LÖSUNGEN FÜR DIE PROBEKLAUSUR: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Achtung: Fehler können nie ausgeschlossen werden!

Aufgabe 8.

(a) **Multiple Choice.** *(5 Punkte)* Welche der folgenden Aussagen sind wahr (w), welche falsch (f)?

◯ Teilmengen von überabzählbaren Mengen sind immer überabzählbar.

◯ Es gibt eine Injektion von einer Menge in ihre Potenzmenge.

◯ Es gibt eine Surjektion von einer Menge auf ihre Potenzmenge.

◯ Sind $X_i, i \in I$ abzählbare Mengen für I endlich, so ist $\bigcup_I X_i$ abzählbar.

◯ Sind $X_i, i \in I$ abzählbare Mengen für I abzählbar, so ist $\bigcup_I X_i$ abzählbar.

(b) **Aufgabe.** *(5 Punkte)* Seien für $n \in \mathbb{N}$ nicht leere Mengen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben. Zeigen Sie, dass $X_1 \times \cdots \times X_n$ genau dann abzählbar ist, wenn alle $X_1, \ldots, X_n$ abzählbar sind.

Lösung 8.

(a) Es gilt

(f) Teilmengen von überabzählbaren Mengen sind immer überabzählbar. Gegenbeispiel ist die leere Menge, welche Teilmenge jeder Menge ist.

(w) Es gibt eine Injektion von einer Menge in ihre Potenzmenge. Richtig, denn die Abblidung $f\colon X \to \mathfrak{P}(X)$ mit $f(x) = \{x\}$ tut den Job.

(f) Es gibt eine Surjektion von einer Menge auf ihre Potenzmenge. Dies ist immer falsch. Ein explizites Gegenbeispiel ist die leere Menge, welche nicht surjektiv auf $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ gehen kann.

(w) Sind $X_i, i \in I$ abzählbare Mengen für I endlich, so ist $\bigcup_I X_i$ abzählbar. Diese Aussage ist wahr, und sie ist ein Spezialfall der nächsten Aussage.

(w) Sind $X_i, i \in I$ abzählbare Mengen für I abzählbar, so ist $\bigcup_I X_i$ abzählbar. Diese Aussage ist wahr, denn abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

(b) **Behauptung.** $X_1 \times \cdots \times X_n$ ist genau dann abzählbar, falls alle $X_1, \ldots, X_n$ abzählbar sind. □
Beweis. Sei ohne Einschränkung X_1 nicht abzählbar, und wähle feste $x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$. Dann ist

$$\{(y, x_2, \ldots, x_n) \mid y \in X_1\} \subset X_1 \times \cdots \times X_n$$

eine überabzählbare Teilmenge was zeigt, dass $X_1 \times \cdots \times X_n$ nicht abzählbar ist. Da dies logisch äquivalent zu ($X_1 \times \cdots \times X_n$ ist abzählbar $\Rightarrow$ alle $X_1, \ldots, X_n$ sind abzählbar) ist, verbleibt es die Umkehrung zu zeigen.

Seien also alle $X_1, \ldots, X_n$ abzählbar. Wir wollen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass $X_1 \times \cdots \times X_n$ abzählbar ist. Hierbei können wir $X_i = \mathbb{N}_0$ annehmen, d.h. wir wollen zeigen, dass $\mathbb{N}_0^n$ is für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Induktionsanfang ($n = 1$). Dies ist klar, da $\mathbb{N}_0$ abzählbar ist.

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$). Sei die Aussage also wahr für n, und sei

$$f\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$$

eine Bijektion. Definiere

$$g\colon \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \quad g((x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) = (f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Dann ist g injektiv, da f injektiv ist, und g ist aus dem gleichen Grund surjektiv. Weiter haben wir Cantors Diagonalabbildung

$$h\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad (0,0) \mapsto 0, (1,0) \mapsto 1, (0,1) \mapsto 2, (2,0) \mapsto 3, (1,1) \mapsto 4, (0,2) \mapsto 5, \text{etc.}$$

welche bijektiv ist. Damit ist $h \circ g\colon \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Also ist $\mathbb{N}_0^{n+1}$ abzählbar.

Damit folgt, dass $X_1 \times \cdots \times X_n$ abzählbar ist. ∎