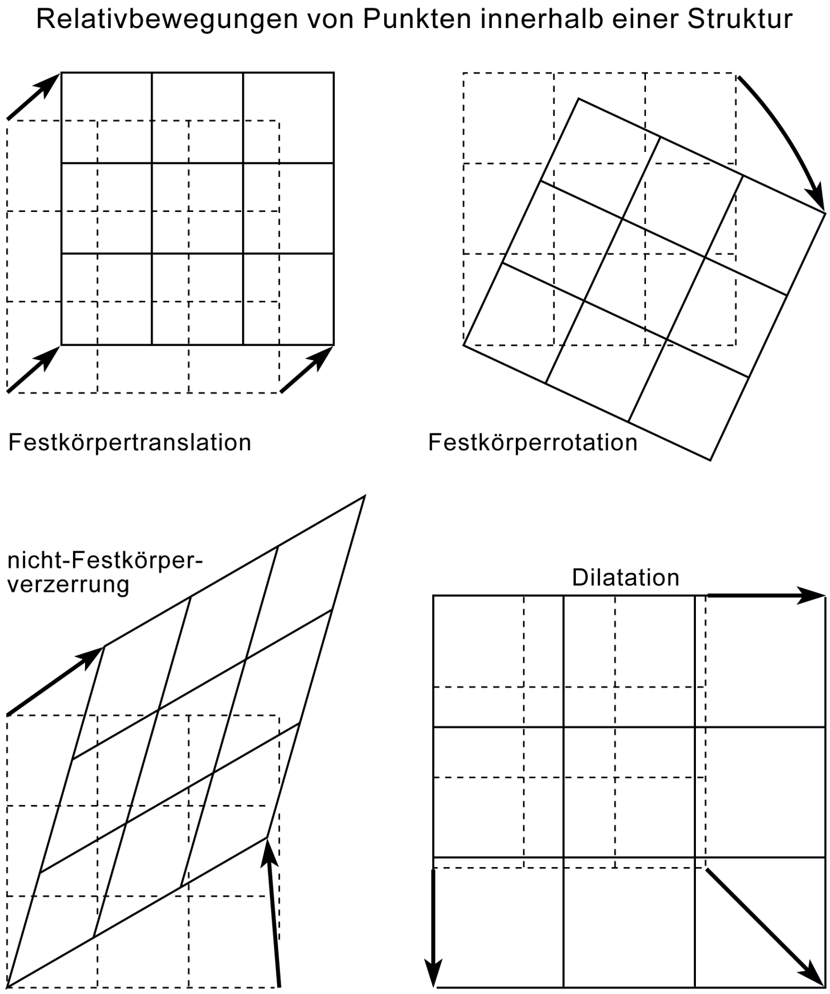
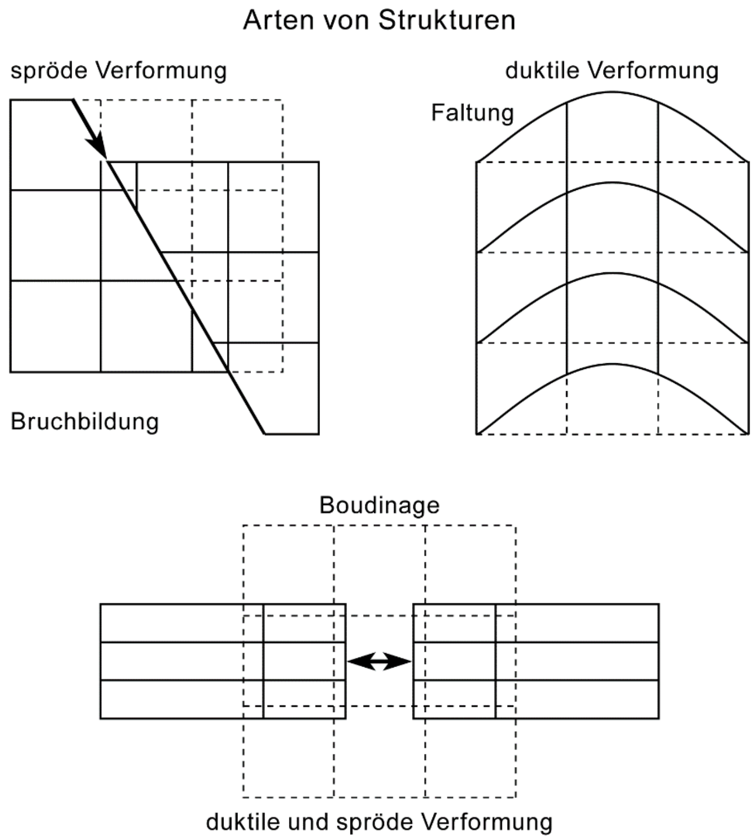
MECHANISCHE ASPEKTE DER DEFORMATION

Die Mechanik befasst sich mit den Auswirkungen die **Kräfte** *(forces)*auf **Körper** *(bodies)* ausüben. Ein fester Körper, der äusseren Kräften ausgesetzt ist, tendiert dazu, sich zu verschieben und seine Form zu ändern. Während der **starren Festkörperverschiebung** *(rigid body motion)* werden die Gesteine verschoben und/oder rotiert, wobei die ursprüngliche Grösse und Form erhalten bleibt.
Wenn die auf den Körper einwirkende Kraft teilweise oder ganz vom Körper selbst absorbiert wird, anstatt den Körper zu verschieben, wird der Körper **unter Spannung** gestellt *(stressed)*. Diese Kräfte bewirken dann die Bewegung von Teilchen innerhalb des Körpers. Somit verändert der Körper seine Form, d.h. er wird verformt. Unter **Verformung** *(strain)* versteht man die Deformation *(non rigid body deformation)* eines Gesteins infolge von Spannungseinfluss.
In der Erde sind die wichtigsten Kräfte für eine relativ lange Zeit aktiv. Sie sind auf die **Schwerkraft** *(gravity)* und die **relativen Bewegungen** grosser Gesteinsmassen in der Kruste und im oberen Mantel zurückzuführen. Andere mögliche Kräfte sind meistens klein oder nur für kurze Zeitspannen aktiv, so dass keine bedeutende Verformung entsteht.



Kräfte, die mit der Bewegung im Zusammenhang stehen, spielen über eine relativ lange Zeit eine Rolle. Die Strukturgeologie untersucht permanente Deformation (sogenanntes „**Versagen**", *„failure"*, von Gesteinen), die **Strukturen** *(structures)* wie Falten und Störungen in Gesteinen produziert. Wenn ein Gestein bricht und seine Kohäsion verliert, so ist es **spröd** *(brittle)*. Wenn sich das Gestein ohne Kohäsionsverlust in komplizierte Formen verformt, die bestehen bleiben, wenn die Kraftwirkung aufhört, so hat das Gestein eine permanente **Verformung** *(strain)* aufgenommen und das Gestein selbst war **duktil** *(ductile)*.



Das **Verhalten** *(behaviour)* der Gesteine, das heisst, ob sie sich permanent oder nicht permanent verformen, ob Verformung überwiegend durch duktilen, spröden oder einen anderen Deformationsprozess entsteht, hängt von der Wechselwirkung einer Anzahl von physikalischen und chemischen Faktoren ab. Deshalb ist ein genaues Verständnis des Deformationsprozesses wichtig.
Wir konzentrieren uns in dieser Vorlesung darauf, einige dieser Faktoren zu prüfen, und eine physikalische Einsicht zu gewinnen, wie sich Gesteine in der Natur verformen. Die Beschreibung eines jeden Deformationsprozesses beinhaltet die Bestimmung der angewandten Last (Kraft), was das Ziel einer **dynamischen Analyse** *(dynamic analysis)* ist. Tatsächlich können entscheidende Faktoren der Gesteinsdeformation abgeschätzt werden, indem man leicht messbare Materialeigenschaften, wie die Fliessspannung als Funktion der Verformung, der Verformungsrate und der Temperatur, benutzt und auf eine grosse Anzahl von Gesteinen anwendet. Diese Diskussion definiert also die Konzepte von Spannung, Verformung, Rheologie und den Bewegungsgleichungen. Niemand kann Spannungen direkt sehen, aber aus der resultierten Deformation kann man auf sie schliessen. Diese Vorlesung wird mit diesem Thema beginnen und die dafür notwendige Vektorrechnung einführen.

Physikalische Definitionen

Kontinuierliche Medien

Gesteine sind komplizierte Ansammlungen von Kristallen, Körnern, Flüssigkeiten usw. deren Eigenschaften und physikalische Parameter sich kontinuierlich verändern. Kontinuierliche Variation bedeutet, dass diese Parameter räumliche Ableitungen aufweisen. Deswegen ist es notwendig, infinitesimal kleine Materialvolumen zu betrachten, in denen die physikalischen Eigenschaften überall dieselben sind. Diese nennt man ein kontinuierliches Medium, welches reale Materialien modelliert, ohne ihre feine Struktur (z.B. die atomare Grösse) zu betrachten. In der folgenden Diskussion zur Mechanik werden die Gesteine als solche kontinuierliche Medien betrachtet.

Newton'sche Axiome: Gesetze der Bewegung

Die Newton'schen Axiome treffen eine Aussage über den Bewegungszustand von Körpern in Abhängigkeit von einer äusseren Grösse, der **Kraft** *(force),* und einer Eigenschaft des Körpers: der **Masse** (d.h. die Menge an Material in einem Körper). Auf dem Gebiet der **Dynamik** sollen nun die treibenden Kräfte der Bewegung untersucht werden. Da Deformation die relative Bewegung zwischen Punkten ist, werden die drei Newton'schen Gesetze der Bewegung als grundlegende Axiome angenommen.

Gesetz 1: (Trägheitsprinzip)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, solange dieser nicht von aussen durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
Die Geschwindigkeit eines solchen sich «frei» bewegenden Körpers ist nach Betrag und Richtung konstant.

Gesetz 2: (Aktionsprinzip)

Die Änderung der Bewegung (Beschleunigung) ist proportional zur auferlegten Kraft und verläuft in die Richtung in der die Kraft wirkt.

Gesetz 3: (Reaktionsprinzip)

Eine wirkende Kraft F ruft immer eine gleich grosse, entgegengerichtete **Gegenkraft** (Reaktionskraft $F_R = -F$) hervor; die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich und von entgegengesetzter Richtung (actio = reactio); z. B. der fallende Stein zieht die Erde ebenso stark an wie die Erde den Stein.

Physikalische Dimensionen / Grössen

Die mechanischen Eigenschaften eines Materials können mit den drei unabhängigen, grundlegenden physikalischen Grössen (d.h. messbare Parameter) **Länge** [L], **Masse** [M] und **Zeit** [T] ausgedrückt werden. [ ] bedeutet „in der Einheit". Andere Dimensionen, wie z. B. elektrische Ladung [Q] und Temperatur [θ], sind **abgeleitete Dimensionen**.

> Eine Grösse/Einheit ist die numerisch skalierte Magnitude einer physikalischen Dimension. Konventionell werden die Grössen, respektive Einheiten im *Système international d'unités* (SI Einheiten) angegeben. Diese Einheiten sind für die Länge, die Masse und die Zeit, Meter (m), Kilogramm (kg) und Sekunde (s).
> - Ein Meter ist die Distanz für welche das Licht im Vakuum 1/299'792'458 Sekunden benötigt.
> - Ein Kilogramm ist die Masse die durch den internationalen Kilogrammprototyp (wird auch als Urkilogramm bezeichnet) welches im *Bureau International des Poids et Mesures* in Sèvres (Frankreich) aufbewahrt wird.
> - Eine Sekunde ist das „9'192'631'770 fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids 133 Cs entsprechenden Strahlung festgelegt" (nach dem Zertifikat in Investment Performance Measurement) bei einer Temperatur von 0 K.

Kraft

Eine Kraft beeinflusst oder ändert die Bewegung eines Körpers.

Mathematischer Ausdruck

Die Kraft bezeichnet sowohl eine **Grösse** *(magnitude)* als auch eine **Richtung** (inkl. **Orientierung;** *direction and sense)*. Deswegen ist die Kraft $\vec{F}$ ein Vektor, welcher den Regeln der Vektoralgebra folgt. Gewöhnlich wird die Kraft als Pfeil in einem Koordinatensystem dargestellt:

- Die Länge der Linie spezifiziert die Grösse (Magnitude) der Kraft (wie stark ein Stoss ist).
- Die Orientierung der Zeile (räumliche Orientierung der Linie) spezifiziert die Richtung der Kraft

- Eine Pfeilspitze weist in die Einwirkungsrichtung der Beschleunigung (in welche Richtung der Stoss wirkt).

