EasyClass
www.easyclass.at
27.10.2022

Formelsammlung Mechanik 2

DOC: MECH2FS

Inhaltsverzeichnis

1. Relativkinematik

[1.1] Absolutgeschwindigkeit $\boldsymbol{\vec{v}_P = \vec{v}_F + \vec{v}_R}$

[a] Führungsgeschwindigkeit $\vec{v}_F = \vec{v}_{0F} + \vec{\omega}_F \times \vec{r}_r$

[b] Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_R = \vec{\omega}_R \times \vec{r}_{PA}$

[c] Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_R = \dfrac{d_F\,\vec{r}_r}{dt}$

[1.2] Absolutbeschleunigung $\boldsymbol{\vec{a}_{abs} = \vec{a}_F + \vec{a}_R + \vec{a}_C}$

[a] Führungsbeschleunigung $\vec{a}_F = \vec{a}_{0F} + \dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r}_r + \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_r)$

[b] Relativbeschleunigung $\vec{a}_R = \dot{\vec{\omega}}_R \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega}_R \times (\vec{\omega}_R \times \vec{r}_{PA})$

[c] Relativbeschleunigung $\vec{a}_R = \dfrac{d_F\,\vec{v}_R}{dt}$

[d] Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_R$

2. Absolutkinematik

[2.1] Absolutgeschwindigkeit $\boldsymbol{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}}$

[a] Geschwindigkeit Punkt A $\vec{v}_A = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{A0}$

[b] Geschwindigkeit Punkt P gegen A $\vec{v}_{PA} = \vec{\omega}_{abs} \times \vec{r}_{PA}$

! … Der Zusammenhang $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$ gilt nur am starren Körper. Der Abstand zwischen den Bezugspunkten muss zu allen Zeitpunkten konstant sein.

[2.2] Absolutbeschleunigung $\boldsymbol{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{PA}}$

[a] Beschleunigung Punkt A $\vec{a}_A = \dot{\vec{\omega}}_A \times \vec{r}_{A0} + \vec{\omega}_A \times (\vec{\omega}_A \times \vec{r}_{A0})$

[b] Beschleunigung Punkt P gegen A $\vec{a}_{PA} = \dot{\vec{\omega}}_{abs} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega}_{abs} \times (\vec{\omega}_{abs} \times \vec{r}_{PA})$

[2.3] Beschleunigung Kreisbahn	$\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{t}} + \vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}}$
[a] Tangentialbeschleuigung	$\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PM}$
[b] Normalbeschleunigung	$\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}_{PM}$
[c] Bahnkrümmungsradius	$\rho = \frac{v^2}{a_n}$

3. Impuls

[3.1] Schwerpunktsatz (SPS)

$$\mathbf{m} \cdot \vec{a}_M = \vec{F}_R$$

! m … ist die Masse des Körpers

! $\vec{a}_M$ … ist die Beschleunigung des Massenmittelpunktes

! $\vec{F}_R$ … Summe aller äußeren einwirkenden Kräfte (Eingeprägte- und Zwangskräfte)

! … der SPS gilt nur in Systemen, in denen das 1. Newtonsche Axiom gilt (Inertialsystem).

! … der SPS gilt für starre und deformierbare Körper.

[3.2] Teilschwerpunktsatz

$$x_S = \frac{\Sigma\, x_i\, m_i}{\Sigma\, m_i}$$

4. Stoß

[4.1] Stoßannahmen

! ... Die Deformationen sind klein gegenüber den Körperabmessungen. Damit können die Körper als starre Körper angenommen werden. Kinematik am starren Körper ist daher anwendbar.

! ... Das Zeitintervall Δt ist so klein, dass der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ zulässig ist

! ... Verformungswellen sollen vernachlässigt werden (Prinzip der Gleichzeitigkeit)

[4.2] Stoßbedingungen

$$v'_{B2x} - v'_{B1x} = -e\,(v_{B2x} - v_{B1x})$$

! ... gilt nur im Berührpunkt B

! ... gilt nur für Geschwindigkeitskomponenten in Stoßnormalenrichtung

! ... für die Stoßziffer e (auch Stoßzahl genannt) gilt: $0 \le e \le 1$

- ideal elastischer Stoß — $e = 1$ ... kein Energieverlust
- teilelastischer Stoß — $0 < e < 1$
- vollkommen unelastischer Stoß — $e = 0$ ... Körper trennen sich nicht

[4.3] Stoßziffer in Tangentenrichtung

$$v'_{B2y} - v'_{B1y} = -e_t\,(v_{B2y} - v_{B1y})$$

! ... gilt nur im Berührpunkt B

! ... gilt nur für Geschwindigkeitskomponenten in Tangentenrichtung

! ... für die tangentielle Stoßziffer e_t gilt: $-1 \le e_t \le 0$

- reibungsfreier Stoß — $e_t = -1$
- reibungsähnliches Verhalten — $-1 < e_t < 0$
- Fixierung des Berührpunktes — $e_t = 0$

[4.4] Drallsatz für beliebigen Punkt A

$$\vec{L}'_A - \vec{L}_A + \vec{r}_{MA} \times \left(m(\vec{v}'_A - \vec{v}_A)\right) = \sum \left(\vec{r}_{BA} \times \vec{S}_B\right)$$

