebenfalls nur die eine Lösung $x_1 < \frac{1}{2}p$ kennt.

Man kann sich der Überzeugung nicht verschließen, daß diese Sätze schon zu Euklids Zeiten rein algebraisch ausgenutzt wurden, ja bereits lange vor ihm, und daß ihre Quelle in der babylonischen Mathematik zu suchen ist.

Die Geschichte der quadratischen Gleichungen wird weiter zeigen, daß im Kampf der Sätze II, 6a und II, 4 der letztere den Sieg davontrug, sobald negative Gleichungswurzeln Anerkennung fanden (seit Bombelli). Danach erschien erst die vierte Normalform $x^2 + px + q = 0$, die mit wechselndem Vorzeichen von p, q die Alleinherrschaft an sich riß. Schon zu Zeiten des Clavius hatte man keine Ahnung mehr von der Bedeutung der Sätze Euklid II, 5, 6.

Verfolgen wir zunächst, wo Euklid in seinen Elementen von den Sätzen II, 5 und 6 Anwendung macht.

a) **II, 11:** Eine Strecke stetig teilen.[39]) Modern gefaßt, eine Größe x ist so zu bestimmen, daß $a : x = x : (a - x)$ oder $x^2 + ax = a^2$. Das ist nur ein besonderer Fall der Normalform $x^2 + px = q$, wo $p = a$ und $q = a^2$ ist. Demgemäß ist Euklid auf das Bilden der quadratischen Ergänzung oder auf Benutzung des Satzes II, 6 hingewiesen. Er wählt den letzteren Weg, ein Zeichen vielleicht, daß die Lösung quadratischer Gleichungen nach II, 6 zu seiner Zeit die üblichere war.

Unter $AB = a$ wird das Quadrat $ABDC$ konstruiert, AC in E halbiert und CA bis Z verlängert, so daß $EB = EZ$ wird (Fig. 11).

Alsdann ist schon $AZ = x$ der gesuchte größere Streckenabschnitt.

Auf die Punktfolge $CEAZ$ wird II, 6 angewendet:

$$\begin{array}{rl|r}
CZ \cdot ZA + \overline{AE}^2 & = \overline{EZ}^2 & \\
& = \overline{EB}^2 & \\
& = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 & \\
CZ \cdot ZA & = \overline{AB}^2, & \text{modern } x\,(a + x) = a^2 \\
CZ \cdot ZA - \text{Rechteck } TC & = \overline{AB}^2 - \text{Rechteck } TC & x\,(a + x) - ax = a^2 - ax \\
AT^2 & = \text{Rechteck } TD & x^2 = a\,(a - x)
\end{array}$$

w. z. b. w.

39) Op. I[31], S. 152—155.

b) Die Aufgabe **II, 14**[40]): ein Rechteck $a \cdot b$ in ein Quadrat zu verwandeln, gibt auch ein Beispiel einer quadratischen Gleichung. Wird über $a + b = BEZ$ ein Halbkreis geschlagen, so ist die in E senkrecht stehende Halbsehne die gesuchte Quadratseite. BZ wird durch E ungleich, durch den Kreismittelpunkt gleich geteilt: also kann II, 5 angewendet werden.

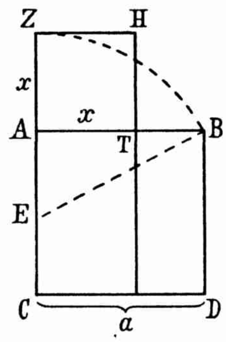

Fig. 11.

c) Auch bei den Schnittverhältnissen zweier Sehnen bzw. zweier Sekanten findet Euklid Gelegenheit für seine Sätze, bei **III, 35** für II, 5 und bei **III, 36** für II, 6. Der quadratische Charakter dieser Sätze tritt aber nicht so klar hervor.

Geben uns die Sätze II, 4, 5, 6 Flächenbeziehungen, die geradezu wie unsere modernen Formeln angesetzt werden, so zeigen die Sätze VI, 28, 29 die entsprechenden geometrischen Konstruktionen voll ausgeführt. Ganz anders ist wiederum der Charakter der *Data* Euklids. Hier wird nur die *Möglichkeit* gezeigt, eine vorgelegte Aufgabe rechnerisch oder konstruktiv zu lösen.

Gehen wir auf **Data 58**[41]) ein, um einen Vergleich mit der S. 28 behandelten Konstruktion Elem. VI, 28 zu geben. Wir beschränken uns dabei wieder auf Quadrate und Rechtecke.

Data 58: *Wenn ein gegebenes Flächenstück (Quadrat q) an eine gegebene Strecke (p) so angelegt wird, daß eine Figur gegebener Art (Quadrat) fehlt, so sind die Seiten der fehlenden Fläche gegeben* (Fig. 12).

Ausführung: AD durch E halbiert, also ED bekannt. Quadrat $EDZH$ konstruiert, also Figur $EDZH$ der Form nach und dann auch der Größe nach bekannt. Nun ist Quadrat $EDZH$ gleich Rechteck AG + Quadrat GH (da Rechteck AK gleich Rechteck KD und Rechteck EG gleich Rechteck EZ): also auch $AG + GH$ bekannt. Da $AG\ (= q)$ bekannt ist, so auch Quadrat HG und also auch Seite EB und durch $ED = \frac{1}{2}p$ auch BD.

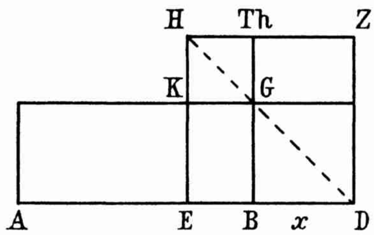

Fig. 12.

