Algorithmische Geometrie II, SS 08
Übungsblatt 4
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Besprechung in der Woche 19.5.-23.5. (21. Kalenderwoche)

Aufgabe 1: Inverses Voronoi-Diagram

Bei dem *inversen Voronoi-Diagramm* einer Punktmenge $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ besteht (für $1 \leq i \leq n$) die Voronoi-Region des Punktes p_i aus denjenigen Punkten der Ebene, die von p_i weiter entfernt sind als von allen anderen Punkten aus S. Wir setzen voraus, dass keine 3 Punkte aus S auf derselben Geraden liegen und keine 2 Punkte aus S gegenüberliegende Eckpunkte eines achsenparallelen Quadrates sind (allgemeine Lage).

a) Zeigen Sie, dass genau die auf $\partial ch(S)$ gelegenen Punkte eine nicht-leere Voronoi-Region im inversen Voronoi-Diagramm besitzen.

b) Beweisen Sie, dass alle Voronoi-Regionen im inversen Voronoi-Diagramm unbeschränkt sind.

c) Wir betrachten jetzt die Situation bezüglich der L_1-Metrik. Durch die allgemeine Lage ist sichergestellt, dass keine flächigen Bisektoren auftreten. Beweisen oder widerlegen Sie, dass das inverse Voroni-Diagramm bezüglich der L_1-Metrik von S die Komplexität $\Theta(1)$ besitzt.

Aufgabe 2: Einheitskreise im $\mathbb{R}^d$

Es bezeichne S_1^d (bzw. S_∞^d) den Rand des Einheitskreises um den Ursprung im $\mathbb{R}^d$, der sich bei Verwendung der L_1-Metrik (bzw. der L_∞-Metrik) ergibt.

a) Wie kann für einen Punkt $(x_1, \ldots, x_d)$ getestet werden, ob er zu S_1^d (bzw. zu S_∞^d) gehört?

b) Wievele Knoten, Kanten und 2-dimensionale Begrenzungsflächen gehören jeweils zu S_1^d bzw. S_∞^d?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Little Shop of Flowers

Zeigen Sie: Die Blumenladenmetrik ist vollständig, erfüllt aber nicht die Zwischenpunkteigenschaft.

Aufgabe 4: Metriken, die von Normen kommen

Sei $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: d wird genau dann von einer Norm $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ induziert, wenn d folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1. d induziert die euklidische (gewöhnliche) Topologie auf dem $\mathbb{R}^2$.
2. d ist translationsinvariant, d.h., dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ die Gleichheit
$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$
gilt.
3. Liegt $z \in \mathbb{R}^2$ auf der Strecke zwischen $x, y \in \mathbb{R}^2$, so gilt:
$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y),$$
die Dreiecksungleichung wird also in diesem Fall zur Gleichheit.

Tipp: Zeigen Sie zunächst die einfache Richtung, dass also jede von einer Norm induzierte Metrik die drei Eigenschaften besitzt. Wenn Sie anschließend zeigen, dass jede Metrik mit den Eigenschaften 1 bis 3 durch eine Norm induziert ist, so zeigen Sie die Linearität $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ zunächst nur für rationale Werte von λ und nutzen anschließend aus, dass jede reelle Zahl als Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen darstellbar ist.