[a] für A=M gilt $\quad \vec{L}'_M - \vec{L}_M = \sum \left(\vec{r}_{BM} \times \vec{S}_B\right)$

[b] ist Punkt A inertialfest $\quad \vec{L}'_A - \vec{L}_A = \sum \left(\vec{r}_{BA} \times \vec{S}_B\right)$

[4.5] Drallerhaltung Gesamtsystem

$$\vec{L}_A = \vec{L}'_A$$

[a] Teilsystem

$$\vec{L}'_A - \vec{L}_A = \sum (\vec{r}_{BA} \times \vec{S}_A)$$

[4.6] Impulserhaltung Gesamtsystem

$$m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = m_1\,\vec{v}'_1 + m_2\,\vec{v}'_2$$

[a] Teilsystem

$$m(\vec{v}' - \vec{v}) = \sum \vec{S}$$

[4.7] Energieerhaltung

$$T = T'$$

! … gilt beim vollkommen elastischen Stoß.

5. Arbeit, Energie und Leistung

[5.0] Arbeit der Einzelkraft

$$\boldsymbol{W_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\ d\vec{s}}$$

[5.1] Arbeit des Moments

$$\boldsymbol{W_{1\to2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M}_{(\varphi)}\ d\varphi}$$

[5.2] Arbeit einer konservativen Kraft

$$\boldsymbol{W_{1\to2} = -(V_2 - V_1)}$$

! … Die Arbeit die von der Gewichtskraft (=konservative Kraft) verrichtet wird ist wegunabhängig.

[5.3] Arbeit einer Federkraft

$$\boldsymbol{W_{1\to2} = -\frac{1}{2}\, c\, ({x_2}^2 - {x_1}^2)}$$

! … Ist eine lineare elastische Feder an einem Körper befestigt, dann leistet die auf den Körper wirkende Federkraft F_F=cs Arbeit, wenn die Feder aus der Lage s_1 in die Lage s_2 gedehnt oder gestaucht wird. In beiden Fällen ist die Arbeit negative, denn die Verschiebung des Körpers erfolgt entgegengesetzt zur Federkraft. Das negative Vorzeichen zeigt, dass für das Spannen der Feder also Arbeit geleistet werden muss.

[5.4] Leistung und Arbeit

$$\boldsymbol{W_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt = \int_{t1}^{t2} \vec{F}\ \vec{v}\, dt}$$

[a] Arbeitssatz

$$W_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} P\ \ dt = T_2 - T_1$$

[5.5] Kinetische Energie

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2} m\, v_A^2 + m \cdot (\vec{v}_A \times \vec{\omega}) \cdot \vec{r}_{MA} + \frac{1}{2} \vec{L}_A\, \vec{\omega}}$$

[a] für den Massenmittelpunkt M $\quad T = \frac{1}{2} m\, v_M^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_M\, \vec{\omega}$

! ... Die kinetische Energie setzt sich aus dem translatorischen und dem rotatorischen Anteil zusammen. Der translatorische Anteil T_{tr} ist von der Wahl des Inertialsystems abhängig. Der rotatorische Anteil T_{rot} ist von der Wahl des Inertialsystems unabhängig, weil die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ als auch der Drehimpuls $\vec{L}$ in allen Inertialsystem gleich ist.

[5.6] Potentielle Energie

$$\boldsymbol{V = m\, g\, h}$$

! ... Die Arbeit die eine konservative Kraft (Gewichtskraft, Federkraft) auf dem Weg vom betrachteten Punkt zu einem definierten Nullniveau leistet bezeichnet man als potentielle Energie.

! ... Das Nullniveau kann dabei beliebig gewählt werden.

! ...Kräfte die wegunabhängig sind bezeichnet man als konservativ (werterhaltend).

[5.7] Arbeitssatz

$$\boldsymbol{T_1 + V_1 + \overline{W}_{1\to 2} = T_2 + V_2}$$

! ... $\boldsymbol{\overline{W}_{1\to 2}}$ stellt die Arbeit aller nicht konservativen Kräfte und Momente dar.

! ...wirken im System nur konservative Kräfte fällt der Term $\boldsymbol{\overline{W}_{1\to 2}}$ weg

[5.8] Energiesatz

$$\boldsymbol{T_0 + V_0 = T_1 + V_1} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{T + V = const.}$$

! ... gilt nur in konservativen Systemen, also bei dissipativen Effekten nicht anwendbar

! ...Energieerhaltung kann auch beim vollkommen elastischen Stoß (e=1) verwendet werden

[5.9] Energieverlust (Dissipative Systeme)

$$\boldsymbol{T_0 + V_0 = T_1 + V_1 + \Delta E}$$

! ... nur bei dissipativen Systemen bestimmbar

[5.6] Leistung einer Einzelkraft

$$\boldsymbol{P} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

! ... Die eingeprägten äußeren und inneren Kräfte (Feder, Dämpfer, Reibung etc.) sind leistungsbehaftet und daher zu berücksichtigen.

! ... Zwangskräfte im Lager (Lagerkräfte) bzw. Kräfte zwischen den Teilsystemen, sind bezogen auf das Gesamtsystem, leistungslos. Das gilt nicht für Antriebe!