Wirkt auf einen Körper mit einer Masse m eine Kraft F, so wird er in Richtung der Kraft beschleunigt (Newtonsches Aktionsprinzip, auch Beschleunigungsprinzip genannt). Die Beschleunigung $\vec{a}$ eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner Masse m und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt.

$$\vec{a} = \vec{F}/m \Leftrightarrow \vec{F} = m.\vec{a}$$

Diese Relation kann geschrieben werden als:

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{mv}}{t} = \frac{d\left(\overrightarrow{mv}\right)}{dt}$$

wobei $\overrightarrow{mv}$ das Produkt der Masse und der Geschwindigkeit ist, was dem Impuls entspricht und t die Zeit.
Die uns am meisten vertraute Kraft ist das Gewicht, oder korrekt die Gewichtskraft. Das ist per Definition die Kraft, die eine Masse (Produkt von Volumen und Dichte) in Richtung der Gravitationsbeschleunigung erfährt, und die deshalb normal zur Erdoberfläche ist.

Wie jede Vektorgrösse, kann auch eine Kraft entsprechend der Parallelogramm-Regel der Vektoranalyse in drei **Komponenten** *(components)* aufgespalten werden, z.B. $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ und $\vec{F}_z$, welche parallel zu den Koordinatenachsen (x, y, z) sind. Dies wird gewöhnlich in Spaltenform geschrieben:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Orientierung

Der Vektoranalyse kann entnommen werden, dass zwei Vektoren definieren eine Ebene. Dies hilft, um die Orientierungen zu bestimmen. Diese erste Definition ist äusserst nützlich bei 3D-Anwendungen, da man durch das Produkt dieser beiden Vektoren einen Vektor senkrecht zu den anderen zwei Vektoren erhält, d.h. senkrecht zur Ebene, die die zwei Vektoren enthält. Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt) ist auch ein Einheitsvektor (seine Grösse ist 1). Die praktische Anwendung ist das normale kartesische Koordinatensystem, wobei $\vec{i}$ der Einheitsvektor entlang der x-Achse (also senkrecht zur yz-Ebene), $\vec{j}$ der Einheitsvektor entlang der y-Achse (senkrecht zur xz-Ebene) und $\vec{k}$ der Einheitsvektor entlang der z-Achse (senkrecht zur xy-Ebene) ist. Die Kraft kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k} = F_x.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + F_y.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + F_z.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oder

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F_x.\vec{e}_x + F_y.\vec{e}_y + F_z.\vec{e}_z$$

mit $\vec{e}_i$ dem Einheitsvektor der i-Achse.

Wenn die drei Vektorkomponenten geschrieben werden, d.h. die Länge jedes Vektors entlang aller 3 Achsen, können die Einheitsvektoren weggelassen werden, so dass die Koordinaten zu den Koeffizienten $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ in Teilen der Gleichung vereinfacht werden können. Der Vektorsatz welcher durch die drei Zahlen und das Koordinatensystem definiert wird, wird mathematisch als ein Tensor erster Ordnung beschrieben.
Kräfte und Kraftkomponenten addieren sich wie Vektoren.

Dimension

Die Einheit und die Dimension der Kraft werden mit Hilfe der Bewegungsgleichung der Mechanik $\vec{F} = m.\vec{a}$ definiert. Die Dimension hat die Form:

$$[F] = \left[M.L.T^{-2}\right]$$

Die Masse ist eine skalare Grösse, d.h. es erfordert nur eine Zahl um sie zu definieren. Die Einheit ist ein Kilogramm (1 kg). Ein Skalar ist mathematisch ein Tensor nullter Stufe.
Die Definition der Beschleunigung braucht ein Koordinatensystem.
Das Newton und das Dyn sind die Grundeinheiten der Kraft. 1Newton (1N) ist die Kraft, die benötigt wird, um einen Körper von 1 kg mit $1 m/s^2$ zu beschleunigen:

$$1N = 1kg.1m.1s^{-2} = 10^5 \, Dyns$$

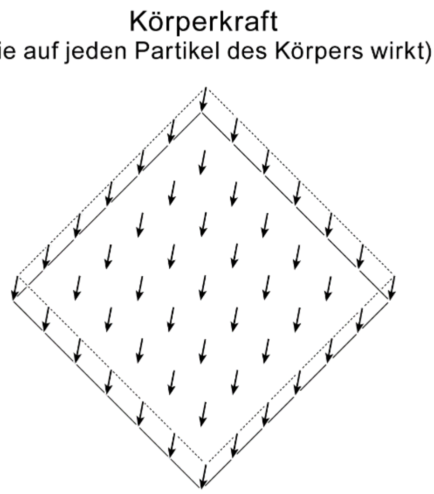
Die uns am meisten vertraute Kraft ist das Gewicht, oder korrekt die Gewichtskraft. Das ist per Definition die Kraft, die eine Masse (Produkt von Volumen und Dichte) in Richtung der Gravitationsbeschleunigung erfährt, und die deshalb normal zur Erdoberfläche ist.

Körperkräfte - Oberflächenkräfte

In der Geologie gibt es zwei fundamentale Klassen von Kräften. **Körperkräfte** *(body forces)* wirken auf die gesamte Masse eines Körpers und hängen von der Menge an Material im Körper (d.h. dem Gewicht) ab. **Oberflächenkräfte** *(surface forces)* wirken an Oberflächen.

Körperkräfte

Äussere Kräfte, die von der Ferne (Schwerkraft, elektromagnetischen Felder usw.) auf jede Partikel des Körpers wirken, sind Körperkräfte. Nehmen Sie als Beispiel das Gewicht des Bleistifts: Gravitation wirkt auf das Bleistiftsvolumen und ist proportional zu Menge an Material in diesem Volumen. Volumenkräfte sind demzufolge proportional zur Masse und zum Volumen des Körpers.



In rein mechanischen Systemen gibt es zwei Arten von Körperkräften, solche aufgrund der Gravitation und solche aufgrund der Trägheit.

Oberflächenkräfte

Diejenigen Kräfte, die auf das Äussere eines Körpers einwirken, z.B. zum Bewegen eines Bleistifts, sind Oberflächenkräfte oder **angewandte Kräfte** *(applied forces)*. Oberflächenkräfte (z.B. Reibung) sind demzufolge proportional zur Grösse der Fläche auf die sie einwirken. Oberflächenkräfte können auf imaginären oder realen Oberflächen innerhalb des Körpers einwirken und können durch das Wirken des Körpers auf sich selbst, wie z.B. die Spannung in einem ausgedehnten Gummiband, resultieren. Keine konkrete physikalische Oberfläche oder sichtbare Materialgrenze wird benötigt. Die Oberflächenkräfte werden normalerweise ausserhalb des betrachteten Körpers erzeugt und werden durch die mechanisch ununterbrochene Region übertragen, die den Körper mit der Stelle verbindet an der die Kraft angewendet wird. Z.B. können tektonische Kräfte von den Plattengrenzen durch die Platte übertragen werden.

Verhältnis von Körper- zu Oberflächenkräften

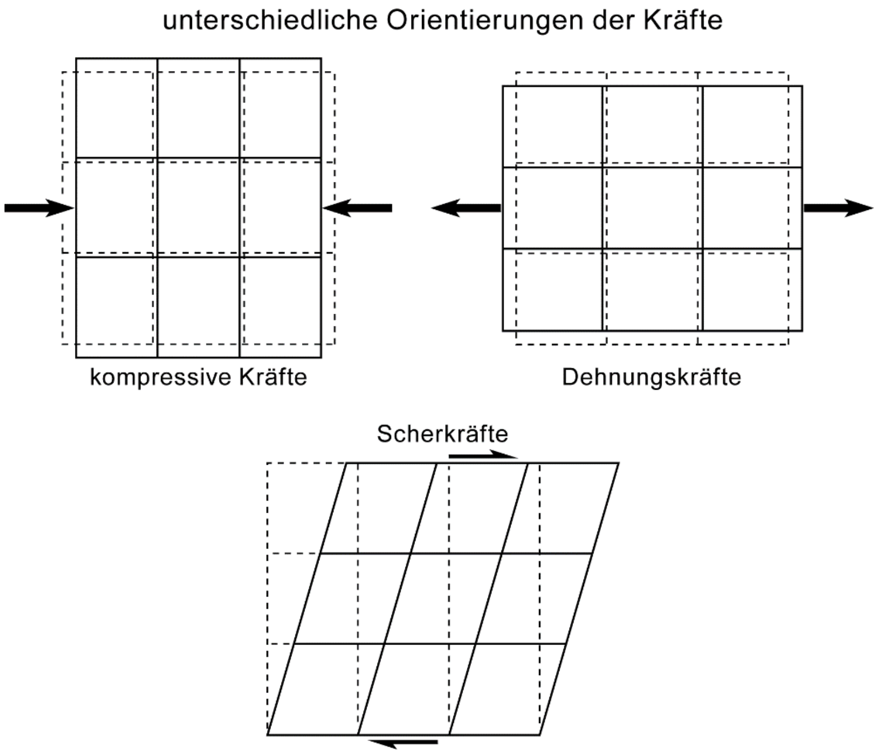
Gravitationskräfte sind proportional zur Masse. Das bedeutet, dass das Gewicht eines überlagerten Gesteinstapels eine bedeutende Kraft auf die tiefer liegenden Gesteine in der Kruste erzeugt.
Im Allgemeinen ist jedes Massenelement in einem Zustand des dynamischen Gleichgewichts, was heisst, dass die Summe der Volumenkräfte gleich und entgegengesetzt der Summe der Oberflächenkräfte ist. Wenn dl eine charakteristische Länge eines kleinen Körperelementes ist, dann können wir für das Verhältnis von Körper- zu Oberflächenkräften schreiben:

$$\frac{\text{Körperkräfte}}{\text{Oberflächenkräfte}} = K\frac{(d\ell)^3}{(d\ell)^2}$$

mit K = Konstante, die gegen null geht, wenn $d\ell$ gegen null geht. Der Kraftunterschied impliziert, dass sich die Grösse der Körperkräfte schneller (erheblich für grosse $d\ell$) als die der Oberflächenkräfte verringert. Wenn folglich das Volumenelement klein ist, können die Körperkräfte, die mit sich selbst im Gleichgewicht sind, vollkommen vernachlässigt werden. Die Skalierung zwischen Körper- und Oberflächenkräften hat zum Beispiel wichtige Folgen für Bioengineering; die Festigkeit eines Knochens ist proportional zu seiner Querschnittsfläche, aber das Gewicht eines Körpers ist proportional zu seinem Volumen. Die Knochen grosser Tiere haben deshalb ein grösseres Durchmesser/Längen-Verhältnis um die verhältnismässig grösseren Gewichte zu halten. Solche Beziehungen in der Skalierung kontrollieren auch mechanische Deformationsprozesse. Zum Beispiel hat George Gabriel Stokes 1851 eine Lösung hergeleitet für die Geschwindigkeit einer Kugel, welche in einem viskosen Fluid mit niedrigerer (oder höherer) Dichte absinkt (oder aufsteigt). Diese Geschwindigkeit vergrössert sich mit dem Quadrat des Kugelradius weil die Auftriebskräfte verhältnismässig stärker ansteigen als die Reibungskräfte die auf die Kugeloberfläche der Bewegung entgegenwirken. Ähnliche Beziehungen zwischen Auftriebs- und Reibungskräften haben wichtige tektonische Folgen für den Aufstieg von Diapiren und das Absinken von lithosphärischen Platten in den Mantel.