Diese Ausführung entspricht der quadratischen Gleichung $q = px - x^2$. Man hat das Gefühl, daß der antike Leser in der Ausführung Euklids eine Anleitung zur Ausrechnung eines Beispieles sah. Hatte er sich etwa das Beispiel $p = 10$ und $q = 21$ vorgenommen,

40) Op. I[31], S. 160—163. 41) Op. VI[32], S. 104—107.

so wird er sich, genau wie **Euklid** in seinen angedeuteten Schlüssen vorgeht, niedergeschrieben haben: $AD = 10$, $ED = 5$, $\overline{ED}^2 = 25$. Weiter $25 = 21 +$ Quadrat GH, Quadrat $GH = 4$, $EB = 2$, $BD = 3$. Genau dieselben Zahlen schreiben wir uns heute hin, wenn wir die Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$ lösen wollen.

Besonders *wichtig* in Data 58 ist, daß auch hier nur *eine* Lösung, und zwar die kleinere $x_1 < \frac{1}{2}p$ gegeben ist. Von der größeren Wurzel ist keine Andeutung: das zeigt vor allem auch die Figur; für $x_2 > \frac{1}{2}p$ müßte der Punkt P zwischen A und E liegen, so wie es später in einer zweiten Figur die Araber nachholen.

Data 59[42]) entspricht genau so der Konstruktion VI, 29, zu der die Gleichung $q = px + x^2$ gehört.

Euklid gibt nun aber noch an späterer Stelle Übungsbeispiele, die mit quadratischen Gleichungen zu lösen sind, wie sie später **Diophant** und die Araber in Hülle und Fülle bringen. Es sind das in moderner Umschrift

Data 84: $x \cdot y = q$; $x - y = p$[43]),
Data 85: $x \cdot y = q$; $x + y = p$[44]),
Data 86: $x \cdot y = q^2$; $x^2 - y^2 = d^2$[45]).

Data 84 *lautet: Wenn zwei Strecken eine gegebene Fläche in gegebenem Winkel umfassen, die eine ist aber größer gegeben als die andere, dann ist jede von ihnen bekannt.*

Legen wir statt des Parallelogrammes ein Rechteck zugrunde, wie es auch die Figur **Euklids** tut (Fig. 13). Die größere Seite sei GB ($= x$), die kleinere BA ($= y$). Macht man $BD = BA$, so ist der Unterschied DG bekannt. Rechteck AG ist die gegebene Fläche q, $ABDE$ der Form nach ein Quadrat. Die gegebene Fläche q ist also an die bekannte Strecke DG so angelegt, daß ein Quadrat überschießt. Also ist BD bekannt (nach Data 59), schließlich auch AB und BG.

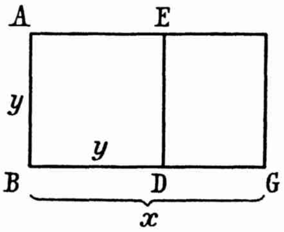

Fig. 13.

Gehen wir mit moderner Symbolik vor, so wird

$$y = x - p$$
$$q = xy = x^2 - px$$
$$x^2 = px + q.$$

42) Op. VI[32], S. 106—109.
43) Ebd. S. 164—167.
44) Ebd. S. 166—169.
45) Ebd. S. 168—173. Appendix S. 221—225.

Und das ist gerade der in den Elementen noch fehlende Normalfall (S. 30). Euklid kennt also, wie wir es oben schon vermuteten, die Lösung aller drei Normalfälle, die die antike Mathematik für die quadratische Gleichung aufgestellt hatte.

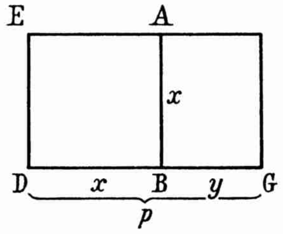

Fig. 14.

Ebenso kurz wird **Data 85** erledigt. In der Fig. 14 ist Rechteck AG die gegebene Fläche q. BG ($= y$) wird um BA ($= x$) bis D verlängert, so daß DG die gegebene Strecke ($= p$) ist. Die gegebene Fläche q ist dann an die gegebene Strecke p so angetragen, daß ein Quadrat ($AEDB$) *fehlt*. Nach Data 58 ist dann die Seite dieses Quadrates auch bekannt.

Die Ausführung der Aufgabe **Data 86** ist geradezu als glänzend zu bezeichnen: sie verrät uns, wie algebraisch damals schon gedacht und gerechnet wurde. Eliminieren wir y, so ergibt sich eine Gleichung vierten Grades, die allerdings in x^2 quadratisch ist.

Die folgende Darstellung ist nach dem Appendix[45]) zu Data 86 gegeben. In der Fig. 15 sind nur die lateinischen Buchstaben statt der griechischen genommen. Links stehen die einzelnen Data-Schlüsse Euklids; im Original sind immer nur wenige Worte zwischengeschaltet. Rechts ist die moderne Umschrift beigefügt mit einem Zahlenbeispiel, das natürlich auch nicht bei Euklid steht, wie es sich aber wohl so mancher, der Euklids Data ernsthaft studierte, ebenso neben die einzelnen Schlüsse gesetzt hat.

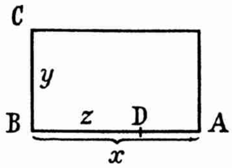

Fig. 15.

Satz: *Wenn zwei Strecken eine gegebene Fläche (Parallelogramm) unter gegebenem Winkel umfassen, das Quadrat der einen aber mit dem Quadrat der anderen verglichen, um ein Gegebenes (im Verhältnis) größer ist, dann ist jede von beiden gegeben.*

$$x^2 - y^2 = d^2 = 16$$

$$x \cdot y = q^2 = 15$$

$$d^2 = x \cdot z; \quad z = \frac{d^2}{x} = \frac{16}{x}$$

$$y^2 = x^2 - xz = x \cdot (x - z).$$

Euklid beschränkt sich auf ein Rechteck. $AB = x$ sei die größere Rechteckseite, $BC = y$ die kleinere. Die Differenz der Quadrate gibt Euklid nicht als Konstante (d^2) an, sondern in einem Vielfachen von $AB = x$, das er mit BD bezeichnet und auf der großen

Rechteckseite als BD abträgt. Damit führt er BD als neue Unbekannte ein ($BD = z$).