! ...Nur Kräfte, welche in Geschwindigkeitsrichtung wirken haben eine Leistung

! ...Die Haftkraft ist leistungslos, weil sie nur in einem sehr kurzen Augenblick angreift.

[5.7] Leistung eines Moments

$$\boldsymbol{P} = \vec{\boldsymbol{M}} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = (\vec{\boldsymbol{r}}_S \times \vec{\boldsymbol{F}}) \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

! ... Falls die Leistung über das Moment berechnet werden soll

[5.8] Leistungssatz

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dt}}$$

! ... Wir auch oftmals Arbeitssatz in differentieller Form genannt.

! ... Eingeprägte (innere und äußere) Kräfte sind leistungsbehaftet.

! ... Zwangskräfte in Lagerstellen bzw. zwischen Teilen des Systems sind bezogen auf das Gesamtsystem leistungslos und brauchen daher nicht berücksichtigt werden. Achtung: Das gilt nicht für Antriebe!

! ... Die kinetische Energie T und die Leistung P ist von der Wahl des IS abhängig.

! ... Für Systeme mit nur einem Freiheitsgrad liefert der Leistungssatz direkt die Bewegungsgleichung.

	Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$	Moment $\vec{\boldsymbol{M}}$	Arbeit $\boldsymbol{W}$	Leistung $\boldsymbol{P}$	Potential $\boldsymbol{V}$
Feder	$\vec{F} = c\vec{x}$	-	$W = -\frac{1}{2}\, c\, x^2$	$P = c\, x\, \dot{x}$	ja
Drehfeder	-	$\vec{M} = c_T\, \varphi$	$W = \frac{1}{2}\, c_T\, \varphi^2$	$P = c_T\, \varphi\, \dot{\varphi}$	ja
Dämpfer		-	$W = k\, x\, \dot{x}$	$P = -k\, \dot{x}^2$	dissipativ
Drehdämpfer	-	$\vec{M} = -k\, \dot{\varphi}$	$W = -k\, \varphi\, \dot{\varphi}$	$P = -k\, \dot{\varphi}^2$	dissipativ
Gewichtskraft	$\vec{F}_G = m\vec{g}$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$	$W = m\, g\, h$	$P = \vec{F}\, \dot{\vec{x}}$	ja
Reibkraft	$\vec{F}_R = -m\, \vec{g}\, \mu_H$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_R$	$W = -\vec{F}_R\, \vec{x}$	$W = -\vec{F}_R\, \dot{\vec{x}}$	dissipativ
Haltekraft	$\vec{F}_H = \lvert \vec{F}_N\, \mu_H \rvert$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_H$	arbeitslos	leistungslos	nein

Bei $\vec{\boldsymbol{F}}$ und $\vec{\boldsymbol{M}}$ ergeben sich die Vorzeichen aus dem verwendeten KS. Bei der Arbeit in Form von potentieller Energie $\boldsymbol{V}$ ist das Nullniveau ausschlaggebend.

6. Drall und Drallsatz

[6.1] Drall für den Schwerpunkt S

$$\vec{L}_S = I_S \cdot \vec{\omega}_S$$

! … die Punktmasse hat nie einen Drall bezüglich sich selbst.

! … der Drall ist ein gebundener Vektor, er ist immer einem speziellen (Bezugs-)Punkt zugeordnet.

! … die Komponenten des Trägheitstensor sind dann konstant, wenn der Trägheitstensor im Führungssystem dargestellt wird.

[6.2] Drall auf Punkt B umrechnen

$$\vec{L}_B = \vec{L}_S + \vec{r}_{SB} \times (m \cdot \vec{v}_{SB})$$

! … $\vec{v}_{SB}$ ist die Geschwindigkeit von Punkt S gegenüber Punkt B (Geschwindigkeitsdifferenz)

! … die Drallumrechnung gilt nur für den Schwerpunkt S und einen beliebigen gewählten Punkt B. (Der Schwerpunkt S muss als Bezugspunkt immer vorkommen!). Falls es sich bei dem Punkt B um einen körperfesten Punkt handelt, nennen wir diesen Punkt A .

[6.3] Drallsatz für allgemeinen Punkt A

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_F\,\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega}_F \times \vec{L}_A + \vec{r}_{SA} \times (m \cdot \vec{a}_A) = \Sigma\,\vec{M}_A$$

! … $\vec{\omega}_F$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Führungssystems

! … $\vec{a}_A$ ist die Beschleunigung von Punkt A

! … $\vec{r}_{SA}$ Abstand vom Gesamtschwerpunkt zu Punkt A

[6.4] Drallsatz für ebene Probleme

$$I_{SZ} \cdot \dot{\omega}_{FZ} = M_{SZ}$$

! … Wird ein anderer Punkt als der Schwerpunkt für die Berechnung herangezogen, muss beachtet werden, dass der gewählte Bezugspunkt beschleunigt sein kann und ggf. der Term $m\,(\vec{r}_{SA} \times \vec{a}_A)$ benötigt wird.

[6.5] Drallsatz für den Schwerpunkt S

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d_F\,\vec{L}_S}{dt} + \vec{\omega}_F \times \vec{L}_S = \Sigma\,\vec{M}_S$$

! … alle äußeren Kräfte sind zu berücksichtigen

! … eingeprägte Kräfte: Gewichtskraft $\vec{F}_G$, Gleitreibungskraft $\vec{F}_R$, Federkraft $\vec{F}_F$ etc.