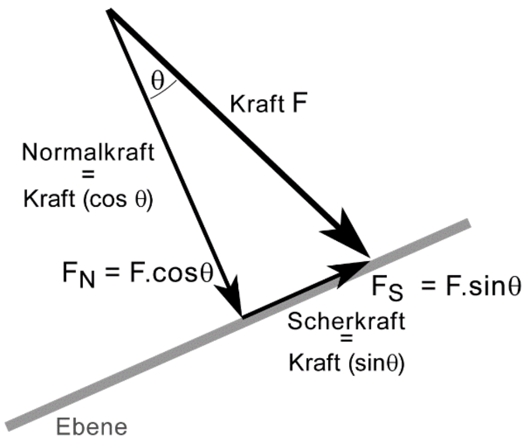
Gerichtete Kräfte

Gerichtete Kräfte *(directed forces)* wirken in eine bestimmte Richtung. In der Geologie ist:
- **Kompression** *(compression)* ein Paar entgegengesetzter Kräfte, die dazu tendieren, Körper zu komprimieren.
- Unter **Zug** *(tension)* versteht man ein Paar entgegengesetzter Kräfte, die die Eigenschaft haben, Körper auseinanderzureissen.
- **Scherung (Scherkraft;** *shearing, shear forces)* wird durch ein gekoppeltes Kräftepaar erzeugt, das in der gleichen Ebene liegt, aber in entgegengesetzter Richtung orientiert ist.
- **Torsion** *(torsion)* ist eine Kraft, die zur Verdrehung eines Körpers führt (Drillkraft, "Schraubenkraft").



Normal- und Scherkomponenten

Eine Oberflächenkraft $\vec{F}$, die auf eine Ebene wirkt, ist im Allgemeinen schräg zur Oberfläche und kann in zwei Vektorkomponenten aufgeteilt werden.



Vektorielle Auflösung einer Oberflächenkraft in ihre Normal- und Scherkomponente

Diese Komponenten sind:

- Die **Normalkraft** *(normal force)* $\vec{F}_N$, die senkrecht zur Ebene steht;
- Die **Scherkraft** *(shear force)* $\vec{F}_S$, die parallel zur Ebene gerichtet ist:

$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_S$$

Die Scherkomponente erleichtert das Gleiten auf der Ebene, während die Normalkomponente dazu neigt es zu verhindern, weil beide Seiten der Ebene in Richtung zueinander drücken. In zwei Dimensionen sind $\vec{F}$, $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_S$ koplanar; die zwei senkrechten Komponenten sind gemäss Rechtwinkel-Trigonometrie definiert:

$$F_N = F\cos\theta$$
$$F_S = F\sin\theta$$

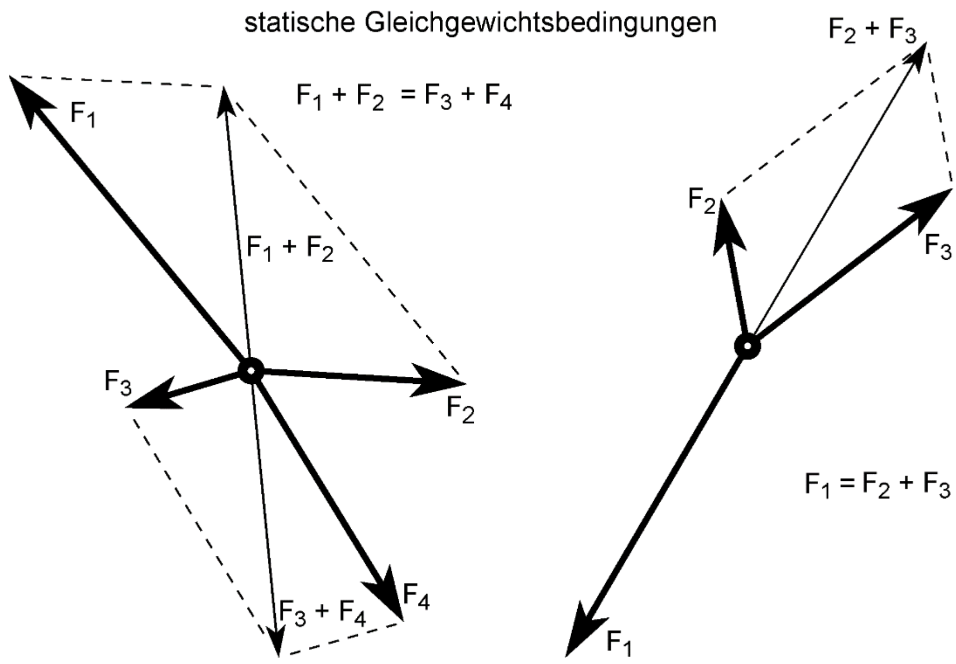
wobei θ der Winkel zwischen der angewandten Kraft und der Flächennormalen ist. Die Grösse wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt:

$$F^2 = F_N^2 + F_S^2$$

Diese Gleichungen zeigen, dass man (i) die Grösse des angewandten Kraftvektors und (ii) den Winkel zwischen dem Kraftvektor und der Fläche kennen muss, um die Grösse der Komponenten zu finden.

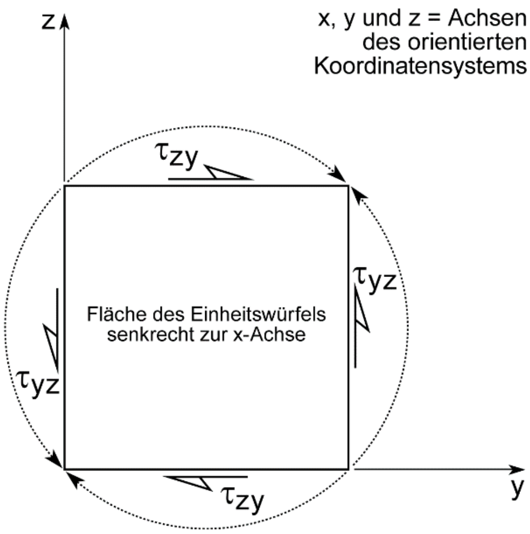
Aktion / Reaktion; statische Gleichgewichtsbedingungen

Stellen Sie sich einen Gesteinswürfel innerhalb einer grossen Gesteinsmasse vor. Das Gestein wird als ein kontinuierliches Medium betrachtet. Alle sechs Flächen dieses Würfelelements werden durch die angrenzenden Teile des umgebenden Gesteins angedrückt und das Material innerhalb des Würfels reagiert entsprechend. Diese Situation entspricht dem grundlegenden Reaktionsprinzip (actio= reactio) das besagt, dass Kräfte, die paarweise auftreten, in der Grösse gleich sind aber in entgegengesetzter Richtung wirken. Zudem ist jedes Atom innerhalb des Würfels der Schwerkraft unterworfen, aber jedes Atom ausserhalb des Würfels auch. Daher kann allgemein die Körperkraft, die überall gleich ist, in einem ersten Ansatz als abwesend betrachtet werden.



Zwei Kräftegleichgewichte wirken auf ein Massenelement

Unter natürlichen **statischen Gleichgewichtsbedingungen** (*static equilibrium;* der Gesteinswürfel bewegt sich nicht und wird nicht deformiert) müssen die Kräfte an den gegenüberliegenden Flächen im Gleichgewicht miteinander stehen. Wenn man diesen Zustand betrachtet, kann man geologische Kräfte am besten verstehen.
Diese Situation ist gegeben, wenn die Summe aller Kräfte, die auf den Körper wirken, null ergibt. Dies setzt voraus, dass Normalkräfte auf gegenüberliegenden Flächen die gleiche Magnitude, jedoch entgegengesetzte Orientierung haben. Scherkräfte auf gegenüberliegenden Flächen (zwei auf jeder Fläche) müssen ebenfalls im Gleichgewicht stehen, um eine Rotation des Würfels zu verhindern.



Gleichheit der Scherkomponenten
Damit in einem Kontinuum das Drehmoment auf einem Volumenelement verschwindet (keine Winkelbeschleunigung), müssen sich die in einer Ebene liegenden und entgegengesetzt gerichteten (uhrsinnige - gegenuhrsinnige) Scherkomponenten kompensieren

Vereinfachend können die Kanten des Würfels als die Hauptachsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems angenommen werden. Daraus folgt dann, dass sich die Scherkomponente in zwei Scherkomponenten parallel zu den Kanten der betrachteten Fläche auflösen lässt.

Spannung in einem kontinuierlichen Medium

Die Spannung verursacht die Verformung eines Körpers.

Definition

Die Grösse der Kräfte, die auf die Flächen des Würfels einwirken, hängt vom Flächeninhalt ab. Je grösser der Würfel, desto grösser muss die Kraft sein, um eine Formänderung oder Bewegung zu bewirken. Die Situation wird durch eine Variation der Grösse und Richtung der Kräfte von Punkt zu Punkt auf jeder Würfelfläche leicht verkompliziert. Es ist deshalb vorteilhaft, ein Mass zu haben, welches von der Grösse des in Betracht gezogenen Würfels unabhängig ist. Diese Vereinfachung geschieht, indem man sich vorstellt, der Würfel werde auf einen würfelförmigen Punkt verkleinert, dessen Flächen eine infinitesimale Grösse $A = 1$ haben. Der würfelförmige Punkt repräsentiert alle möglichen Orientierungen einer Fläche im Raum.
Die Bedeutung des Bereichs, auf den eine Kraft ausgeübt wird, ist uns allen intuitiv bekannt. Die Füsse sinken beim Gehen auf Schnee ein, weniger, wenn man Schneeschuhe hat, und man kann sogar auf Skiern ausrutschen. Die Kraft (Gewicht der Person), die auf Schnee wirkt, ist dieselbe, aber durch die Vergrösserung der Kontaktfläche wird die Belastung des Schnees verringert. Dies zeigt, dass die Spannung und nicht die Kraft die Verformung von Materialien (hier Schnee) kontrolliert. Daher muss man mit der Spannung arbeiten, um die Verformung von Gesteinen zu untersuchen.

Zugkraft

Die **Zugkraft** *(traction)* T verkörpert die Kraftintensität in Bezug auf die Oberfläche, auf der die Kraft angelegt wird. Wird die Kraft F gleichmässig über eine grosse Fläche verteilt, so ist:

$$T = F/A$$

Wenn die Richtung und Intensität der Kraft über die Fläche variieren, dann sollte Traktion nur an einem infinitesimal kleinen Bereich als Punkt definiert werden. Mit dem imaginären kubischen Punkt wird Traktion formal als **Kraft pro Flächeneinheit**, die in eine bestimmte Richtung an einem bestimmten Ort auf den Würfel wirkt, definiert.

Eine genauere Definition der Zugkraft an einem Punkt wird gegeben durch das beschränkte Verhältnis von Kraft $\Delta\vec{F}$ zur Fläche ΔA, wenn es der Grösse der Fläche ΔA erlaubt ist sich zu verringern und null anzunähern (Cauchy's Grundregel):

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} \right) = \frac{dF}{dA}$$

In dieser Gleichung ist $\Delta\vec{F}$ ein Vektor, der mit einer Magnitude und mit einer Richtung definiert ist. Die Zugkraft ist ebenfalls ein Vektor, welcher durch drei Quantitäten definiert ist:
- seine Grösse;
- seine Orientierung;
- die Orientierung der Fläche, auf die er wirkt. Diese Fläche wird definiert durch den Flächeninhalt A und den normalen Einheitsvektor $\vec{n}$.

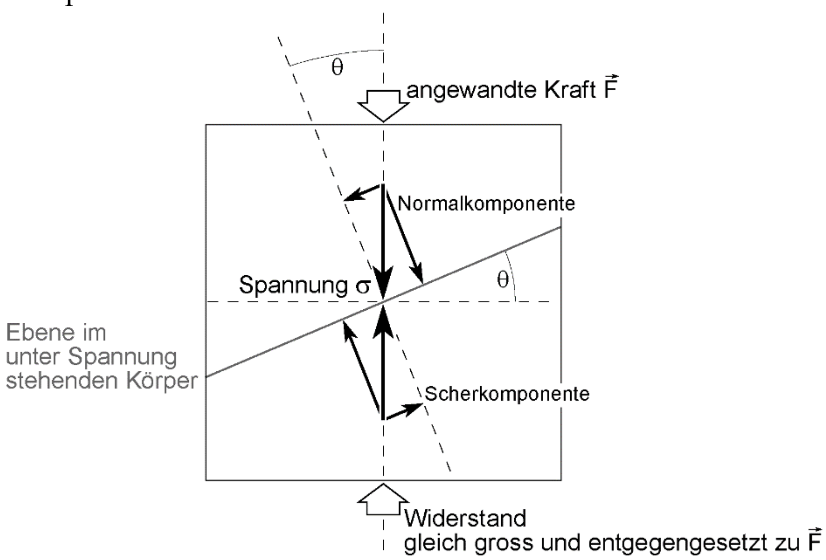
$$\vec{F} = \vec{T} . A . \vec{n}$$

<u>Achtung</u>: Kraft und Flächennormale sind Vektoren (gerichtete Grössen) und im Allgemeinen nicht parallel zueinander.