$AB^2 - BC^2 = AB \cdot BD$		$x^2 - y^2 = x \cdot z$	$= 16$
$[AB \cdot (AB - BD) = BC^2]$ [46])		$x(x - z) = y^2$	
$AB \cdot AD = BC^2$		$x(x - z) = y^2$	
$\dfrac{AB \cdot BD}{AB \cdot BC}$	bekannt	$\dfrac{xz}{xy} = \dfrac{d^2}{q^2}$	$= \dfrac{16}{15}$
$\dfrac{BD}{BC}$	„	$\dfrac{z}{y} = \dfrac{d^2}{q^2}$	$= \dfrac{16}{15}$
$\dfrac{BD^2}{BC^2}$	„	$\dfrac{z^2}{y^2} = \dfrac{d^4}{q^4}$	$= \dfrac{256}{225}$
Es war $CB^2 = BA \cdot AD$		$y^2 = x(x - z)$	
also $\dfrac{BA \cdot AD}{DB^2}$	bekannt.	$\dfrac{x(x - z)}{z^2} = \dfrac{q^4}{d^4}$	$= \dfrac{225}{256}$
$\dfrac{4\,BA \cdot AD + DB^2}{DB^2}$	„	$\dfrac{4x(x - z) + z^2}{z^2} = \dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}$	$= \dfrac{4 \cdot 225}{256} + 1$
$\dfrac{(BA + AD)^2}{BD^2}$	„	$\dfrac{(2x - z)^2}{z^2} = \dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}$	$= \dfrac{289}{64}$
$\dfrac{BA + AD}{BD}$	„	$\dfrac{2x - z}{z} = \sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}}$	$= \dfrac{17}{8}$
$\dfrac{BA + AD + BD}{BD}$	„	$\dfrac{x + (x - z) + z}{z} = \sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}} + 1$	$= \dfrac{25}{8}$
$\dfrac{2\,AB}{BD}$	„	$\dfrac{2x}{z} = \sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}} + 1$	$= \dfrac{25}{8}$
$\dfrac{AB}{BD}$	„	$\dfrac{x}{z} = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}} + 1\right]$	$= \dfrac{25}{16}$
Es war $AB \cdot BD$	„	$x \cdot z = d^2$	$= 16$
also AB^2	„	$x^2 = \dfrac{1}{2} d^2 \left(\sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}} + 1\right)$	$= 25$
AB	„	$x = \sqrt{\dfrac{1}{2} d^2 \left(\sqrt{\dfrac{4q^4 + d^4}{d^4}} + 1\right)}$	$= 5$
BC	„	$y = \dfrac{q^2}{x}$	$= 3.$

Die Lösung der eigentlichen quadratischen Gleichung wird durch die quadratische Ergänzung geleistet (vgl. den Zähler $4x(x - z) + z^2$), und zwar gemäß der Formel $(a - b)^2$, die **Euklid** in den Elementen Buch II neben Nr. 4: $(a + b)^2$ gar nicht aufgeführt hat.

Wir erkennen aus der vorstehenden Sammlung von Stellen aus den Elementen und den Data, daß **Euklid** die Lösung der drei Normal-

46) Fehlt bei **Euklid**.

fälle der quadratischen Gleichungen, nicht nur geometrisch, sondern auch rechnerisch-algebraisch kannte. Die Gruppe der drei Sätze im zweiten Buch der Elemente Nr. 4, 5, 6 geben die dazu nötigen „Formeln", die in den Data 58 und 59 bei den Schlußketten von Datum zu Datum auftretenden Festlegungen die Stufen, nach denen die rechnerische Lösung zu erfolgen hat.

Die betrachteten quadratischen Gleichungen haben 1 als Koeffizient des quadratischen Gliedes. In der Normalform $x^2+q=px$, die zwei positive Wurzeln haben kann, kennt Euklid nur die kleinere Wurzel $x<\frac{1}{2}p$.

Das gesamte Material verrät, wieweit schon zu Euklids Zeit die Algebraisierung vorgeschritten war: das geometrische Gewand ist sehr durchsichtig. Das trifft auch für die anderen Sätze des zweiten Buches der Elemente zu (Heron, S. 39). Nun teilt uns Proklos (410—485, Byzanz), der große Kommentator Euklids, mit, daß nach dem Bericht des Eudemos (um 334 v. Chr., Rhodos), der die älteste Geschichte der Mathematik schrieb[47]), gerade diese Sätze des zweiten Buches, insbesondere auch die Flächenanlegungen mit überschießendem und fehlendem Quadrat schon in der pythagoreischen Schule bekannt waren. Damit kommen wir auf das sechste Jahrh. v. Chr. und haben Anschluß an die babylonische Mathematik.

IV. Heron (Alexandria; um 100 v. Chr.).[48])

Unter dem Namen Herons laufen viele späthellenistische Schriften um, zumeist Satzrepetitorien und Aufgabensammlungen (S. 41); an dieser Stelle gehen wir nur auf die unzweifelhaft echten Schriften ein. Heron hatte einen Kommentar zu Euklids Elementen geschrieben, der uns leider nicht erhalten ist. Einiges daraus bringt Proklos (410—485 n. Chr. Byzanz), etwas mehr der Perser An-Nairizi († 922/923) in seinen eigenen Erläuterungen zu den Elementen. An-Nairizis Schrift ist uns in einer lateinischen Übersetzung des Gerhard von Cremona (1114—1167, Toledo) erhalten.[49])

Heron verbindet als Ingenieur hervorragende praktische Befähigung mit ausgezeichneten mathematischen Kenntnissen: er muß zeitlich der

47) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commantarii. Ed. G. Friedlein, Leipzig 1873, S. 419, Z. 15—18: „Das sind uralte Sätze, sagt Eudemos und seine Schule, und Erfindungen der Muse der Pythagoreer, die Anlegung von Flächen, auch mit überschießendem und fehlendem Flächenstück."

48) E. Hoppe, Heron von Alexandrien, Hermes 62, Berlin 1927, S. 79—105.

49) Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata ed. M. Curtze, Leipzig 1899.

Blütezeit der klassischen Mathematik (Archimedes, † 212 v. Chr.; Apollonios um 200 v. Chr.; Hipparch, um 150 v. Chr.) sehr nahe gestanden haben, etwa 130 v. Chr. Die ägyptische und babylonische Mathematik hatte die Geometrie nur als eins von vielen Anwendungsgebieten ihrer Rechenkunst angesehen: erst die klassische griechische Mathematik hob sie in ihre überragende Vorzugsstellung. Der Praktiker Heron macht diese Überhebung der Geometrie weniger mit als der Theoretiker Euklid. Unbekümmert um abstraktere Ideen arbeitet Heron die algebraische Behandlung eines Stoffes mehr und klarer heraus, als Euklid es sich merken lassen will. Satz 1 des Buches II der Elemente lautet: Liegen zwei Strecken vor und ist die eine in beliebig viele Teile geschnitten, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken gleich der Summe der Rechtecke aus der nicht zerschnittenen Strecke und den Einzelabschnitten der anderen. Hinter dem geometrischen Pathos steckt natürlich nur die bescheidene algebraische Formel $a \cdot (b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$. Euklid kannte und benutzte, wie wir gesehen haben (S. 36), sehr gewandt diese algebraische Operation. Mittlerweile hatten sich sogar algebraische Fachwörter wie unser „Ausklammern" und „Ausmultiplizieren" eingestellt, sicher ein Beweis für die außerordentlich starke Verwendung beider Operationen, und diese Termini überliefert uns Heron (lat. *dissolutio* und *compositio*.[50]) Ja mit Hilfe dieser „Formeln" II, 1 ersetzt er bei den folgenden Sätzen — hier interessiert uns II, 4, 5, 6 am meisten — die geometrischen Beweise Euklids durch leicht flüssige algebraische. Wir geben im folgenden seinen Beweis für II, 5 der Elemente: links stehen die Rechnungen Herons (ohne den verbindenden Text), rechts die moderne Ausführung mit den Bezeichnungen der quadratischen Gleichung $x^2 + q = px$. Natürlich fehlt Heron die algebraische Zeichenschrift, über die wir jetzt verfügen: indes das ging ja — abgesehen von den Ansätzen bei Diophant — allen Mathematikern so, weit über die arabische Zeit hinaus bis zum Ende des 15. Jahrh.

In Elem. II, 5 ist eine Strecke ab in g gleich und in d ungleich geteilt. Vorausgesetzt wird also $ag = gb$. Dann wird behauptet:

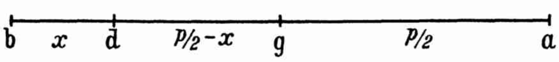

Fig. 16.

$$ad \cdot bd + dg^2 = bg^2$$

Heron bringt zwei Beweise, einmal geht er von der linken Seite der Behauptung aus und beweist die Richtigkeit der rechten Seite, das zweite Mal umgekehrt (Fig. 16).

50) Ebd. S. 89.

Im folgenden ist der erste Beweis gebracht. Die Veränderungen von einer Zeile zur nächsten sind in der oberen unterstrichen.

1.	$\underline{ad} \cdot bd$	$+ dg^2$	$\underline{(p - x)} \cdot x$	$+ (\frac{1}{2}p - x)^2 =$
2.	$= (\underline{ag} + gd) \cdot bd$	$+ dg^2$	$\underline{(\frac{1}{2}p + (\frac{1}{2}p - x)) \cdot x} + (\frac{1}{2}p - x)^2 =$	
3.	$= \underline{(bg + gd) \cdot bd}$	$+ dg^2$		
4.	$= bg \cdot bd + g\underline{d \cdot bd + dg^2}$		$\frac{1}{2}px + \underline{(\frac{1}{2}p - x)\, x + (\frac{1}{2}p - x)^2} =$	
5.	$= bg \cdot bd + dg \cdot \underline{(bd + dg)}$		$\frac{1}{2}px + (\frac{1}{2}p - x)\, (\underline{x + (\frac{1}{2}p - x}))=$	
6.	$= \underline{bg \cdot bd + gd \cdot bg}$		$\frac{1}{2}\underline{px + (\frac{1}{2}p - x) \cdot \frac{1}{2}p}$	$=$
7.	$= bg \cdot (\underline{bd + gd})$		$\frac{1}{2}p \cdot (\underline{x + (\frac{1}{2}p - x}))$	$=$
8.	$= bg \cdot bg$		$\frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}p.$	

Der Wortlaut Herons erscheint uns natürlich entsetzlich schwülstig: etwas schuld ist sicher auch die zweimalige Übersetzung, aus dem Griechischen ins Arabische und dann ins Lateinische. Der Übergang von dem linken Summand in Zeile 1 zu demjenigen in Zeile 4 lautet zum Beispiel[51]: Quia ag est aequalis gb, ergo conjunctio duarum superficierum, quae continentur a duabus lineis gb, bd et gd, bd, est aequalis superficiei, quae continetur a duabus lineis ad, db. (Weil $ag = gb$, darum ist die Summe zweier Flächen, die von den Strecken bd und gd, bd umfaßt werden, gleich der Fläche, die von den beiden Strecken ad und db umfaßt wird). Flächen sind selbstverständlich gar nicht gezeichnet: statt Fläche, die immer als Rechteck gedacht wird, sagen wir „Produkt", für Strecken „Größen". Übrigens braucht Euklid in Data 86 viel weniger Worte.

Kurz und bündig ist der algebraische Beweis[52]) für II, 6: An eine durch g gleich geteilte Strecke ab ist außen eine Strecke bd herangesetzt, dann wird behauptet:

$$ad \cdot db + bg^2 = gd^2.$$

Heron legt an das andere Ende der Strecke (Fig. 17) ba ein Stück

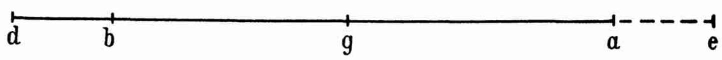

Fig. 17.