! … Zwangskräfte: Haftkraft $\vec{F}_H$, Kraft einer starren Führung $\vec{F}_N$ etc.

[6.6] Eulersche Kreiselgleichungen

$$\vec{e}_1: \quad \boldsymbol{I_1\,\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\,\omega_3 = M_1}$$
$$\vec{e}_2: \quad \boldsymbol{I_2\,\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1 = M_2}$$
$$\vec{e}_3: \quad \boldsymbol{I_3\,\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\,\omega_2 = M_3}$$

! … Der Bezugspunkt muss ein körperfester Punkt sein, welcher entweder der Massenmittelpunkt ist (Massenmittelpunkt=immer körperfest) ODER ein Bezugspunkt, der die Beschleunigung 0 hat (inertialfest).

! … Das Koordinatensystem muss körperfest sein.

! … Das Koordinatensystem muss ein Trägheitshauptachsensystem sein.

7. Trägheit und Trägheitstensor

[7.1] Trägheitsmoment

$$\boldsymbol{I} = \int_m \boldsymbol{r^2\, dm}$$

[7.2] Trägheitstensor

$$\boldsymbol{I_{A(t)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_x} & -\boldsymbol{I_{xy}} & -\boldsymbol{I_{xz}} \\ -\boldsymbol{I_{yx}} & \boldsymbol{I_y} & -\boldsymbol{I_{yz}} \\ -\boldsymbol{I_{zx}} & -\boldsymbol{I_{zy}} & \boldsymbol{I_z} \end{bmatrix}$$

! … Ist das KS körperfest, ist der Trägheitstensor $\boldsymbol{I_A}$ konstant und nicht mehr zeitabhängig.

! … Das Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor ermittelt wird, ist nicht notwendiger Weise das Bezugssystem, es muss kein Inertialsystem sein.

[7.3] Hauptträgheitsmomente

$$\boldsymbol{I_x} = \int_m \boldsymbol{y^2 + z^2 dm}$$

$$\boldsymbol{I_y} = \int_m \boldsymbol{x^2 + z^2 dm}$$

$$\boldsymbol{I_z} = \int_m \boldsymbol{x^2 + y^2 dm}$$

[7.4] Deviationsmomente

$$\boldsymbol{I_{xy}} = \boldsymbol{I_{yx}} = \int_m \boldsymbol{x\, y\, dm}$$

$$\boldsymbol{I_{xz}} = \boldsymbol{I_{zx}} = \int_m \boldsymbol{x\, z\, dm}$$

$$\boldsymbol{I_{yz}} = \boldsymbol{I_{zy}} = \int_m \boldsymbol{y\, z\, dm}$$

[7.5] Trägheitshauptachsensystem

$$\boldsymbol{I_{A(t)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_x} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_y} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_z} \end{bmatrix}$$

! … Ob Deviationsmomente vorkommen oder nicht, hängt einzig und allein davon ab, wie die Lage des Koordinatensystems (KS) wählt wird.

! … Ist das verwendete KS ein Trägheitshauptachsensystem, nimmt der Trägheitstensor Diagonalenform an. Die Deviationsmomente sind daher alle $\boldsymbol{0}$!

! … Es gibt in jedem Punkt des starren Körpers ein ausgezeichnetes Achsensystem für den alle Deviationsmomente $\boldsymbol{0}$ sind. Dieses Achsensystem nennen wir Trägheitshauptachsensystem

8. ungedämpfte Schwingungen

[8.1] ungedämpfte freie Schwingung	$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0}$
Lösung mit Exponentialansatz	$x = C\, e^{\lambda t}$ $\dot{x} = C\, \lambda\, e^{\lambda t}$ $\ddot{x} = C\, \lambda^2\, e^{\lambda t}$
Einsetzen in die DGL liefert	$C\, e^{\lambda t}\, [\lambda^2 + \omega_0{}^2] = 0$
Homogene Lösung	$\boldsymbol{x_H = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2 \sin(\omega_0\, t)}$
ungedämpfter Eigenkreisfrequenz	ω_0
Periodendauer	$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Frequenz	$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$
Alternative Schreibweise	$\boldsymbol{x_H = A \sin(\omega t + \alpha) = A \cos(\omega t - \alpha)}$
Amplitude	$A = \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2}$
Nullphasenwinkel	$\tan \alpha = \frac{c_2}{c_1}$
[8.2] unged. erzwungene Schwingung	$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = \omega_0{}^2\, A_0\, E\, \cos(\Omega t)}$

9. gedämpfte Schwingungen

[9.1] gedämpfte freie Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Lösung mittels Exponentialansatz

$$x = C\,e^{\lambda t}$$
$$\dot{x} = C\,\lambda\,e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x} = C\,\lambda^2\,e^{\lambda t}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$C\,e^{\lambda t}\,[\lambda^2 + 2D\omega_0\,\lambda + {\omega_0}^2] = 0$$

Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$$

[9.2] stark gedämpfte Schwingung

$$x_H = c_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,e^{\lambda_2 t} \qquad \text{mit} \qquad D > 1$$

reelle und negative Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \beta$$

[9.3] kritisch gedämpfte Schwingung

$$x_H = (c_1 + c_2\,t)\,e^{-\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad D = 1$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha = -\omega_0$$

