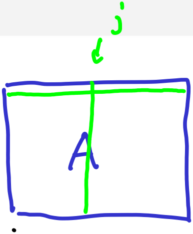
Heute (30.10.2014):

- Determinante: Rekursive Definition
- 2×2-Matrizen
- Co-Faktoren
- Cramersche Regel
- Die Adjungierte



$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} \cdot \det(A_{1j})$$

Erinnerung

Sei $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften:

i) $\det(I_n) = 1$ ✓

ii) Ist $\mathrm{Rang}(A) < n$, dann gilt $\det(A) = 0$

iii) $\det(A)$ ist *linear* in jeder Zeile. ✓

und Spalte.

Erinnerung

Sei $\det : \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften ii, und iii. Dann gelten die folgenden Aussagen:

Spalten

a) Verwandelt man A durch Vertauschen zweier Zeilen in A', dann gilt

$$\det(A) = -\det(A').$$

b) Verwandelt man die Matrix A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile in A', dann gilt

Spalte Spalte

$$\det(A) = \det(A').$$

Definition

- Die Determinante einer 1×1-Matrix ist der einzige Eintrag dieser Matrix
- Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $n \geqslant 2$ ist die Determinante von A

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \cdot \det(A_{1j})}$$

wobei die $n-1 \times n-1$-Matrix A_{1j} durch Streichen der ersten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.

det erfüllt gewünschte Eigenschaften

Satz 39

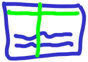
i) $\det(I_n) = 1$ ✓

ii) *Ist* $\mathrm{Rang}(A) < n$, *dann gilt* $\det(A) = 0$

iii) $\det(A)$ *ist linear in jeder Zeile.* ✓

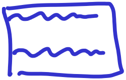
(ii) Wir können annehmen, dass A zwei gleiche Zeilen hat.

1. Fall



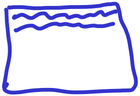
$\det(A) = 0$

2. Fall:

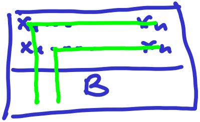


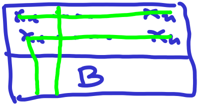
erste Zeile kommt doppelt vor.

1. Unterfall:



Erste beiden Zeilen sind gleich.





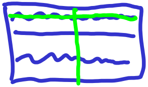
Der Vorfaktor im Determinantenentwicklung für $x_1 \cdot x_2$

$$(-1)^{1+1} \cdot x_1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot x_2 \cdot \det(B_{12})$$

$$+ \quad (-1)^{2+1} \cdot x_2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot x_1 \cdot \det(B_{12}) = 0$$

genauso sieht man, dass Koeffizient von $x_i x_j$ $i \neq j$ auch null ist. $\Rightarrow \det(A) = 0$.

2. Unterfall:



erste Zeile = i-te Zeile mit $i > 2$.
durch Vertauschung von Zeile 1 und $i-1$ in Streichungsmatrix $\rightsquigarrow$ 1. Unterfall ■

Linearität in jeder Spalte

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} \cdot \det(A_{1j})$

- Nehmen wir an, die j-te Spalte ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als j-te Spalte von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A^{(j,x)}$ und somit eine Abbildung:

\# Multiplikationen.

$$
\begin{array}{rccc}
C_j : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & \det(A^{(j,x)}).
\end{array}
$$

$T(n)$ $\qquad T(1) = 0$ if $n = 1$

reelle Zahl.

$T(n) = n \cdot T(n-1) + n$

$= n \cdot (n-1 \cdot T(n-2) + n-1) + n$

$\geq n(n-1) \cdot (T(n-2) + 1) \geq n(n-1)(n-2) \cdots 1.$

100×100 matrix $100!$

Noch einmal: Schnelle Berechnung von det.

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} \overset{\text{Ersetzung}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

(und Vertauschung!)

$$\det(A) = (-1)^{\#\text{Vertauschungen}} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Permutationsmatrix.

Linearität in jeder Spalte

- Nehmen wir an, die j-te Spalte ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als j-te Spalte von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A^{(j,x)}$ und somit eine Abbildung:

$$
\begin{aligned}
C_j :\quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \det(A^{(j,x)}).
\end{aligned}
$$

j-te Spalte

$$\det\left(\cdots \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \cdots \right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} \det(A_{1j})$$

Zeigt man ähnlich wie

Aussage, dass det linear in jeder Zeile.

Linearität in jeder Spalte

Satz 40

Die Abbildung $C_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist eine lineare Abbildung.*

Dies zeigt man ähnlich zum vorhergehenden Satz. bzgl. Linearität in Zeilen.

Die Determinante einer 2×2 Matrix

Erinnerung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad *(-\frac{c}{a})$$

ist invertierbar genau dann, wenn $ad - cb \neq 0$.