$ae = db$ heran. Dann ist in der Streckenfolge $egbd$ die ganze Strecke de in g gleich geteilt, in b ungleich. Also ist nach II, 5

$$be \cdot db + bg^2 = gd^2.$$

Da $be = ad$, so erhält man sofort die Behauptung:

$$ad \cdot db + bg^2 = gd^2 \text{ w. b. w.}^{53)}$$

51) Ebd. S. 95, Z. 6—9. 52) Ebd. S. 97.

53) Nach Clavius ist dieser Beweis von Maurice Bressieu (1576?—1608; Paris)

Die einzige quadratische Gleichung, die sich in einer echtheronischen Schrift findet, hängt mit folgender Aufgabe zusammen[54]): Auf den Seiten eines Dreieckes ABC je einen Punkt zu finden, so daß die Verbindungsgeraden flächengleiche Dreiecke an den Ecken A, B, C abschneiden. Als Zahlenbeispiel wird gewählt: $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$. Heißen die Stücke der Seite $BC (= a)$ x und y, so findet Heron für diese Größen die Bestimmung

$$x + y = 14 \quad \text{und} \quad x \cdot y = \tfrac{6720}{144}.$$

Dies ist die Heron wohlbekannte Aufgabe in den Data Nr. 85, die dem Satz 58 der Data und der Aufgabe VI, 28 der Elemente entspricht, und unsere modern geschriebene Gleichung

$$x^2 - 14x + \tfrac{6720}{144} = 0$$

liefert. Die Lösung wird demnach in den *Metrica* als jedem geläufig vorausgesetzt und das Resultat sofort mit $x = 8\frac{1}{2}$ angegeben. Das ist indes nur ein angenäherter Wert; genau ist

$$x = 7 \pm \sqrt{2\tfrac{1}{3}}.$$ [55])

Es ist festzustellen, daß der höchste Koeffizient gleich 1 ist, wie bei Euklid, aber von beiden möglichen Werten nicht der kleinere wie bei Euklid, sondern der größere (mit dem positiven Zeichen der Wurzel) genommen ist.

In der Zeit zwischen Euklid und Heron muß in der griechischen Mathematik die Kenntnis aufgetaucht sein, daß diese Normalform nicht nur einen Wert $x_1 < \frac{1}{2}p$, sondern noch einen zweiten, größeren besitzt. Als Quelle kommt vielleicht Hipparch in Betracht, den Heron genau kennt und öfters zitiert. Arabische Autoren[56]) kennen eine Schrift Hipparchs über Algebra. Der Perser Abū' lwafā (940—998) hat sie übersetzt und kommentiert. Dabei wird von geometrischen Ableitungen gesprochen, die dann wohl auf Euklid zurückgreifen würden. Auch Plutarch[57]) nennt den Hipparch einen

---

wiederentdeckt. Vgl. Ch. Fr. Pfleiderer, Scholien zu Euklids Elementen 2, Stuttgart 1826, S. 19.

54) Metrica, Opera Heronis 3, ed. H. Schöne, S. 148—151.

55) Vgl. G. Eneström, Bibl. math. 8_3, Leipzig 1907—08, S. 67.

56) Fr. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkyayyāmī, publ. trad. et accomp. d'extraits de manuscripts inédits. Paris 1851, S. XI aus einer Stelle im Fihrist: Man hat von ihm (Hipparch) . . . die Schrift über Algebra, bekannt auch unter dem Namen der „Definitionen". Dieses Werk ist übersetzt und durchgesehen durch Abū' lwafā Mohammed b. Mohammed, den „Rechner", der auch Verfasser eines Kommentars desselben Werkes ist, begleitet von Beweisen, gegründet auf geometrische Ableitungen.

57) Plutarch, Opera omnia Paris 1624 fol. I, III p. 1047; vgl. auch p. 732. Nach Woepcke[56].

Arithmetiker. Nicht gesagt ist dabei, daß Hipparch der Entdecker der beiden Lösungen der Form $x^2 + q = px$ ist: wir wissen, daß Hipparch reichhaltiges Material aus der babylonischen Astronomie und Mathematik in Händen gehabt hat. Auf Hipparch geht die Übernahme der babylonischen Sexagesimalbrüche in die griechische Astronomie zurück. Wie weit er bei der Zusammenstellung seiner Sehnentafel unter babylonischem Einfluß stand, ist noch nicht geklärt. Es ist nicht abwegig anzunehmen, daß er auch die babylonische Behandlung der quadratischen Gleichungen direkt kennen gelernt hat und damit die dort häufiger auftretende zweite, größere Wurzel. Die Einsicht von der Wichtigkeit der quadratischen Gleichungen und im besonderen dieser neuen Entdeckung, hat ihn wohl zu seiner Schrift über Algebra veranlaßt, in der er die Euklidischen Sätze erweitert und einen Beweis für die zweite Wurzel des Falles $x^2 + q = px$ nachholte.

Ein zweites unter dem Namen Heron überliefertes Beispiel einer quadratischen Gleichung ist sehr viel später anzusetzen und hat mit dem echten Heron gar nichts zu tun. Das erkennt man schon aus dem Charakter der Aufgabe und ihrer Lösung. Sie lautet:

Die Summe der Zahlen des Durchmessers, des Umkreises und des Flächeninhaltes eines Kreises sei 212. Die einzelnen Größen sind zu berechnen.[58])

Die Addition von Linien und Flächen durchbricht das von der klassischen griechischen Mathematik hochgehaltene Dimensionsprinzip. Solche Aufgabe hätte Heron auch nicht gestellt, selbst wenn er durch Vermittlung vielleicht von Hipparch Kenntnis bekommen hätte, daß in der babylonischen Mathematik Aufgaben der Art vorkommen.[59]) Indes von den Geometrica, die diese Aufgabe enthalten, ist nachgewiesen, daß wir es bei ihnen mit einer Beispielsammlung für Vermessungsaufgaben zu tun haben, wie sie etwa im 7. oder 8. Jahrh n. Chr. an griechischen Schulen möglich war, wo praktische Landmesser ausgebildet wurden.[60]) Inzwischen war aber das starre Dimensionsprinzip auch von griechischen Mathematikern fallen gelassen. Diophant (Ende des 3. Jahrh. n. Chr.) hat in dem 6. Buche

58) Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, IV, Heronis Definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur Geometrica, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1912, S. 380—381.