Kritischer Dämpfungswert

$$k_{krit} = 2m\sqrt{\frac{c}{m}} = 2m\omega_0$$

[9.4] schwach gedämpfte Schwingung

$$x_H = (c_1 cos\omega t + c_2 sin\omega t)\;e^{-D\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad D < 1$$

$$x_H = A\;e^{-\alpha t}\,cos(\omega t - \epsilon)$$

konjungiert komplexe Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega$$
$$\lambda_2 = -\alpha - j\omega$$

gedämpfte Kreisfrequenz

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2} < \omega_0$$

Periodendauer der ged. Schwingung

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Amplitude

$$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$$

Phasenverschiebung

$$\epsilon = atan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

10. erzwungene Schwingungen

[10.1] erzwungene gedämpfte Schwingung $\boldsymbol{\ddot{x} + 2D\omega_0\,\dot{x} + \omega_0{}^2\,x = \omega_0{}^2\,E\,A_0\cos(\Omega t)}$

Federfußpunkt-Krafterregung $\ddot{x} + 2D\omega_0\,\dot{x} + \omega_0{}^2\,x = \boldsymbol{\omega_0{}^2}\;A_0\cos(\Omega t)$ mit $\boldsymbol{E = 1}$

Dämpfungskrafterregung $\ddot{x} + 2D\omega_0\,\dot{x} + \omega_0{}^2\,x = \boldsymbol{2D\omega_0\Omega}\;A_0\cos(\Omega t)$ mit $\boldsymbol{E = 2D\eta}$

Massekraft-Wegerregung $\ddot{x} + 2D\omega_0\,\dot{x} + \omega_0{}^2\,x = \boldsymbol{\Omega^2}\;A_0\cos(\Omega t)$ mit $\boldsymbol{E = \eta^2}$

[10.2] homogene Lösung $siehe\ gedämpfte\ Schwingung$

[10.3] partikuläre Lösung $\boldsymbol{x_P = c_{P1}\cos(\Omega t) + c_{P2}\sin(\Omega t)}$

Ansatz der rechten Seite

$$
\begin{aligned}
x_P &= \quad c_{P1}\cos(\Omega t) + c_{P2}\sin(\Omega t)\\
\dot{x}_P &= -c_{P1}\sin(\Omega t)\cdot\Omega \quad + c_{P2}\cos(\Omega t)\cdot\Omega\\
\ddot{x}_P &= -c_{P1}\cos(\Omega t)\cdot\Omega^2 \;\; - c_{P2}\sin(\Omega t)\cdot\Omega^2
\end{aligned}
$$

[10.4] Gesamtlösung $\boldsymbol{x = x_H + x_P}$

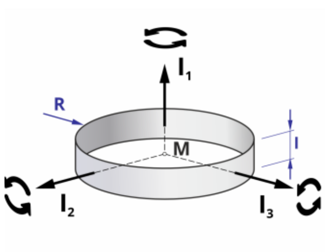
! … Die Amplituden der Homogenlösung klingen exponentiell mit der Zeit ab für $\boldsymbol{D > 0}$. Da die Ausschläge nach sehr langer Zeit $\boldsymbol{t} \to \infty$ sehr klein sind (im Vergleich zu den Ausschlägen der Partikulärlösung) können diese näherungsweise vernachlässigt werden.

Amplitude $A = \frac{E\,A_0}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}} = \sqrt{c_{P1}{}^2 + c_{P2}{}^2}$

Phasenverschiebung $\tan\epsilon = \frac{2D\eta}{(1-\eta^2)} = \frac{c_{P2}}{c_{P1}}$

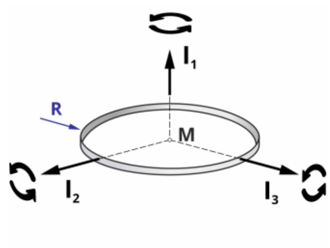
11. Massenträgheitsmomente (MTM)

Zylindermantel
Radius $\boldsymbol{R}$, Länge $\boldsymbol{l}$



$$I_1 = m\,R^2$$
$$I_2 = \frac{m\,R^2}{2} + \frac{m\,l^2}{12}$$
$$I_3 = \frac{m\,R^2}{2} + \frac{m\,l^2}{12}$$

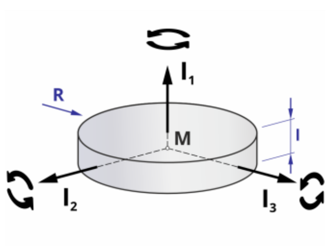
dünner Kreisring
$\boldsymbol{l \approx 0}$



$$I_1 = m\,R^2$$
$$I_2 = \frac{m\,R^2}{2}$$
$$I_3 = \frac{m\,R^2}{2}$$

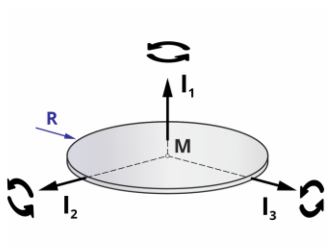
intended to be blank

Vollzylinder
Radius $\boldsymbol{R}$, Länge $\boldsymbol{l}$



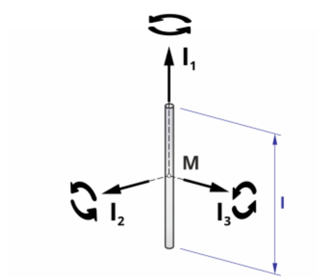
$$I_1 = \frac{m\,R^2}{2}$$
$$I_2 = \frac{m\,R^2}{4} + \frac{m\,l^2}{12}$$
$$I_3 = \frac{m\,R^2}{4} + \frac{m\,l^2}{12}$$

dünne Scheibe
$\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{0}$ und $(R \gg l)$



$$I_1 = \frac{m\,R^2}{2}$$
$$I_2 = \frac{m\,R^2}{4}$$
$$I_3 = \frac{m\,R^2}{4}$$

schlanker Stab
$\boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{0}$ und $(l \gg R)$