Diese Definition enthält zwei Richtungskomponenten: eine für die Kraft und eine für die Orientierung der Fläche. Die Definition zeigt an, dass die Zugkraft **ein gebundener Vektor** ist. Dieser Vektor kann sich auf einer gegebenen Fläche von Punkt zu Punkt ändern und auf eine Anzahl von vielen Flächen wirkt, die durch jegliche Punkte verlaufen, ein unterschiedliches Ausmass haben. Die Zugkraft wird folglich immer mit Bezug auf eine bestimmte Fläche ausgedrückt.

Spannung

Unter der Annahme des mechanischen Gleichgewichts (Gesetz der Bewegung, 3. Reaktionsprinzip), wenn eine Zugkraft auf die externe Oberfläche eines Körpers wirkt, dann baut sie interne Zugkräfte innerhalb des Körpers auf. Die interne Zugkraft wird über dieselbe Gleichung wie für die externe Zugkraft definiert; daher gibt es gleiche, aber entgegengesetzte Zugkräfte auf beiden Seiten des würfelförmigen Kontaktpunkts.



Spannung (ein Paar entgegengesetzter Vektoren) auf einer Ebene in einem Körper, auf den eine Kraft angewandt wird

Dieses Paar von ausgeglichenen Zugkräften ist die **Spannung** *(stress)*. Die Spannung wird auf irgendwelche Punkte eines Körpers wie die Federspannung angewendet: es gibt gleiche und entgegengesetzte Kräfte auf den anderen (versteckten) drei Flächen des kubischen Punkts. Die Spannung beinhaltet sowohl die Aktion als auch die Reaktion. Die Spannung ist deshalb ein **Paar**

von gleichen und entgegengesetzten Kräften, die auf die Einheitsfläche des Körpers wirkt. Die Spannung wird durch das Material über das zwischenatomare Kraftfeld übertragen. Der Körper befindet sich dann in einem **Spannungszustand** *(state of stress).*

Dimension

Sowohl Spannung als auch **Druck** *(pressure)* beinhalten die physikalische Dimension der Kraft und die Dimension der Fläche auf die die Kraft wirkt:

$$[M^*LT^{-2}]/[L^2] = [\text{Masse} * \text{Länge}^{-1} * \text{Zeit}^{-2}]$$

Die Einheiten, die heutzutage in der Geologie am häufigsten gebraucht werden, sind Pascal (1 Pa = 1 Newton m^{-2} mit 1N = 1 kg m s^{-2}) und Bar (1b = 10^5 Pa ~ 1 Atmosphäre. Die Geologen benützen häufiger 1Megapascal = 10^6 Pa = 1 MPa. Eine nützliche Zahl, insbesondere für Diskussionen mit metamorphen Petrologen, ist 1 kb = 100 MPa.

Komponenten der Spannung

Mit einem infinitesimal kleinen Würfel können wir die Körperkräfte gegenüber den Oberflächenkräften vernachlässigen. Demzufolge sind die Körperkräfte mit sich selbst im Gleichgewicht. Dann können wir den drei-dimensionalen **Spannungszustand in einem Punkt** (d.h. in einem unendlich kleinen Würfel; *state of stress at a point)* betrachten. Da die Spannung ohne eine Angabe über die Ebene, auf welche die Spannung wirkt, nicht bestimmt werden kann, müssen sowohl die Richtung der Kraft als auch die Orientierung der Würfelebene berücksichtigt werden.
Die Kraft (und die Zugvektoren) an jeder Einheitsfläche des Würfels kann in drei orthogonale Komponenten zerlegt werden, eine normal zur Fläche (Normalkraft) und zwei parallel zur Fläche (Scherkräfte). Genauso können die Spannungen auf den Flächen eines infinitesimal kleinen Einheitswürfels in drei **Normalspannungen** *(normal stresses)* senkrecht zu den Flächen und dreimal zwei **Scherspannungen** *(shear stresses)* parallel zu den Kanten aufgeteilt werden, wobei jede Scherspannung parallel zu jeder gleichrangigen Richtung der Fläche ist.

- Der Normalspannung, die senkrecht zu einer Fläche übertragen wird, wird das Symbol σ zugeordnet.
- Den Scherspannungen, die parallel zu einer Fläche übertragen werden, wird das Symbol τ zugeordnet, obwohl oft σ in der Literatur verwendet wird.

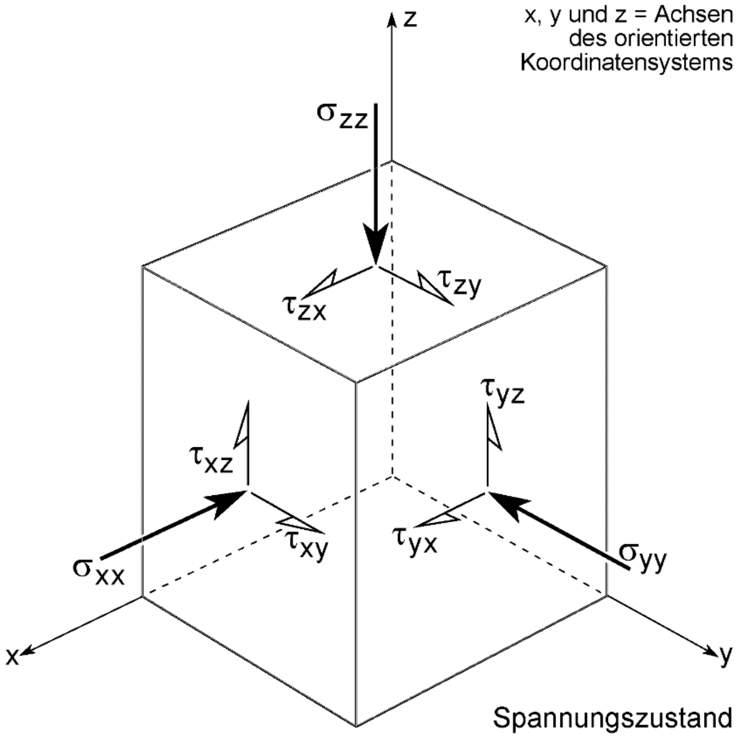
Spannung in einem 'Punkt' in einem kontinuierlichen Medium

Der Spannungszustand in einem Punkt ist drei-dimensional.
Es ist sinnvoll die Kanten des unendlich kleinen Würfels (die "Form" des Punktes) als ein System von kartesischen Koordinaten zu verwenden ($x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$) und das Symbol σ_{ij} dazu zu benützen, jene Spannungskomponente zu bezeichnen, die auf das Flächenpaar normal zu x_i einwirkt (um die Orientierung der Fläche zu identifizieren) und in Richtung x_j wirkt (um die Richtung der Zugkraft zu definieren). So kann man die Spannung auf einer Fläche in drei Komponenten aufteilen:

σ_{11} ist die Komponente der Normalspannung auf den Flächen normal zu x_1.

τ_{12} und τ_{13} sind die zwei Komponenten der Scherspannung auf dem Flächenpaar normal zu x_1, wobei eine jede entlang der anderen Koordinatenachsen x_2 und x_3 wirkt.
Für jedes Flächenpaar gibt es eine Fläche, für welche die nach innen gerichtete Normalspannung, hier positiv, entgegengesetzt der Normalspannung ist, welche auf die andere Fläche wirkt. Das gleiche gilt für die Flächen normal zu x_2 und x_3, so dass insgesamt neun Spannungskomponenten für die drei Flächen erhalten werden:

auf dem Flächenpaar normal zu x_1:	σ_{11}	τ_{12}	τ_{13}		σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}
auf dem Flächenpaar normal zu x_2:	σ_{22}	τ_{21}	τ_{23}	oder	σ_{yy}	τ_{yx}	τ_{yz}
auf dem Flächenpaar normal zu x_3:	σ_{33}	τ_{31}	τ_{32}		σ_{zz}	τ_{zx}	τ_{zy}



Spannungszustand in einem Körperelement dargestellt durch die Normal- (σ) und Scherspannungen (τ)

Beachten Sie, dass nur die Spannungen, die von der Aussenseite auf dem Würfel angewendet werden, gezeichnet sind. Spannungen, die das innere Medium an seiner Aussenseite erfährt, sollten innerhalb des Würfels gezeichnet werden.

Diese werden so geschrieben dass, alle Komponenten, die in einer Ebene wirken, in einer Zeile stehen, und dass alle Komponenten, die in dieselbe Richtung wirken, in einer Spalte stehen. Mit dem Symbol σ statt τ, können diese wie folgt beschriftet werden:

$$\begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{matrix}$$

Diese geometrische Anordnung entspricht dem ursprünglichen Set der Koeffizienten, die eine **Spannungsmatrix** *(stress matrix)* bilden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Eine Matrix, welche die gleiche Anzahl von Reihen und Spalten hat, nennt man eine quadratische Matrix. Wir können zusammenfassend diese Matrix von Koeffizienten als **T** oder $\boldsymbol{\sigma}$ oder als σ_{ij} bezeichnen und jedes Element identifizieren als:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Diese Gruppierung der neun Spannungskomponenten ist der **Spannungstensor** *(stress tensor)*.

Zur Erinnerung: Mathematische Definitionen; Über was reden wir?

Skalar: ist eine Grösse mit einer Magnitude (d.h. eine reelle Zahl, wie z. B. für Masse, Temperatur, Zeit).

Vektor: ist ein geometrisches Objekt mit einer Grösse und einer Richtung (z. B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung).

Tensor: ist eine mathematische Struktur mit einer Grösse und zwei Richtungen (zwei Vektoren), ein Vektor (der Einheitsvektor) gibt die Aktionsebene (z. B. Durchlässigkeit, Belastung, Stress) an.

Der Spannungstensor stellt alle möglichen Zugvektoren an einem Punkt dar, unabhängig im Hinblick auf die Orientierung der Fläche (normaler Einheitsvektor). Zusammenfassend wird der Spannungszustand an einem Punkt mit neun Komponenten beschrieben. Genauer gesagt ist es ein symmetrischer Tensor, da die sechs Nicht-Diagonalkomponenten austauschbar sind; es ist ein Tensor zweiter Stufe, da er mit zwei Richtungen in Zusammenhang steht. Dementsprechend haben die Spannungskomponenten zwei tiefgestellte Indizes, wobei gleichgültig und unabhängig gilt $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$. Die Indizes i und j bezeichnen den Reihen- und Spaltestandort eines Elements. Die Diagonalelemente $\sigma_{i=j}$ sind die Normalspannungen und die nicht diagonalen Elemente $\sigma_{i\neq j}$ entsprechen den Scherspannungen.

Wenn der elementare Würfel nicht rotiert (Gleichgewichtsbedingung, keine Winkelbeschleunigung und keine Volumenkraft), heben sich zwei Scherkomponenten jeweils auf den senkrechten Würfelebenen gegenseitig auf: d.h. die **Drehmomente** *(torques)* um jede Achse müssen null sein:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$
$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$
$$\sigma_{31} = \sigma_{13}$$

Zur Erinnerung:
Ein Drehmoment ist das Produkt aus dem Kraftvektor und dem senkrechten Abstand zwischen der Mitte der Masse und der Kraft.

Da $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (die tiefgestellten Indizes für die Magnituden der Scherspannungen sind kommutativ) ist die Spannungsmatrix symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

So reduzieren sich neun Komponenten der Spannungsmatrix zu sechs wahren, unabhängigen Spannungskomponenten in einem Punkt:

Normalspannungen	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
Scherspannungen	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}

Deshalb sind für eine willkürlich ausgewählte Serie orthogonaler Achsen x, y und z sechs unabhängige Quantitäten nötig, um den Spannungszustand in einem Punkt vollständig zu bestimmen, d.h. für jedes Oberflächenelement, das durch den Punkt führt. Demgegenüber benötigen Kräfte nur drei Quantitäten: in Bezug auf eine Fläche, die den Punkt beinhaltet, kann in Normal- und Scherkomponenten aufgeteilt werden.