59) O. Neugebauer, Beiträge zur Geschichte der babylonischen Arithmetik, Quellen u. Studien B 1, 1930, S. 123.

60) E. Hoppe, Ist Heron der Verfasser der unter seinem Namen herausgegebenen Definitionen und der Geometrie? Philologus 75, 1918, S. 202f. Vgl. S. 226.

seiner Arithmetik eine ganze Reihe solcher dimensionswidrigen Aufgaben (S. 44). Man findet solche auch in einem Konstantinopeler Codex[61]), bei arabischen[62]) Mathematikern, wie Šoǵāʿ (zwischen 850 und 930, Ägypten).[63]) Alḫajjāmi (um 1100) gibt Aufklärung über diese Lässigkeit gegenüber dem Dimensionsprinzip: wenn er schreibe $x^2 = a$, so meine er unter a eben ein Rechteck, dessen eine Seite die Maßzahl a habe, die andere aber die Maßeinheit sei.[63])

Heißt der Durchmesser des Kreises x, so gibt die obige Aufgabe die Gleichung

$$x + \tfrac{22}{7}\, x + \tfrac{11}{24}\, x^2 = 212.$$

Reduziert zu $$\tfrac{11}{14}\, x^2 + \tfrac{29}{7}\, x = 212,$$

zeigt sie die Form $$x^2 + px = q.$$

Der Koeffizient von x^2 ist *nicht* auf 1 gebracht, wie es die Babylonier, Euklid, Heron gewohnt waren, wie es die Araber, das Abendland und die Schulmathematik bis zur neuesten Zeit forderten. Natürlich konnte ein Mann wie Euklid auch solchen Fall meistern. Er benutzte einfach nicht die Sätze II, 5 u. 6, die auf $1\,x^2$ zugeschnitten waren, sondern II, 4 mit der quadratischen Ergänzung: das zeigt uns seine Rechnung Data 86. Aber ein so schwächlicher Verfasser wie der der dürftigen Geometrica mußte sicher dafür eine Schablone haben, und das Vorbild gab ihm Diophant, der grundsätzlich — vielleicht unter indischem Einfluß — immer den Koeffizient von x^2 beliebig ließ (S. 43). Schon das ist ein Beweis, daß die Aufgabe nicht echtheronisch ist, sondern *nach* Diophant angesetzt werden muß.

Die Rechnung in der Geometrica verläuft folgendermaßen. Es wird mit $11 \cdot 14$ erweitert

$$11^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 11 \cdot 29x = 212 \cdot 154,$$

dann links die quadratische Ergänzung hinzugefügt. Man erhält

$$\begin{aligned} 11^2\, x^2 + 2 \cdot 11 \cdot 29x + 29^2 &= 212 \cdot 154 + 841 = 33489 \\ 11x + 29 &= 183 \\ 11x &= 154 \\ x &= 14. \end{aligned}$$

In dem Konstantinopeler Codex (vgl. oben), der auch nachdiophantisch sein dürfte, weil das Dimensionsprinzip nicht aufrecht erhalten

---

61) I. L. Heiberg und G. Zeuthen, Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. Bibl. math. 8_3, 1907/8, S. 121, Nr. 3; S. 124—127, Nr. 10—13. Vgl. auch Heron IV[58], S. 422, Nr. 10, 11, 12, 13.

62) Bibl. math. 10_3, 1909/10, S. 25, Nr. 12.

63) Woepcke[56], S. 14, Z. 12.

ist, steht u. a. die Aufgabe: Fläche und Umfang eines Quadrates betragen zusammen 896, Flächeninhalt und Umfang sind zu trennen. Ist die Seite des Quadrates x, so lautet die entsprechende Gleichung

$$x^2 + 4x = 896.$$

Sie hat wieder die Form $x^2 + px = q$, aber den Koeffizienten 1 bei x^2. Die Rechnung erfolgt nach der Formel

$$x = \sqrt{4 + 896} - 2 = 30 - 2 = 28.$$

Wir fassen zusammen: der echte Heron hat dieselben Normalformen der quadratischen Gleichungen wie Euklid. Das quadratische Glied hat den Koeffizienten 1. Neu ist bei ihm die Kenntnis der größeren Wurzel für den Fall $x^2 + q = px$. Die Sätze II, 4, 5, 6 haben neue algebraische Beweise erhalten ohne die euklidischen Flächensätze.

V. Diophant (Alexandria, Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr.).

Arithmetik.[64] [65] [66]

Die Einleitung schließt mit dem Hinweis: „*Später werde ich Dir auch noch zeigen, wie die Aufgabe gelöst wird, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck gleich einem eingliedrigen übrigbleibt.*“ Damit sind offenbar die Normalformen $x^2 + px = q$; $x^2 + q = px$; $x^2 = px + q$ und ihre Lösung gemeint. Leider fehlt diese versprochene Unterweisung, und man muß nun an den wenigen durchgerechneten Beispielen erschließen, nach welcher Vorschrift Diophant die quadratischen Gleichungen gelöst hat. Dabei findet sich, daß er das quadratische Glied nicht durchgehends auf den Koeffizienten 1 bringt.

Seine Normalformen und Lösungsvorschriften sind:

1.	$ax^2 + bx = c$	$ax = \sqrt{(\frac{1}{2}b)^2 + ac} - \frac{1}{2}b$
2.	$ax^2 + c = bx$	$ax = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{2}b)^2 - ac}$
3.	$ax^2 = bx + c$	$ax = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{2}b)^2 + ac}$.