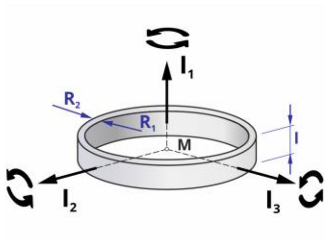


$$I_1 = 0$$
$$I_2 = \frac{m\,l^2}{12}$$
$$I_3 = \frac{m\,l^2}{12}$$

<table>
<tr>
<td>

Hohlzylinder

Radius $\boldsymbol{R_1}$, Radius $\boldsymbol{R_2}$, Länge $\boldsymbol{l}$



$$I_1 = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$$

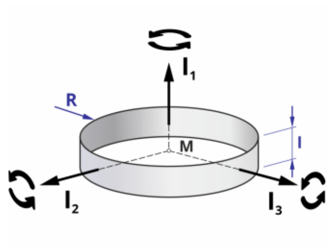
$$I_2 = \frac{m}{4}\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{l^2}{3}\right)$$

$$I_3 = \frac{m}{4}\left(R_1^2 + R_2^2 + \frac{l^2}{3}\right)$$

</td>
<td>

dünnwandiger Hohlzylinder

$\boldsymbol{R_1 \approx R_2 \approx R}$



$$I_1 = m\,R^2$$

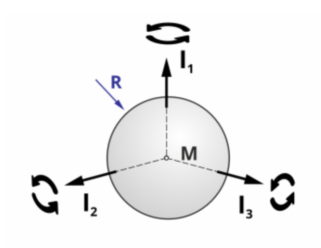
$$I_2 = \frac{m}{4}\left(2R^2 + \frac{l^2}{3}\right)$$

$$I_3 = \frac{m}{4}\left(2R^2 + \frac{l^2}{3}\right)$$

</td>
<td>intended to be blank</td>
</tr>
<tr>
<td>

Vollkugel

Radius $\boldsymbol{R}$



$$I_1 = \frac{2\,m\,R^2}{5}$$

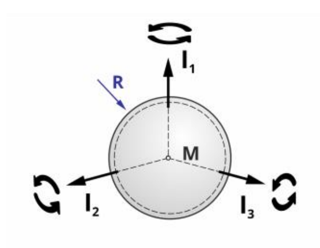
$$I_2 = \frac{2\,m\,R^2}{5}$$

$$I_3 = \frac{2\,m\,R^2}{5}$$

</td>
<td>

dünne Kugelschale

Radius $\boldsymbol{R}$



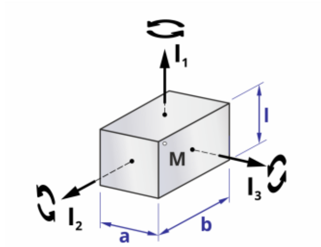
$$I_1 = \frac{2\,m\,R^2}{3}$$

$$I_2 = \frac{2\,m\,R^2}{3}$$

$$I_3 = \frac{2\,m\,R^2}{3}$$

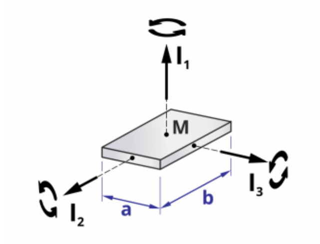
</td>
<td>intended to be blank</td>
</tr>
</table>

Quader
Seite $\boldsymbol{a}$, Seite $\boldsymbol{b}$, Länge $\boldsymbol{l}$



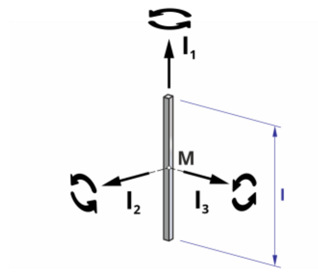
$$I_1 = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$
$$I_2 = \frac{m(a^2+l^2)}{12}$$
$$I_3 = \frac{m(b^2+l^2)}{12}$$

dünne Platte
$\boldsymbol{l} \approx \mathbf{0}$ und $(l \ll a, b)$



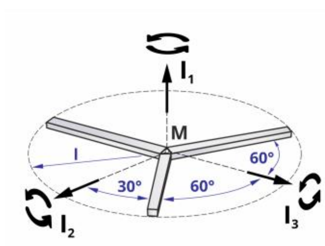
$$I_1 = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$
$$I_2 = \frac{ma^2}{12}$$
$$I_3 = \frac{mb^2}{12}$$

schlanker Stab
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \approx \mathbf{0}$ und $(l \gg a, b)$