<u>$a = b = 0$</u> $\det(A) = 0 = a \cdot d - b \cdot c$

<u>Sei $a \neq 0$</u>

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - b \cdot c / a \end{pmatrix} = a d - b c$$

<u>Sei $b \neq 0$</u>

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c - a \cdot \frac{d}{b} & 0 \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Multiplikativität der Determinante

1. Fall: $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$

Unterfall: $\det(B) = 0$

$\ker(B) \supsetneq \{0\}$

$\exists\, x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ mit $Bx = 0$

$A \cdot B \cdot x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A \cdot B) < n$

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$

Unterfall 2: $\det(A) = 0$

$\operatorname{rang}(A \cdot B) < n \Rightarrow \det(A B) = 0$

Satz 41

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Warnung!

Es gilt *nicht* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Sei $\det(A) \neq 0$ und $\det(B) \neq 0$.

$E_1 A = \left(\diagdown\right)$ $\quad A = \underline{E_1^{-1} \cdot \left(\diagdown\right)}$ $\quad B \cdot E_2 = \left(\diagdown\right)$ $\quad B = \underline{\left(\diagdown\right) \cdot E_2^{-1}}$

E_1 entspricht elem. Op. (Ersetzen und Vertauschen)

$\Rightarrow \det(A \cdot B)$

$= \det\left(E_1^{-1} \cdot \boxed{\left(\diagdown\right)\left(\diagdown\right)} \cdot E_2^{-1}\right)$

$$= \det\left(\varepsilon_1^{-1} \cdot \boxed{(\diagdown)(\sim) \cdot \varepsilon_2^{-1}}\right) = \det\left((\diagdown) \cdot (\sim) \cdot \varepsilon_2^{-1}\right) \cdot \det(\varepsilon_1^{-1})$$

$$(\diagdown) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$(\sim) = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \det\left((\diagdown) \cdot (\sim)\right) \cdot \det(\varepsilon_1^{-1}) \cdot \det(\varepsilon_2^{-1})$$

$$= a_1 \cdot b_1 \cdots a_n \cdot b_n \cdot \det(\varepsilon_1^{-1}) \cdot \det(\varepsilon_2^{-1})$$

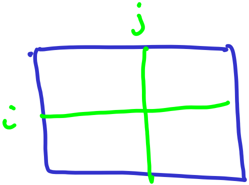
$$= a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_n \cdot \det(\varepsilon_1^{-1}) \cdot \det(\varepsilon_2^{-1})$$

$$= \det(\diagdown) \cdot \det(\sim) \cdot \det(\varepsilon_1^{-1}) \cdot \det(\varepsilon_2^{-1})$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

Co-Faktoren

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
- A_{ij} ist die Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ ist der (i, j)-Co-Faktor.



$\rightarrow A_{ij}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot C_{1j}}$$

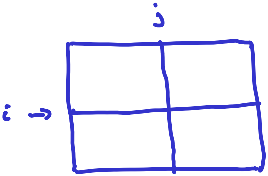
$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots & - \\ - & + & - & + & \cdots & + \\ & & \vdots & & & \\ - & \cdots & & & & + \end{bmatrix}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte

Satz 42

Es gilt mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

- $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach i-ter ~~Spalte~~ Zeile)*
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$ *(Entwicklung nach j-ter Spalte)*



$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ * & \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & * \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Entwicklung nach 2.ter Zeile

vert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-2)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(-2)(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 = 6.$$

$$\det = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(-1)^{\lfloor 3/2 \rfloor}\cdot \cancel{\det}\ \underbrace{2\cdot 1\cdot 3}_{=6} = 6.$$

A und A^T

Satz 43

Es gilt mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Beweis: $\det(A) = 0 \iff \operatorname{rang}(A) < n \iff \operatorname{rang}(A^T) < n$

$\iff \det(A^T) = 0$

Wir nehmen also an, A vollen Rang (Zeilen) hat.

A kann durch Zeilenvert. und Ersetzungsop. auf Diagonalform gebracht werden. A^T kann durch die entsprechenden Spaltenvertauschungen und Spaltenersetzungsop. auf dieselbe Diagonalform gebracht werden. $\Rightarrow \det(A) = \det(A^T)$. $\blacksquare$

Die Cramersche Regel

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$
- $A_i(b) = (a_1 \; \cdots \; b \; \cdots \; a_n)$ $\longleftrightarrow$ $\begin{array}{ccc} & i & \\ \Bigg(\square & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} & \square \Bigg) \end{array}$

Satz 44

Sei A invertierbar, dann ist die eindeutige Lösung von

$$\boxed{Ax = b} \quad (*)$$

von der Gestalt

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}. \iff \det(A_i(b)) = x_i \cdot \det(A)$$

Sei $x_1, \dots, x_n$ Lsg. von $(*)$. $\quad b = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j$

linear in i-ter Spalte

$$\det(A_i(b)) \overset{\text{def}}{=} \det\left(\square \; \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j \; \square\right) = \sum_{j=1}^{n} \det\left(\square \; x_j a_j \; \square\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \det\left(\square \; x_j a_j \; \square\right) = \det\left(\square \; x_i \cdot a_i \; \square\right)$$

$$= x_i \cdot \boxed{\det\left(\square \; a_i \; \square\right)}$$

$$= x_i \cdot \det(A)$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 6 \\ -5x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 2$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{2} = \cancel{8}\,20.$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}}{2} = 27$$