Die kubische Darstellung hilft einen wichtigen Unterschied zwischen Spannungen und Kräften aufzuzeigen. Eine gerichtete Kraft kann in eine bestimmte Richtung wirken (sagen wir nach links), doch diese Aussage hat keinen Sinn, wenn sie auf innere Spannungen angewandt wird. Eine Spannungskomponente für eine Seite eines Flächenelements existiert nur im Zusammenhang mit einer Komponente gleicher Intensität und entgegengesetzter Richtung für die gegenüberliegende

Seite. Dies gilt für Normal- und Scherspannungen. Deshalb kann eine Spannung in vertikaler Richtung existieren, aber nicht nach oben oder unten.

Hauptspannungen

Selbst wenn sechs unabhängige Spannungsgrössen und beliebige Orientierungen den Spannungstensor vereinfachen, bleibt die Anwendung dieser Formulierung ein wenig mühsam. Glücklicherweise kann diese Situation beträchtlich vereinfacht werden. In einem homogenen Spannungsfeld ist es immer möglich, drei gemeinsame orthogonale Ebenen zu finden, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, und die so orientiert sind, dass die Scherspannungen τ verschwinden (Null werden).

$$\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

In diesem Fall bleiben nur die normalen Komponenten der Spannung übrig und:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{wird} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Diese drei Ebenen ohne Scherspannung sind als **Hauptspannungsebenen** *(principal planes of stress)* bekannt und sie schneiden sich entlang drei zueinander senkrechten Linien den sog. **Hauptachsen der Spannung** oder einfach **Hauptspannungsachsen** *(principal axes of stress)* eines betrachteten Punkts. Die Spannungskomponenten, die in Richtung dieser drei Achsen wirken, sind die **Hauptspannungen** *(principal stresses)* σ_{11}, σ_{22} und σ_{33}. Sie werden je nach Betrag mit σ_1, σ_2 und σ_3, um eine Wiederholung der tiefgestellten Zeichen zu vermeiden, bezeichnet. Konvention ist, dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ist. Dies entspricht den **maximalen, intermediären** und **minimalen** Hauptspannungswerten. Anders gesagt, die Hauptspannungen sind Normalspannungen, die auf Flächen ohne Scherspannung wirken. Die Hauptspannungsachsen stimmen überein mit den Hauptachsen des Spannungsellipsoids, welches weiter unten definiert wird.

Achtung: Vorzeichenkonvention!! In der Physik und im Ingenieurbereich ist die Zugspannung, die dazu neigt, materielle Partikel auseinanderzuziehen, positiv und die Kompressionsspannung, die dazu neigt, die materiellen Partikel zusammen zu drücken, negativ. In der Geologie ist der Spannungszustand innerhalb der Erdkruste immer in Kompression, auch in Extensionsbereichen, und darum ist es üblich, die Kompressionsspannung positiv und die Zugspannung negativ zu bezeichnen. Z.B. in einer nicht-tektonischen Umgebung, wird die Spannung in jeder möglichen Tiefe durch die Überbelastung erzeugt. Es ist eine zusammenpressende, vertikale Spannung, die einen zusammenpressenden horizontalen Druck verursacht. Auch an der Erdoberfläche ist die maximale Druckspannung gleich dem atmosphärischen Druck. Scherspannungen sind positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Wenn die Grössen und Richtungen der drei Hauptspannungen in einem Punkt bekannt sind, dann können die Komponenten der Normal- und Scherspannungen auf jeder Fläche durch diesen Punkt berechnet werden.

Der Spannungszustand in einem Punkt kann deshalb durch drei Hauptspannungen und drei Richtungen (die Orientierung der drei Hauptspannungsachsen) vollständig beschrieben werden. Stimmen die Achsen der Hauptspannungen nicht mit den Koordinatenachsen überein, so sind sechs unabhängige Spannungskomponenten notwendig, um den Spannungszustand vollständig zu beschreiben.

Terminologie der Spannungszustände

Beispiele von speziellen Spannungszuständen sind:

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$	Einachsige Dehnung
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0; \sigma_1 > 0$	Einachsige Kompression
$\sigma_2 = 0$	Zweiachsige (ebene) Spannung
$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$	Allgemeine dreiachsige Spannung
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$	**hydrostatischer** Spannungszustand *(hydrostatic stress)*, die deviatorischen Spannungen sind null.

Wenn p < 0 (Dehnung) ist, wird der Spannungszustand als **hydrostatische Dehnung** *(hydrostatic tension)* bezeichnet. Hydrostatische Spannungen verursachen Volumenänderungen aber keine Formänderungen im Material.
In der Geologie wird der **lithostatische Druck** *(lithostatic pressure)* oft dazu benutzt, den hydrostatischen Druck in einer Tiefe z unter der Erdoberfläche zu beschreiben, durch das Gewicht der Gesteine mit mittlerer Dichte ρ in der Gesteinssäule. Natürlicherweise entspricht dies $\rho g z$ wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist. Jedoch verlangt diese Aussage eine Einschränkung, weil sie annimmt, dass der Spannungszustand in der Tiefe z wirklich hydrostatisch ist, aufgrund der Relaxierung von allen Scherspannungen durch Kriechprozesse. Wenn der Spannungszustand nicht hydrostatisch ist und man von einem Spannungszustand durch eine Gesteinssäule der Höhe z redet, dann beschriebt man diesen gewöhnlich als:

$$\sigma_1 \approx \int_0^z \rho g.dz$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \left[\nu/(1-\nu)\right]\sigma_1$$

wobei ν die **Poissonzahl** *(Poisson's ratio)* ist.

Mittelspannung

Die **Mittelspannung** *(mean stress)* $\overline{\sigma}$ oder die **hydrostatische Spannungskomponente** p ist einfach das arithmetische Mittel der drei Hauptspannungen:

$$\overline{\sigma} = p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \sigma_{ii}/3$$

Dieser Druck ist eine invariante Grösse und ist unabhängig vom Koordinatensystem; er wird durch das Gewicht der Überlast (dem Umgebungsdruck) verursacht und ist charakterisiert durch gleiche Spannungsgrössen in alle Richtungen.

> Erinnerung, grundlegende Terminologie:
> In der Mathematik ist die Summe der Diagonalkomponenten eines Tensors, die sich bei der Drehung des Koordinatensystems nicht ändert, die **erste Invariante** *(first invariant)*.

In der Erde ist in typischer Wert ungefähr 30 MPa/km (d.h. ca. 3kbar/10km). Die Durchschnittsspannung spezifiziert folglich das durchschnittliche Niveau der normalen Spannung, die auf alle möglichen Störungsflächen wirkt und den Reibungswiderstand auf Störungsflächen regelt. Andernfalls kann die Durchschnittsspannung nur Volumenänderung produzieren, entweder um es zu verringern, wenn die Mittelspannung eine Kompression ist, oder um es zu erweitern, wenn die Mittelspannung eine Dehnung ist.

Deviatorische Spannung

Es ist schwierig Volumenänderungen in Gesteinen zu messen. Erkennbare Verformung entsteht aus einer Deformation zusätzlich zur Volumenänderung. Daher steht Verformung gewöhnlich im

Zusammenhang mit wie weit weg der Spannungszustand vom isotropen Zustand ist. Die **deviatorische Spannung** *(deviatoric stress)* drückt diesen Unterschied aus, indem die Mittelspannung vom allgemeinen Spannungstensor subtrahiert wird. Unter Berücksichtigung, dass jeder mögliche Spannungszustand als die Summe einer hydrostatischen Mittelspannung p und einer deviatorischen Spannung betrachtet werden kann:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & s_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & s_3 \end{bmatrix}$$

Da p die Mittelspannung ist, es folgt $s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Die zweite Matrix auf der rechten Seite ist der **Spannungsdeviator** *(stress deviator)*. Seine Komponenten sind die **deviatorischen Spannungen** *(deviatoric stresses)*. Der **Spannungsdeviator** *(principal deviatoric stress)* der Hauptspannungen beinhaltet die Beträge, um wieviel jede Hauptspannung von der Mittelspannung abweicht. Sie bestimmen die effektive Scherspannung, welche die Intensität des deviatorischen Anteils angibt:

$$\tau_{eff} = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\left(s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2\right) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2\right]^{1/2}$$

Die Aufspaltung in eine deviatorische Spannung s_{ij} und in eine volumetrische Spannung $\delta_{ij}\overline{\sigma}$, das Standard Kronecker Delta verwendend, wird geschrieben:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\overline{\sigma}$$

und die Normalspannung im Verhältnis zur Mittelspannung wird dann durch die deviatorische Spannung beschrieben:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\overline{\sigma}$$

Das Kronecker Delta ist eine mathematische Funktion, die als:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

definiert wird. Folglich:

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$$

$$\delta_{12}=\delta_{13}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{31}=\delta_{32}=0$$

mit anderen Worten ist die Matrix:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

Die Identitätsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In einfacheren Worten wenn $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt, kann man sich vorstellen, dass zwei Komponenten auf das Gestein einwirken:

- die Mittelspannung: $p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$
- und drei deviatorische Spannungen: $s_1 = \sigma_{11} - p$

$$s_2 = \sigma_{22} - p$$

$$s_3 = \sigma_{33} - p$$

Bemerkungen:

- Eine Änderung des hydrostatischen Druckes wirkt ausschliesslich auf die Normalkomponenten der Spannung, und lässt die Scherkomponenten unverändert.
- Alle Scherspannungen sind deviatorisch.
- Die grösste deviatorische Hauptspannung s_1 wird immer positiv und die kleinste, s_3, wird immer negativ (oder gleich null, mit Kompression positiv); die deviatorische intermediäre Spannung ist fast gleich wie die Mittelspannung. Die positive deviatorische Spannung neigt dazu, das Gestein in die Richtung ihrer Einwirkung zu verkürzen, während die negative (Zug-) deviatorische Spannung in die Richtung der relativen Verlängerung wirkt. Beachten Sie, dass der deviatorische Spannungstensor immer negative Komponenten enthält.
- Als logische Folge hinterlässt nur die deviatorische Spannung dauerhafte Verformungen in Gesteinen.

Differentialspannung

Die Differentialspannung σ_d ist die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Hauptspannung:

$$\sigma_d = (\sigma_1 - \sigma_3)$$

Sie ist im Allgemeinen für die Deformation verantwortlich, und bleibt vom hydrostatischen Druck unbeeinflusst. Ihre Grösse, zusammen mit den Eigenschaften der deviatorischen Spannungen, beeinflusst die Art und Menge der Deformation, die ein Körper erfährt. Die Differentialspannung ist ein Skalar. Sie sollte nicht mit der deviatorischen Spannung, die ein Tensor ist, verwechselt werden.

Spannung, die auf einer vorgegebenen Ebene wirkt

Im folgenden Beispiel ist es wichtig sich zu merken, dass die Spannungswerte mit der Orientierung und Intensität der auferlegten Kraft variieren, und sie ändern sich auch, wenn der Wirkungsbereich wechselt.

Eine Kraft F, die auf eine reale oder imaginäre Fläche P wirkt, wird in eine Normal- (F_N) und eine Scherkomponente (F_S) aufgeteilt. Diese Komponenten werden definiert durch:

$$F_N = F\cos\theta \qquad \text{und} \qquad F_S = F\sin\theta \qquad (2)$$

Wir nehmen weiterhin an, dass der vorherig erwähnte kubische „Punkt“ zur Fläche P gehört.

Wir zeichnen Schnitte eines Würfels bei dem die vertikale Kraft F auf die Oberseite des Würfels mit der Fläche A wirkt. F liegt in der Zeichnungsebene. Wir ignorieren jene Spannung, die zu dieser Schnittfläche orthogonal ist. Flächen werden bei dieser Betrachtung auf die Länge eines Segmentes reduziert.