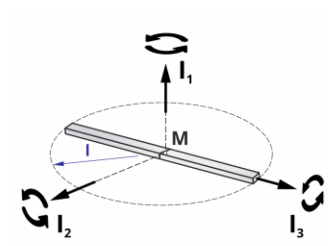
$$I_1 = 0$$
$$I_2 = \frac{ml^2}{12}$$
$$I_3 = \frac{ml^2}{12}$$

drei schlanke Stäbe
Rotorblattwinkel **120°**, Länge $\boldsymbol{l}$



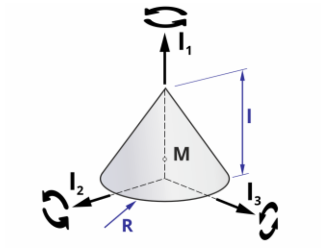
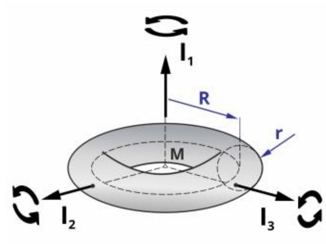
$$I_1 = ml^2$$
$$I_2 = \frac{ml^2}{2}$$
$$I_3 = \frac{ml^2}{2}$$

zwei schlanke Stäbe
jeweils Länge $\boldsymbol{l}$



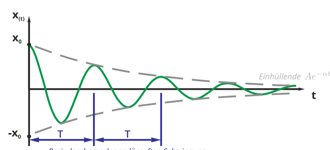
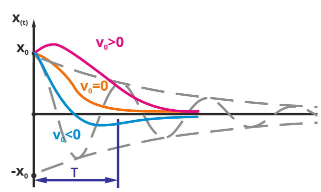
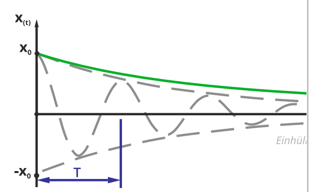
$$I_1 = \frac{2ml^2}{3}$$
$$I_2 = \frac{2ml^2}{3}$$
$$I_3 = 0$$

intended to be blank

Kegel Radius $\boldsymbol{R}$, Länge $\boldsymbol{l}$	Torus Radius $\boldsymbol{R}$	
 $I_1 = \frac{3m\,R^2}{10}$ $I_2 = \frac{m(3R^2 + 2l^2)}{20}$ $I_3 = \frac{m(3R^2 + 2l^2)}{20}$	 $I_1 = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$ $I_2 = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I_3 = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$	intended to be blank

12. CheatSheet – Schwingungen

Differentialgleichung	$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	mit der Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
Allgemeine Lösung	$x_H = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$	alternative Schreibweise	$x_{(t)} = A \cos(\omega t - \epsilon)$
Spezielle Lösung	$x_{(t)} = x_0 \cdot \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t$		
Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	Periodendauer	$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Amplitude	$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$	Phasenverschiebung	$\epsilon = atan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$
Amplitude	$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$	Frequenz	$f = \frac{1}{T}$
Mittellage	$\bar{x} = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$	Gleichgewichtslage	$\dot{x}, \ddot{x}$ ... $nullsetzen$

Dämpfungsmaß	**D<0** ...schwach gedämpft	**D=1** ...aperiodischer GF	**D>1** ...stark gedämpft
Schwingung			
Differentialgleichung	$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$	$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$	$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$
Allgemeine Lösung	$x_H = e^{-\alpha t}(c_1 cos\omega_d t + c_2 \, sin\omega_d t)$	$x_H = (c_1 + c_2 \, t) \, e^{-\omega_0 t}$	$x_H = c_1 \, e^{\lambda_1 t} + c_2 \, e^{\lambda_2 t}$
Eigenkreisfrequenz	$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$	$\omega_d = 0$	$\omega_d = imaginär$
Schwingungsdauer	$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}$	-	-
Amplitude	$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$	-	-
Phasenverschiebung	$\epsilon = atan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$	-	-
Abklingkoeffizient	$\alpha = D \, \omega_0$		
Log. Dekrement	$\delta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$		
Ausschlagverhältnis	$\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = e^{\alpha \, T_d}$		

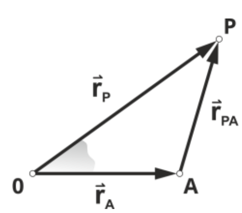
13. Dimensionskontrolle

Basisgröße	Zeichen	SI-Einheit	Größe
Länge	$\vec{x}$	m	**Vektor**
Zeit	t	s	Skalar
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\frac{m}{s}$	**Vektor**
Beschleunigung	$\vec{a}$	$\frac{m}{s^2}$	**Vektor**
Masse	m	kg	Skalar
Kraft	$\vec{F}$	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$	**Vektor**
Drehmoment	$\vec{M}$	$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	**Vektor**
Trägheitstensor	$\boldsymbol{I}$	$kg \cdot m^2$	Matrix
Impuls	$\vec{p}$	$N \cdot s = \frac{kg \cdot m}{s}$	**Vektor**
Drehimpuls	$\vec{L}$	$N \cdot m \cdot s = \frac{kg \cdot m^2}{s}$	**Vektor**
Kinetische Energie	T	$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Skalar
Potenzielle Energie	V	$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Skalar
Arbeit	$W_{1\to 2}$	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	Skalar
Leistung	P	$W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	Skalar
Lagekoordinate	$\varphi_{(t)}$	rad	Skalar
Lagekoordinate	$x_{(t)}$	m	Skalar
Winkelgeschwindigkeit	$\dot{\vec{\varphi}}_{(t)} = \vec{\omega}_{(t)}$	$\frac{1}{s}$	**Vektor**
Winkelbeschleunigung	$\ddot{\vec{\varphi}}_{(t)} = \dot{\vec{\omega}}_{(t)}$	$\frac{1}{s^2}$	**Vektor**
Frequenz	f	$\frac{1}{s}$	Skalar