Man erkennt beim Überprüfen der Beispiele am besten an dem letzten Glied ac unter der Wurzel, daß eine Reduktion auf $1x^2$ unterlassen ist. Natürlich kommen auch einige Beispiele bei Diophant vor, in denen der höchste Koeffizient gleich 1 ist; das ist dann aber mehr Zufall.

64) Diophanti Alexandrini opera omnia, ed. P. Tannery, Leipzig I, 1893, II, 1895.

65) Diophante d'Alexandrie, éd. P. Ver Eecke, Bruges 1926.

66) Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von G. Wertheim, Leipzig 1890. (Die Zählung der Aufgaben in den einzelnen Büchern weicht bei Wertheim zuweilen ab; dann sind seine Zahlen in Klammern beigefügt.)

Zusammenstellung der diophantischen Beispiele.

I. $ax^2 + bx = c$.

In VI, 6 weist Diophant die Gleichung $6x^2 + 3x = 7$ zurück: „... *es müßte* (damit x rational werde) *das Quadrat des halben Koeffizienten von x, vermehrt um das Siebenfache des Koeffizienten von x^2, eine Quadratzahl sein, was nicht der Fall ist.*“ [67]) Dieser Ausdruck ist $(\frac{1}{2}b)^2 + ac = (\frac{1}{2} \cdot 3 + 6 \cdot 7)$. Aus dem Produkt $6 \cdot 7$ erkennt man, daß die Gleichung vor der rechnerischen Lösung nicht durch Division mit 6 reduziert worden ist. Als für seine Zwecke geeignet, stellt dann Diophant die Gleichung $84x^2 + 7x = 7$ auf, die $x = \frac{1}{4}$ liefert.

In VI, 8 wird bei $6x^2 + 7x = 6$ ebenso beanstandet, daß $(\frac{7}{2})^2 + 6 \cdot 6$ keine Quadratzahl sei, und dafür $630x^2 + 73x = 6$ mit $x = \frac{1}{18}$ gewählt.

II. $ax^2 + c = bx$.

IV, 22 (23) erscheint die reinquadratische Gleichung $x^2 + 4 = 4x$ mit $x = 2$.

V, 10 (13) verlangt die Erfüllung der Ungleichheit

$$\frac{19}{12} > \frac{6x}{x^2+1} > \frac{17}{12} \quad \text{oder} \quad 19x^2 + 19 > 72x > 17x^2 + 17.$$

Der Grenzfall $19x^2 + 19 = 72x$ gäbe

$$19x = 36 \pm \sqrt{935};\quad x_1 = \frac{66{,}57}{19},\ x_2 = \frac{5{,}43}{19}$$

und der andere Grenzfall $17x^2 + 17 = 72x$:

$$x_1 = \frac{67{,}7}{17},\ x_2 = \frac{4{,}3}{17}.$$

Diophant nimmt ohne ersichtlichen Grund die größeren Werte x_2, die durch Addition der Wurzel erhalten sind. Er schreibt die Ungleichheit hin

$$\tfrac{67}{17} > x > \tfrac{66}{19}.$$

Ein ähnliches Beispiel findet sich V, 30 (33), wo x der Ungleichheit gemäß

$$24x > x^2 + 60 > 22x$$

zu bestimmen ist

$$24x = x^2 + 60 \text{ gibt } x = 12 \pm \sqrt{84};\quad x_1 = 21{,}17,\ x_2 = 2{,}83$$
$$22x = x^2 + 60 \text{ gibt } x = 11 \pm \sqrt{61};\quad x_1 = 18{,}8,\ x_2 = 3{,}2.$$

Wieder nimmt Diophant nur die größeren Werte als Grenzen für x. Es macht beinahe den Eindruck, als ob Diophant die kleineren Werte für x, also die Doppeldeutigkeit dieser Normalform nicht kennt.

67) Wertheim[66], S. 262.

III. $ax^2 = bx + c$.

In IV. 31 (33) wird $5x^2 = 3x + 18$ zurückgewiesen, da x keinen rationalen Wert hat; dafür wird $325x^2 = 3x + 18$ gewonnen.

$$\begin{array}{rll} \text{VI. } 7: & 84x^2 = 7x + 7; & x = \frac{1}{3} \\ \text{VI. } 9: & 630x^2 = 73x + 6; & x = \frac{6}{35} \\ \text{IV. } 39\ (45): & 2x^2 > 6x + 18; & x > 4{,}85 \\ \text{V. } 30\ (33): & x^2 > 5x + 60; & x > 10{,}6 \\ & x^2 < 8x + 60; & x < 12{,}7 \end{array}$$

Diophants Behandlung der quadratischen Gleichungen weicht sonach von der geradlinigen Entwicklung, die wir von der babylonischen Mathematik über Euklid, Heron zu den arabischen Mathematikern verfolgen können, ab, indem er nicht die reduzierte Normalform mit $1x^2$ als höchstes Glied fordert. Für seine allgemeinere Normalform können nicht ohne weiteres die euklidischen Sätze II, 5, 6 benutzt werden. Es bleibt nur die Benutzung der quadratischen Ergänzung zur Lösung, wie sie das pseudo-heronische Beispiel S. 41 zeigt. Diophant nimmt in dem Normalfall, der zwei Lösungen zuläßt, nur die größere Wurzel. Ob er die kleinere Wurzel überhaupt nicht kennt, bleibt unsicher. Die unbestimmte Analytik, die den größten Teil der Arithmetik Diophants einnimmt, ist vor Diophant bisher in der griechischen Mathematik nicht nachzuweisen. Man könnte an indische Beeinflussung denken, auch bei den quadratischen Gleichungen, da die Inder dieselbe allgemeinere Normalform haben wie Diophant, aber die älteste Spuren finden wir hier erst um 500 n. Chr. (Aryabhatta, geb. 476), also lange nach Diophant. Andererseits aber hat auch Euklid — wenigstens an einer Stelle, Data 86 — (S. 35) die quadratische Ergänzung für $(a-b)^2$ benutzt und, wenn man in Data 86 nicht z, sondern x als Hauptunbekannte auffaßt, $4x^2$ als höchstes Glied stehen lassen.