Per Definition ist die Spannung die Wirkung der Kraft pro Einheitsfläche, was man sich als Intensität der Kraft vorstellen kann. Die Spannung σ auf eine Würfelfläche hat die Grösse:

Spannung = Kraft / (Fläche des Würfels)

$$\sigma = F/A$$

Durch den Würfel schneidet eine andere Ebene P, deren Normale mit einem Winkel θ zu F steht. Die Fläche der Ebene P ist:

$$P_{(\text{Fläche})} = \text{Würfel}_{(\text{Fläche})}/\cos\theta$$

$$A_P = A/\cos\theta \quad (3)$$

Somit sind die Normalkomponenten der Kraft und der Spannung, die auf die Ebene P wirken:

$$F_N = F\cos\theta = \text{Würfel}_{(\text{Fläche})}\,\sigma\cos\theta = P_{(\text{Fläche})}\,\sigma\cos^2\theta$$

und die Scherkomponenten (4)

$$F_S = F\sin\theta = \text{Würfel}_{(\text{Fläche})}\,\sigma\sin\theta = P_{(\text{Fläche})}\,\sigma\sin\theta\cos\theta$$

Aus der allgemeinen Trigonometrie ist bekannt, dass:

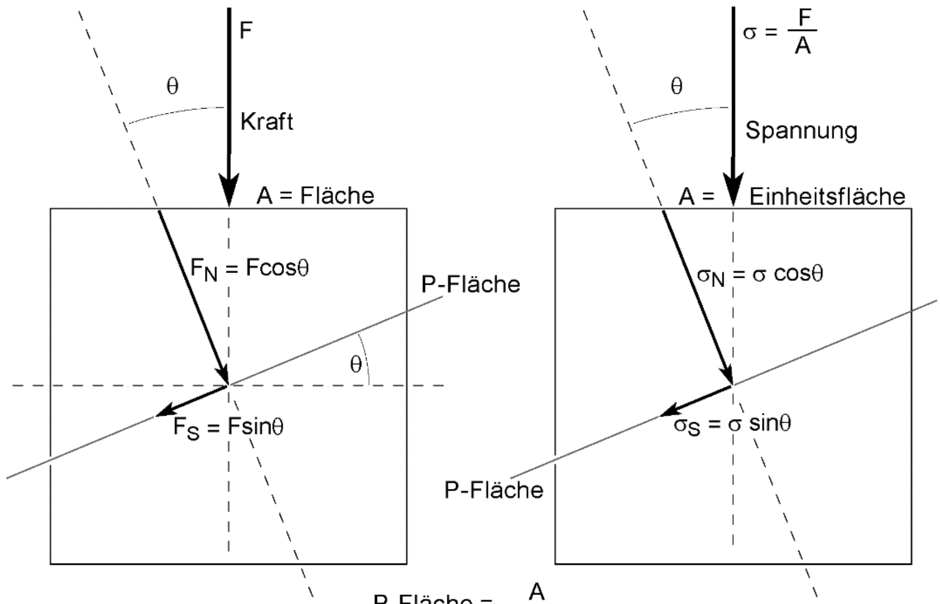
$$\sin\theta\cos\theta = (\sin 2\theta)/2$$

Der Würfel ist so beschaffen, dass A_P = Einheitsfläche = 1. Deshalb sind die Grössen der Normal- und Scherkomponenten der Spannung σ auf der P-Fläche:

$$\sigma_N = F_N/A_P = (F/A)\cos^2\theta = \sigma\cos^2\theta$$

und (5)

$$\sigma_S = F_S/A_P = (F/A)\sin\theta\cos\theta = (\sigma/2)\sin 2\theta$$



P-Fläche = $\frac{A}{\cos\theta}$

F = Aσ

F_N = Fcosθ = Aσcosθ = (P-Fläche)σcos²θ

F_S = Fsinθ = Aσsinθ = (P-Fläche)σsinθcosθ

Ein Vergleich der Gleichungen (2) und (5) zeigt, dass die Spannungen nicht als Vektoren betrachtet werden können, wie wenn sie Kräfte wären.
Typischerweise liegt jedes Gestein unter einem triaxialen Spannungsfeld; die Hauptspannungen sind σ_1, σ_2 und σ_3 mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

> Erinnerung: In der Geologie ist Kompressionsspannung positiv und die Zugspannung negativ. In der Physik und im Ingenieurbereich ist die Zugspannung positiv und die Kompressionsspannung negativ.

Aus praktischen Gründen kann man eine beliebige Fläche P im Körper nehmen, parallel zu σ_2, die wiederum parallel zur horizontalen x-Achse der kartesischen Koordinaten ist. Der Winkel θ zwischen der Linie normal zu P und der vertikalen σ_1 (parallel zur z-Koordinatenachse) ist auch der Winkel zwischen der Fläche P und σ_3. Man betrachtet das Problem durch einen zweidimensionalen Spannungszustand. So vernachlässigt man σ_2 und berücksichtigt nur die zwei-dimensionale Hauptfläche (σ_1, σ_3). Diese Vereinfachung ist konsistent mit der Aussage, dass der Unterschied zwischen σ_1 und σ_3 die Verformung bestimmt, während σ_2 nur wenig Einfluss hat, und in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Linien in dieser (σ_1, σ_3) Fläche repräsentieren Spuren von Flächen senkrecht zu dieser Fläche und parallel zu σ_2.

Deshalb kann man aufgrund von Gleichung (5) schreiben, dass die Spannungskomponenten von σ_1 die folgenden sind:

$$\sigma_{1N} = \sigma_1 \cos^2\theta$$
$$\sigma_{1S} = \sigma_1 \sin\theta\cos\theta$$

σ_3 steht im rechten Winkel zu σ_1. Die gleiche trigonometrische Beziehung löst σ_3 in ihre Komponenten auf:

$$\sigma_{3N} = \sigma_3 \sin^2\theta$$
$$\sigma_{3S} = \sigma_3 \sin\theta\cos\theta$$

Sind σ_1 und σ_3 die Hauptspannungen, ergeben sich für die Normal- und Scherspannungskomponenten auf einer Fläche, deren Normale einen Winkel θ mit σ_1 bildet, folgende Beziehungen:

$$\sigma_N = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_3 \sin^2\theta$$
$$\sigma_S = \sin\theta\cos\theta(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Aus der allgemeinen Trigonometrie weiss man auch, dass:

$$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

die man in die vorangehende Gleichung einsetzen kann, um die normale Spannungskomponente zu schreiben:

$$\sigma_N = \sigma_1\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) + \sigma_3\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)$$

und vereinfachen zu:

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\cos 2\theta(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

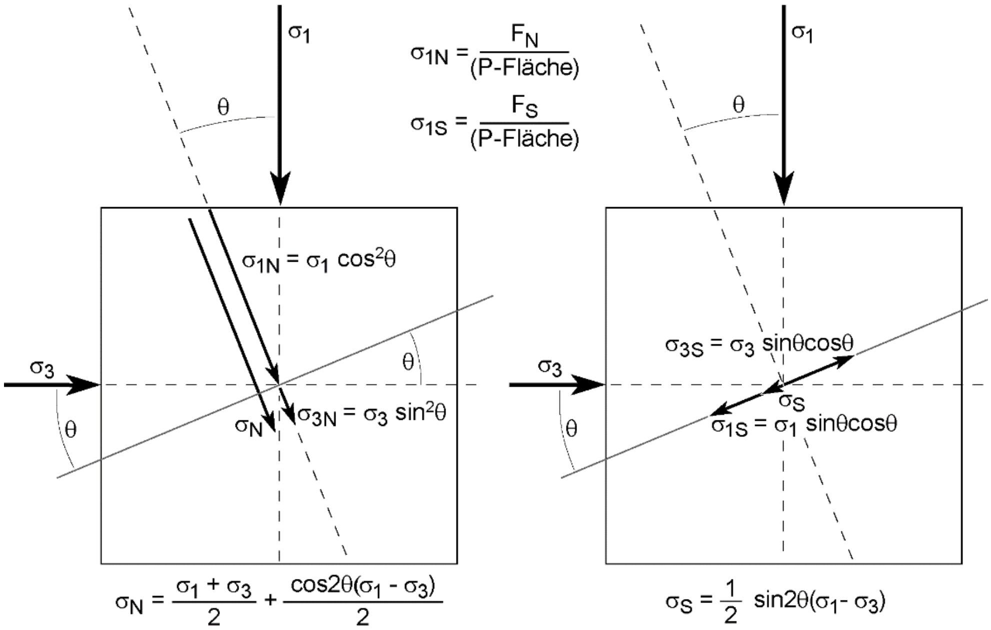
Die Scherspannungskomponente ist dann:

$$\sigma_S = \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\theta - \frac{\sigma_3}{2}\sin 2\theta$$
$$\sigma_S = \frac{1}{2}\sin 2\theta(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Wenn σ_1 und σ_3 die Hauptspannungen sind, lauten die Gleichungen für die normale Spannung und die Scherspannung durch eine Fläche, deren Normale mit dem Winkel θ zu σ_1 geneigt ist:

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta}{2}$$
$$\sigma_S = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta}{2} \qquad (6)$$

Beachte, dass (6) zu (5) wird, wenn σ_3 null ist.



Diese Gleichungen demonstrieren, dass für Ebenen maximaler Scherspannung $\sigma_{S\max}$ mit $2\theta = 90°$ gilt. Das heisst, die **Ebenen maximaler Scherspannung** sind 45° zu den Hauptnormalspannungen σ_1 und σ_3 geneigt.

In allen Fällen, in denen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gibt es nur zwei Flächen mit maximaler Scherspannung und diese schneiden sich in σ_2. Auch für den dreidimensionalen Fall beobachtet man die für das Materialversagen wichtige maximale Scherspannung an jenen Ebenen, die mit σ_1 bzw. σ_3 einen Winkel von ungefähr 45° einschliessen und in der σ_2-Achse zum Schnitt kommen. Bei Triaxialversuchen (die drei Hauptspannungen haben Magnituden ungleich Null) bilden Scherbrüche Winkel von weniger als 45° zur Hauptspannungsachse σ_1. Wo paarweise Verwerfungsflächen entstehen, die mehr oder weniger gleichzeitig entstanden sind und die beiden begünstigten Scherflächensysteme repräsentieren, spricht man von **konjugierten Brüchen**. Konjugierte Verwerfungen kreuzen sich auf einer Linie, die parallel zur intermediären Hauptspannungsachse σ_2 verläuft. Die kompressiven Normalspannungen auf diesen Flächen tendieren dazu, Gleiten auf diesen Flächen zu verhindern; Scherspannungen auf diesen Flächen begünstigen Gleiten.

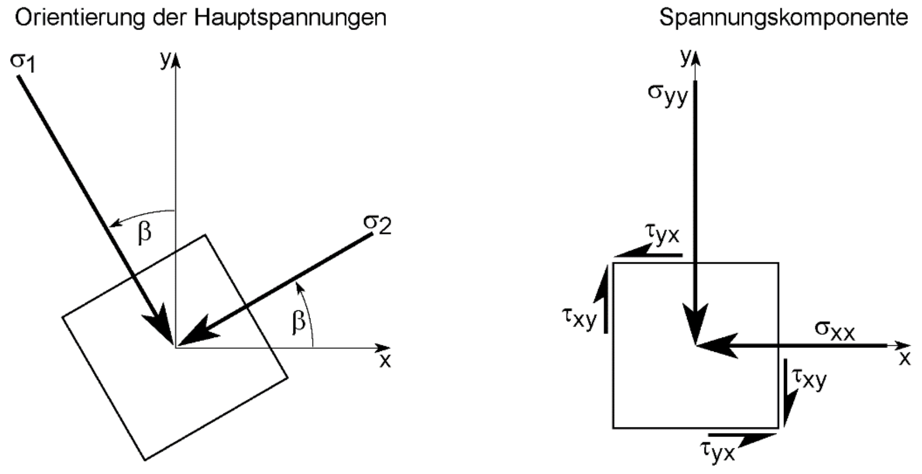
In der speziellen Situation, in der $\sigma_2 = \sigma_3$ oder $\sigma_1 = \sigma_2$ gilt, gibt es eine unendliche Anzahl solcher Flächen, die 45° gegenüber σ_1 oder σ_3 geneigt sind.

In allen Fällen hat die maximale Scherspannung die Werte $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Durch Gleichung (6) kann man auch sehen, dass es für jeden Spannungszustand mit σ_1 und σ_3 Oberflächen gibt, auf denen keine Scherkräfte wirken. Diese Eigenschaft werden wir benutzen, um die Richtungen der Hauptspannungen zu definieren.