Die Dimensionskontrolle ist das einfachste Tool, um dein Ergebnis zu überprüfen.

14. Vektorrechnung

Rechenoperation	Zeichen	Größe
Addition	$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}$	**Vektor**
Subtraktion	$\vec{a}-\vec{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{bmatrix}$	**Vektor**
Skalarprodukt	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$	Skalar
Matrix · Vektor	$\boldsymbol{A}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2+a_{13}b_3\\a_{21}b_1+a_{22}b_2+a_{23}b_3\\a_{31}b_1+a_{32}b_2+a_{33}b_3\end{bmatrix}$	**Vektor**
Konstante · Vektor	$c\cdot\vec{b}=c\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\cdot a_1\\c\cdot a_2\\c\cdot a_3\end{bmatrix}$	**Vektor**
Kreuzprodukt	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\b_1a_3-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$	**Vektor**
Spatprodukt	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$	Skalar
(Matrix · Vektor) · Vektor	$(\boldsymbol{A}\cdot\vec{a})\cdot\vec{c}\neq\boldsymbol{A}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})$ ...kommt beim Energiesatz vor!	Skalar

Vektor-Notation	
Schreibweise von Vektoren	$\vec{r}_P=\vec{r}_A+\vec{r}_{PA}$ 

15. Glossar

Newtonsche Axiome	1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradliniger Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt. (Trägheitsprinzip) 2. Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der auf den Massepunkt wirkenden Kraft. Das zweite Newtonsche Gesetz ist nur in Inertialsystemen gültig. 3. Zu jeder Kraft gibt es eine gleich große Gegenkraft (actio = reactio)
Inertialsystem	Unter Inertialsystem versteht man ein ruhendes Bezugssystem. Für die meisten (technischen) Anwendungen wird die Erde als (ruhendes) Bezugssystem herangezogen.
eingeprägte Kraft	z.B. die Gewichtskraft. Sie ist eine äußere Kraft, welche über die Systemgrenze hinweg auf den Massenmittelpunkt wirkt.
Zwangskräfte	Als Zwangskraft bezeichnet man eine Kraft, welche durch eine kinematische Bindung hervorgerufen wird. In der Statik sind die Lagerkräfte und Gelenkskräfte Zwangskräfte. Durch das Auftrennen werden die inneren Kräfte zu äußeren Kräften (actio=reactio). In der Dynamik versteht man unter der kinematischen Bindung aber nicht nur die Lagerkräfte, sondern auch die Bewegungsvorgaben!
körperfester Punkt	Ein körperfester Punkt muss nicht zwangsläufig ein materieller Punkt sein. Er kann also auch außerhalb des Körpers liegen. Als Beispiel kann man der Schwerpunkt beim starren Körper genannt werden. Der Schwerpunkt dieser ist körperfest, aber kann auch außerhalb des Körpers liegen z.B. bei einem Hufeisen. Die Bezeichnung des körperfesten Punktes kommt daher, weil er seinen Abstand zu anderen Punkten am starren Körper nicht ändert (=körperfest).
starrer Körper	Alles materiellen Punkten haben immer die gleichen Abstände zueinander. Das trifft auch auf einen körperfesten Punkt zu, der kein materieller Punkt ist.

16. Abkürzungen

SPS	Schwerpunktsatz
DS	Drallsatz
ES	Energiesatz
AS	Arbeitssatz
LS	Leistungssatz
EG	Eulersche (Kreisel-)Gleichungen
IS	Inertialsystem
KS	Koordinatensystem
FS	Führungssystem
MTM	Massenträgheitsmoment
T	Kinetische Energie
V	Potential

Deine Meinung ist uns wichtig!

Wir versuchen unsere Unterlagen stets weiter zu entwickeln. Für Verbesserungsvorschläge sende uns eine E-Mail an: **support@easyclass.at**

Kostenlos verfügbar

Diese Formelsammlung ist kostenlos verfügbar. Jedes Semester gibt es eine neue Auflage mit vielen Verbesserungen. Die aktuelle Version der Formelsammlung findest du unter folgendem Link: **www.easyclass.at/mechanik-download**

Haftungsausschluss

Leider können wir Fehler nie gänzlich ausschließen. Gerade deshalb ist es wichtig auch jede Formel selbst auf Richtigkeit zu überprüfen.

Viel Erfolg

Wir hoffen, dass dir diese Formelsammlung in der komplexen Welt der Mechanik weiterhilft, und wünschen dir viel Erfolg bei deiner Prüfung.

LIEBE GRÜSSE UND HOFFENTLICH BIS BALD - ROMAN