Auf die arabische Mathematik hatte Diophant direkt keinen Einfluß vor dem Ende des 10. Jahrhunderts: erst um diese Zeit wurde seine Arithmetik ins Arabische übersetzt.

Besondere Berücksichtigung verdienen *die* quadratischen Aufgaben Diophants, in denen zwei Unbekannte auftreten. Diophant versteht es meisterhaft, eine neue Unbekannte so einzuführen, daß die beiden gesuchten Zahlen durch sie am einfachsten ausdrückbar sind. Sind u und v diese Zahlen und x die neue Unbekannte, so wird zumeist $x = \frac{1}{2}(u - v)$ gewählt; mit Hilfe von $\frac{1}{2}(u + v)$ ist dann u und v leicht berechenbar — durch einfache Addition und Subtraktion. Dies

Verfahren erinnert an die altbabylonische Technik und an Euklid II, 5 (S. 27); gewiß sind auch manche der gestellten Aufgaben altes Erbgut.

I. 27 (30): $\underline{u + v = 20;\ u \cdot v = 96}$

Bedingung: $u > v$ und $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - uv$ eine Quadratzahl.

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(u-v) &= x \\ \tfrac{1}{2}(u+v) &= 10 \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} u &= x + 10 \\ v &= 10 - x \end{aligned}\right.$$

$$u \cdot v = (x+10)(10-x) = 100 - x^2 = 96$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2; \qquad u = 12,\ v = 8.$$

Auf diesem Wege wird auch das Auftreten zweier Wurzelwerte vermieden; $u_2 = 8$, $v_2 = 12$ tritt gar nicht in Erscheinung.

I. 28 (31): $\underline{u + v = 20;\ u^2 + v^2 = 208}$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(u-v) &= x \\ \tfrac{1}{2}(u+v) &= 10 \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} u &= x + 10 \\ v &= 10 - x \end{aligned}\right.$$

$$u^2 + v^2 = 2x^2 + 200 = 208$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2; \qquad u = 12,\ v = 8.$$

I. 29 (32): $\underline{u + v = 20;\ u^2 - v^2 = 80}$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(u-v) &= x \\ \tfrac{1}{2}(u+v) &= 10 \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} u &= x + 10 \\ v &= 10 - x \end{aligned}\right.$$

$$u^2 - v^2 = 40x = 80$$

$$x = 2; \qquad u = 12,\ v = 8.$$

I. 30 (33): $\underline{u - v = 4;\ uv = 96}$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(u+v) &= x \\ \tfrac{1}{2}(u-v) &= 2 \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} u &= x + 2 \\ v &= x - 2 \end{aligned}\right.$$

$$uv = x^2 - 4 = 96$$

$$x = 10; \qquad u = 12,\ v = 8.$$

I. 31 (34): $\underline{u = 3v;\ u^2 + v^2 = 5(u+v)}$

$$v = x,\ u = 3x;\quad 9x^2 + x^2 = 5(3x + x)$$

$$10x^2 = 20x$$

$$x = 2; \qquad u = 6,\ v = 2.$$

I. 32 (35): $\underline{u = 3v;\ u^2 - v^2 = 10(u - v)}$

$$v = x,\ u = 3x;\ 9x^2 + x^2 = 10 \cdot 2x$$
$$x = 2; \qquad u = 6,\ v = 2.$$

I. 33 (36): $\underline{u = 3v;\ u^2 - v^2 = 6(u + v)}$

$$v = x,\ u = 3x;\ 9x^2 - x^2 = 6 \cdot 4x$$
$$x = 3; \qquad u = 9,\ v = 3.$$

I. 34 (37): $\underline{u = 3v;\ u^2 - v^2 = 12(u - v)}$

$$v = x,\ u = 3x;\ 9x^2 - x^2 = 12 \cdot 2x$$
$$x = 3; \qquad u = 9,\ v = 3.$$

I. 35 (38): $\underline{u = 3v;\ v^2 = 6u}$

$$x^2 = 18x,\ x = 18; \qquad u = 54,\ v = 18.$$

I. 38 (41): $\underline{u = 3v;\ v^2 = 6(u - v)}$

$$x^2 = 12x;\ x = 12; \qquad u = 36,\ v = 12.$$

II. 6: $\underline{u - v = 2;\ u^2 - v^2 = (u - v) + 20}$

$$v = x,\ u = x + 2;\ 4x + 4 = 22$$
$$x = 4\tfrac{1}{2}; \qquad u = 6\tfrac{1}{2},\ v = 4\tfrac{1}{2}.$$

IV. 1: $\underline{u^3 + v^3 = 370;\ u + v = 10}$

$$u = x + 5;\ v = 5 - x;\ u^3 + v^3 = 30x^2 + 250 = 370$$
$$30x^2 = 120$$
$$x = 2;\ u = 7,\ v = 3.$$

IV. 2: $\underline{u^3 - v^3 = 504;\ u - v = 6}$

$$u = x + 3;\ v = x - 3;\ u^3 - v^3 = 18x^2 + 54 = 504$$
$$18x^2 = 450$$
$$x^2 = 5;\ u = 8,\ v = 2.$$

Unmittelbar geht Diophant auf Euklid jedenfalls nicht zurück. Das sieht man aus der anderen Behandlung von I, 30: $u - v = 4$, $uv = 96$ und I, 27: $u + v = 20$, $uv = 96$, die Euklid in Data 84 und 85 bringt. Euklids Data 86: uv und $u^2 - v^2$ gegeben, erscheint bei Diophant gar nicht. Die Formel für $(u \pm v)^3$ — vgl. IV, 1 — fehlt bei Euklid wieder ganz. Möglich, daß neue babylonische Beeinflussung unabhängig von Euklid einsetzt, auch unabhängig von Hipparch und viel später, da wir von der unbestimmten Analytik, die Diophant bringt, in der klassischen Mathematik der Griechen nichts vorfinden.

(Fortsetzung folgt.)