Beziehung zwischen Normalspannung und Scherspannung: Mohr'scher Kreis

Die Hauptspannungen sind diejenigen, die orthogonal zu drei gegenseitig orthogonalen Ebenen wirken. Die Scherspannungen auf diesen drei Ebenen gehen gegen Null. Zwischen diesen speziellen Orientierungen variieren die Normal- und Scherspannungen regelmässig in Bezug auf den Rotationswinkel θ. Wie sind die Normal- und Scherspannungskomponenten mit der Richtung verbunden?



Spannungen auf einem viereckigen Punkt
im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem

Analytische Darstellung

Umstellen von σ_N in Gleichungen (6) und quadrieren beider Gleichungen ergibt:

$$\left[\sigma_N - (1/2)(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2 = \left[(1/2)(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2 \cos^2 2\theta$$
$$\sigma_S^2 = \left[(1/2)(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2 \sin^2 2\theta \tag{7}$$

Beide Gleichungen (7) ergeben, wenn addiert:

$$\left[\sigma_N - (1/2)(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[(1/2)(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2 \left(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\right)$$

und da für alle Winkel $\cos^2 + \sin^2 = 1$ erhält man:

$$\left[\sigma_N - (1/2)(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2 + \sigma_S^2 = \left[(1/2)(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2$$

worin man die Struktur einer Standardgleichung für einen Kreis erkennt, gegeben in der Koordinatenebene (x,y) mit dem Mittelpunkt bei (h,k) und Radius r:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

mit $x = \sigma_N$, $y = \sigma_S$ und $k = 0$.

Dies führt zu einer zwei-dimensional brauchbaren Darstellung der Spannungsgleichungen, bekannt als **Mohr Diagramm**.

Der Radius des Spannungskreises ist $\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$

Der Mittelpunkt des Spannungskreises auf der σ Achse liegt bei $\left(\dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)$

Zyklischer Austausch der Tiefzeichen erzeugt zwei andere Kreise für die anderen zwei Hauptdruckunterschiede, $(\sigma_2 - \sigma_3)$ und $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

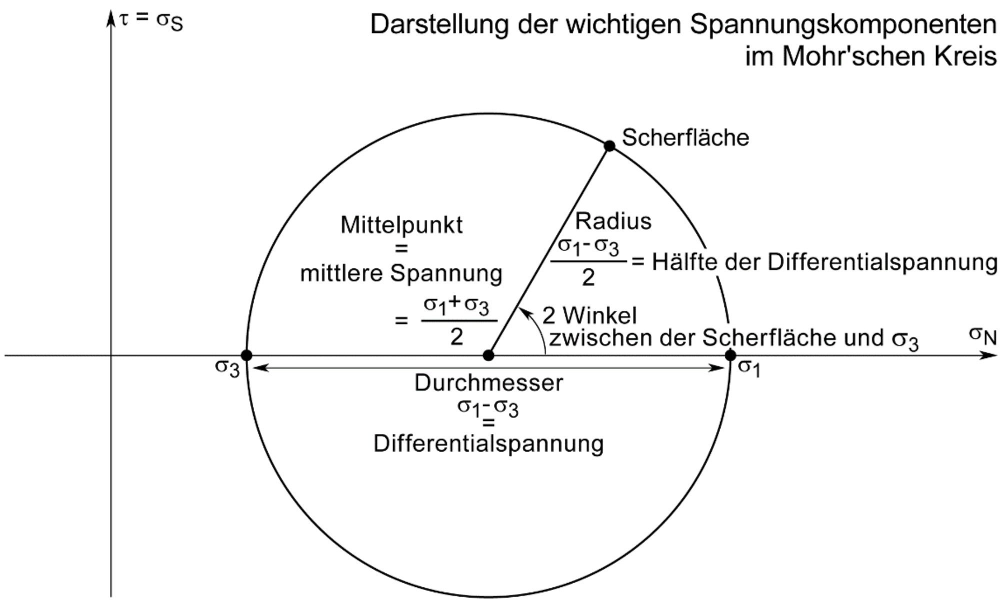
Graphische Darstellung

Die Gleichungen (6) beschreiben einen kreisförmigen Ort vom Paar σ_N und σ_S (Normal- bzw. Scherspannung), die auf Flächen beliebiger Orientierung innerhalb eines Körpers, mit bekannten Werten von σ_1 und σ_3 ausgesetzt ist, wirken. In anderen Worten, für einen gegebenen Spannungszustand σ_1 und σ_3 und eine gegebene Orientierung der betrachteten Ebene, werden die Normal- und Scherpannungen σ_N und σ_S durch einen Punkt auf dem Mohr'schen Kreis repräsentiert.

Spannung in zwei Dimensionen (ebene Spannung)

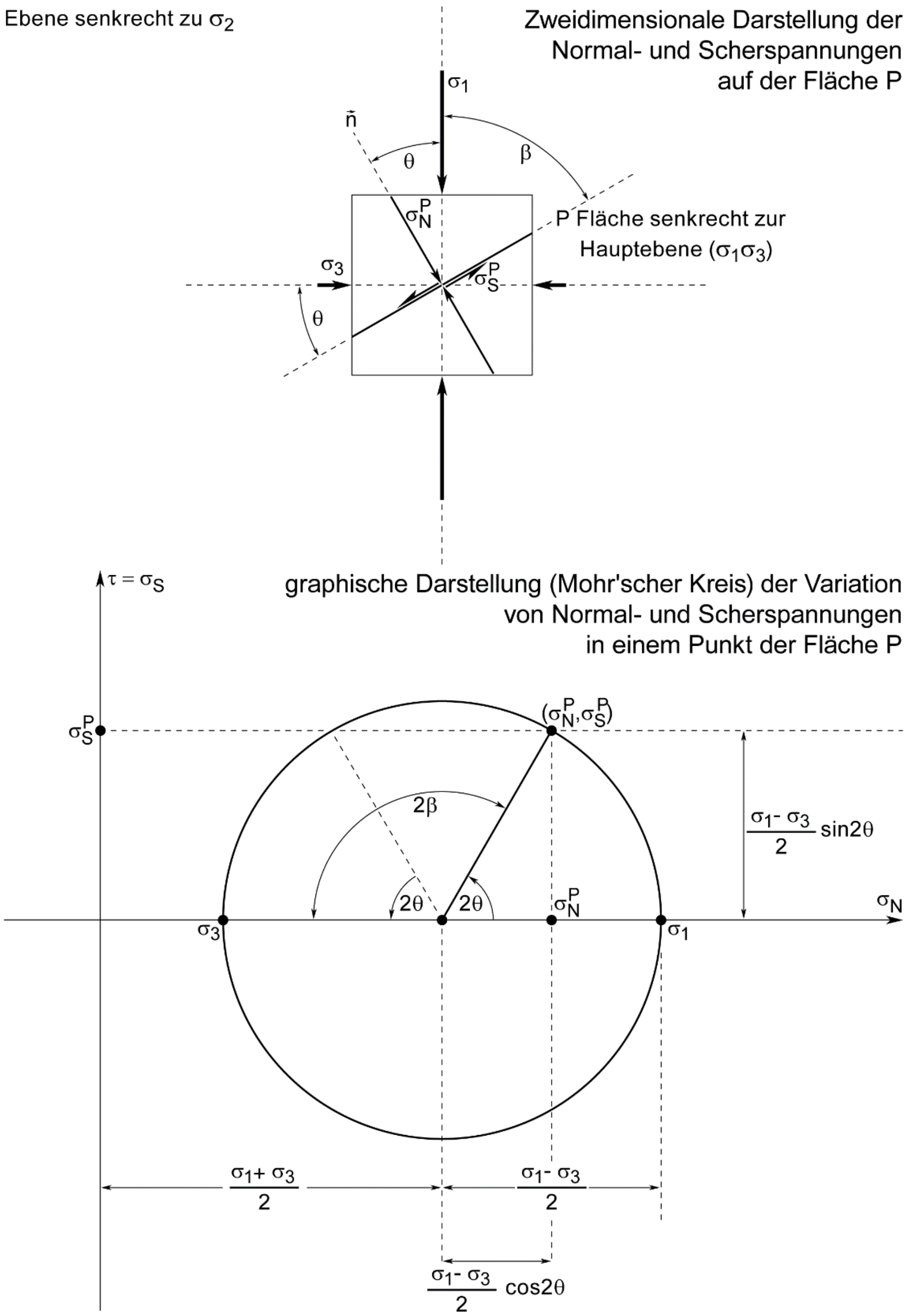
Für eine zweidimensionale Spannung können die Normal- und Scherspannung entlang zweier orthogonal, skalierter Koordinatenachsen geplottet werden, mit der Normalspannung σ_N entlang der Abszisse (horizontale x-Achse) und der Scherspannung σ_S entlang der Ordinate (vertikale y-Achse).

- Diese Achsen haben keine geographische Orientierung aber beide Achsen haben eine positive und eine negative Richtung.
- Konventionsgemäss ist die rechte Seite des Diagramms positiv für kompressive Normalspannungen. Scherspannungen mit einer Richtung im Gegenuhrzeigersinn (konsistent mit dem trigonometrischen Sinn) werden als positiv betrachtet und über der Abszisse geplottet.



mittlere Spannung = hydrostatische Komponente, die Volumenänderung erzeugt.
deviatorische Spannung = nicht-hydrostatische Komponente, die die Deformation produziert.
Differentialspannung = je grösser diese Komponente ist, desto grösser ist das Potential der Deformation.

1) Die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 eines gegebenen Spannungszustandes sind per Definition normale Spannungskomponenten; sie werden beide entlang der Abszisse mit einem Abstand vom Ursprung, der ihrem Wert entspricht, aufgetragen.
2) Ein Kreis mit Durchmesser $(\sigma_1 - \sigma_3)$ und Mittelpunkt $C = [(\sigma_1 + \sigma_3)/2]$ wird durch die Punkte σ_1 und σ_3 konstruiert. Die maximale Hauptspannung σ_1 befindet sich am rechten Ende des Kreises, die minimale Hauptspannung σ_3 am linken Ende des Kreises.



Der Kreisumfang bildet den geometrischen Ort aller möglichen Wertepaare von σ_N und σ_S. Deshalb hat jeder Punkt P auf dem Kreis Koordinaten (σ_N, σ_S) wobei σ_N und σ_S durch (6) gegeben sind und 2θ der Winkel zwischen der σ_N Achse und der Linie PC ist, gemessen im Gegenuhrzeigersinn (trigonometrisch) vom rechten Ende der σ_N Achse. Demnach, geben die Koordinaten eines Punktes P auf dem Kreis die Normalspannung σ_N (entlang der Abszisse) und die Scherspannung σ_S (entlang der Ordinate) auf einer Fläche, deren Normale (ACHTUNG: nicht die Fläche selbst) mit θ zu σ_1 geneigt ist. Aus einfachen geometrischen Gründen ist θ auch der Winkel zwischen der Bruchfläche und der geringsten Spannung σ_3. Der 2β-Winkel, der im Uhrzeigersinn von σ_3 zum PC-Radius gemessen wird, ist zweimal der Winkel zwischen σ_1 und der tatsächlichen Scherfläche.

Diese Konstruktion kann auch benutzt werden, um σ_1, σ_3 und θ zu bestimmen, wenn σ_N und σ_S auf zwei orthogonalen Flächen gegeben sind. Da die Winkel in diesem grafischen Format verdoppelt werden, ist der Punkt, der die Ebene orthogonal zu P darstellt, zum P-Punkt diametral entgegengesetzt. Der Mohrkreis kann mit Hilfe dieser zwei Punkte, verbunden durch einen Durchmesser, der die horizontale Achse in der Mitte C schneidet, konstruiert werden.

