École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Prof. Eisenbrand

Lineare Algebra (Herbst 2014)

Übung 8

Abgabe bis **10.11.2014** um 11 Uhr in Box vor MA C1 573.

Aufgabennummern beziehen sich auf Ausgabe: David C. Lay: Linear Algebra and its Applications. Fourth international Edition (Pearson).

Wir empfehlen zusätzlich die Übungen mit ungerader Nummer im behandelten Kapitel des Lehrbuches. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass man eine $n \times n$ Matrix mit vollem Zeilenrang alleine durch Operationen der Form "ersetze eine Zeile durch die Summe von sich selbst und einem Vielfachen einer anderen Zeile" in eine Diagonalmatrix umformen kann.

Aufgabe 2

1. Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome in einer Variablen mit Grad höchstens 3. Bestimmen Sie welche der folgenden Mengen ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$ ist :

   a. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = at$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

   b. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = a + t^2$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

   c. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = c_1t^3 + c_2t^2 + c_3t + c_4$, wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 beliebige ganze Zahlen sind.

   d. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 0$ erfüllen.

   e. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 1$ erfüllen.

   f. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(1) = 0$ erfüllen.

2. Sei $V = \mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller *positiven* reellen Zahlen. Wir definieren die Addition $\oplus$ in V durch $x \oplus y = xy$ für alle $x, y \in V$, und definieren die Skalarmultiplikation $\otimes$ durch $c \otimes x = x^c$ für alle $x \in V$ und $c \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie, dass V mit dieser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.

3. Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome mit Grad höchstens 3. Sei S der durch

$$p_1(t) = 1 + t^2, p_2(t) = 3t + 4t^3, p_3(t) = 1 + t + 5t^2 + 4t^3$$

   erzeugte Unterraum. Gilt $1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 \in S$?

4. Sei $S \subset \mathbb{R}^4$ die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, die $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_2 + 3x_3 = 0$, und $x_1 - x_4 = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass S ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Finden Sie eine Basis von S und bestimmen Sie $dim(S)$.

5. Sei V ein Vektorraum und seien S und T Unterräume von V . Wir definieren deren Summe $S + T$ als Menge

$$S + T = \{s + t \colon s \in S, t \in T\}.$$

   Zeigen Sie, dass $S + T$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 3

1. Seien

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Für welches p ist $\ker(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^p$?
   b) Für welches q ist $\ker(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^q$?
   c) Für welches k ist $\mathrm{Col}(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^k$?
   d) Für welches l ist $\mathrm{Col}(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^l$?
   e) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(A)$.
   f) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(B)$.
   g) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(A)$.
   h) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(B)$.

2. Bestimmen Sie für

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

   ob $\boldsymbol{w}$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ oder im Kern $\ker(A)$ liegt.

Aufgabe 4

1. Sei $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Transformation gegeben durch

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Kerns $\ker(T)$ und des Bilds $\mathrm{Im}(T)$.

2. Sei

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   1. Finden Sie eine Basis von $\ker(C)$.
   2. Wir bezeichnen mit T die durch $T(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x}$ definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$. Ist T injektiv ? Ist T surjektiv ? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Sei $M_{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen. Wir definieren die Abbildung $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ durch $T(A) = A + A^T$ für 2×2 Matrizen A.

   (a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.
   (b) Zeigen Sie, dass das Bild von T die Menge aller symmetrischen 2×2 Matrizen ist, d.h. $C \in M_{2\times 2}$ mit $C = C^T$.
   (c) Bestimmen Sie den Kern von T.

4. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B zeilenäquivalent sind.

   Bestimmen Sie

   1. den Rang von A und $\dim \ker(A)$;
   2. eine Basis für jeden der folgenden Unterräume $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$, $\ker(A)$, $\mathrm{Col}(A^T)$, $\mathrm{Row}(A^T)$ und $\ker(A^T)$.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.
Kapitel 4.1 & 4.2

1. Ein Unterraum eines Vektorraums ist auch selbst ein Vektorraum.
2. $\mathbb{R}^2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.
3. Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cup S_2$ ein Unterraum von V.
4. Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cap S_2$ ein Unterraum von V.