Das Mohr Diagramm erlaubt, dass Normal- und Scherspannungsgrössen von verschieden orientierten Flächen zusammen geplottet werden können. Es zeigt auch, dass:

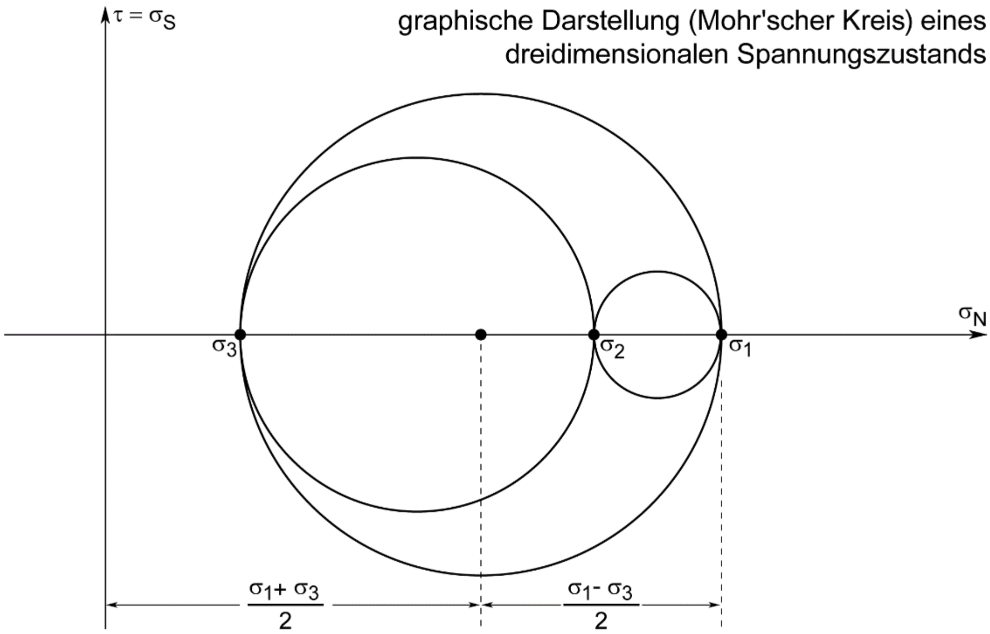
- die Punkte auf dem Kreis (d.h. die Neigung der Flächen) entlang welchen für einen gegebenen Spannungszustand die Scherspannung σ_S am grössten ist, Werten mit $\theta = \pm 45°$ entsprechen.
- die maximale Spannungsdifferenz $(\sigma_1 - \sigma_3)$ bestimmt den Wert der grössten Scherspannung σ_S weil die Differentialspannung, die dem Durchmesser des Mohrkreises entspricht, zweimal die maximale Scherspannung (der vertikale Radius des Kreises) ist. Der Radius bleibt gleich gross, ungeachtet der Koordinatenorientierung. Er ist die **zweite Invariante** *(second invariant)* des zweidimensionalen Spannungstensors.

<u>Übung</u>

Zeichnen Sie ein Mohr Diagramm der folgenden Spannungszustände: hydrostatisch, einachsig, dreiachsig.

Spannung in drei Dimensionen

Die Mohr'sche Konstruktion wird auch bei dreidimensionalen Spannungszuständen angewandt. In diesem Fall hat das Diagramm drei Kreise, zwei kleine Kreise (σ_1, σ_2) und (σ_2, σ_3) sind tangent an σ_2, innerhalb des dritten, grösseren (σ_1, σ_3) Kreis dessen linkes Ende σ_3 ist. Die drei Diagonalkomponenten σ_1, σ_2 und σ_3 des Spannungstensors sind die Normalspannungen, die entlang der horizontalen Achse geplottet werden; nicht-diagonale Komponenten sind die Scherspannungen, die entlang der vertikalen Achse geplottet werden. Alle möglichen (σ_N, σ_S)-Punkte fallen auf den grossen (σ_1, σ_3) Mohrkreis oder zwischen diesen und den (σ_1, σ_2)- und (σ_2, σ_3)-Mohrkreisen. Der Diagrammbereich zwischen diesen drei Kreisen ist der Ort von Spannungen auf Flächen aller Orientierungen in drei Dimensionen.



Mohr-Diagramme werden ausgiebig für Diskussionen über das Zerbrechen von Gesteinen benutzt weil sie graphisch die Variationen der Spannung mit der Richtung darstellen, und ermöglichen die Spannung auf bekannten schwachen Flächen zu finden.

Wirkung des Porenflüssigkeitsdrucks

Der **Flüssigkeitsdruck** *(fluid pressure)* ist jener Druck, der durch Flüssigkeiten, die in den Brüchen und Poren des Gesteins vorhanden sind, ausgeübt wird oder in diesen herrscht.

Flüssigkeitsdruck

Gesteine in Krustentiefen von mehreren Kilometern haben gewöhnlich entweder eine intergranulare oder eine Bruchporosität, aufgrund der eine Flüssigkeitssäule bis hin zur Oberfläche existieren kann. Wenn das Fluidreservoir im statischen Gleichgewicht ist, wird der Flüssigkeitsdruck P_f angenähert mit:

$$P_f = \rho_{(f)}\, gz$$

wobei $\rho_{(f)}$ die Flüssigkeitsdichte, g die Gravitationsbeschleunigung und z die Tiefe sind. Dies ist der **hydrostatische Druck** *(hydrostatic pressure),* der sich vom lithostatischen Druck unterscheidet (Gewicht der Gesteine in der gleichen Tiefe).

Übung

Berechnen Sie die Steigung des hydrostatischen Drucks für eine Säule von reinem Wasser, und die des lithostatischen Drucks.

In der Praxis sind die gemessenen Flüssigkeitsdrücke gelegentlich weniger, aber sehr oft grösser als der Betrag des normalen hydrostatischen Drucks. Flüssigkeiten mit Überdruck werden einem oder mehreren Mechanismen zugeschrieben, wie der Kompaktion von Sedimenten, der diagenetischen / metamorphen Dehydratisierung von Mineralien oder artesischer Zirkulation. Tektonische Spannungen in aktiven Gebieten können auch den interstitialen (Räume zwischen Kristallen) Wasserdruck erhöhen. Kohlendioxid, abgegeben vom Mantel oder anderen Quellen, ist ein Fluid mit üblicherweise anormalem Druck.

Effektive Spannung

Das **gesamte Spannungsfeld** *(total stress field)* in einem porösen Gestein kann durch Normal- und Scherkomponenten einer Fläche spezifiziert werden. Das Gestein und die dazwischenliegende Flüssigkeit machen zusammen die gesamten Normalspannungs- und Scherspannungskomponenten aus. Der Tensor der Gesamtspannungen (Gleichung 1) drückt das gesamte Spannungsfeld aus:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

in dem die Spannungen aufgrund der Flüssigkeit ebenfalls neun Komponenten haben:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

wobei:

$$p_{ii} = p_{jj} = p$$
$$p_{ij} = p_{ji} = 0$$

da die normalen (hydrostatischen) Drücke in allen Richtungen gleich sind und Scherspannungen der Flüssigkeiten vernachlässigt werden, da sie viel kleiner als die im Feststoff sind. Daraus ergibt sich eine quadratische, isotrope Matrix, die nur Werte die entlang der Diagonalen ungleich null sind, enthält:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

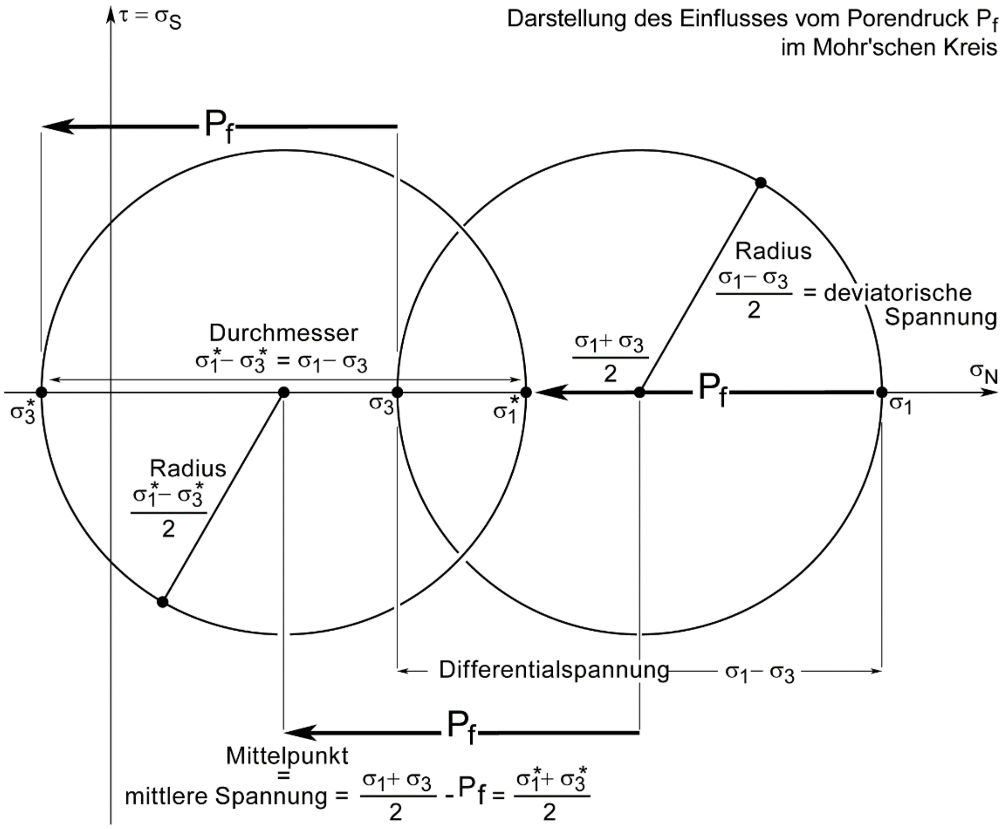
Die **effektive Spannung** *(effective stress)* ist der Unterschied zwischen der Gesamtspannung und dem Flüssigkeitsdruck $P_f = p$:

$$\sigma_{eff} = \sigma_{tot} - P_f$$

Die effektiven Hauptspannungen σ_1^{eff}, σ_2^{eff} und σ_3^{eff} betreffen nur den festen Teil des porösen Mediums.

Änderung des Umgebungsdruckes

Enthält ein Material Flüssigkeit unter einem Druck P_f, wirkt dieser Druck gleichmässig in alle Hauptspannungsrichtungen einer angewandten Last entgegen. Deswegen werden die Werte aller Normalspannungen auf irgendeiner Fläche um den Wert des Porendrucks P_f reduziert. Die Werte aller Scherspannungen bleiben gleich, was zeigt, dass diese von den hydrostatischen Komponenten unabhängig sind. In Gesteinen entspricht dies der Verringerung/Verkleinerung des Umgebungsdruckes.



ein hoher Porendruck reduziert alle Normalspannungen

Die **effektive Mittelspannung** *(effective mean stress)* ist die Differenz zwischen der Mittelspannung und dem Flüssigkeitsdruck:

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma_1^{eff} + \sigma_2^{eff} + \sigma_3^{eff}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} - P_f = \bar{\sigma} - p$$

Bezogen auf den Mohr'schen Kreis, versetzt ein Wechsel der gesamten Normalspannung $(\sigma_1 + \sigma_3)$ den Kreis entlang der Abszisse um den Wert P_f, ohne dabei seinen Durchmesser zu verändern, d.h. der Kreis wandert nach links, in Richtung zu den kleineren Werten der Normalspannung und behält seine Grösse bei. Bei einer Abnahme des Porendruckes würde sich der Kreis nach rechts bewegen.

Spannungsellipsoid

Das Spannungsellipsoid ist eine graphische Methode, die sechs Parameter des Spannungstensors darzustellen:

- die drei Intensitäten der Hauptspannungen;
- die drei zueinander senkrechten Richtungen der Hauptspannungen.

Die grösste und kleinste Hauptspannung stellen die Maxima und Minima aller Oberflächenspannungen dar, die auf Flächen beliebiger Orientierung durch einen Punkt wirken.

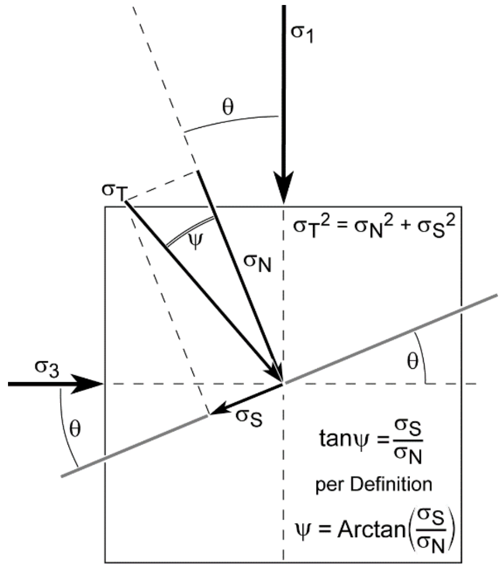
Numerischer Ansatz in zwei Dimensionen

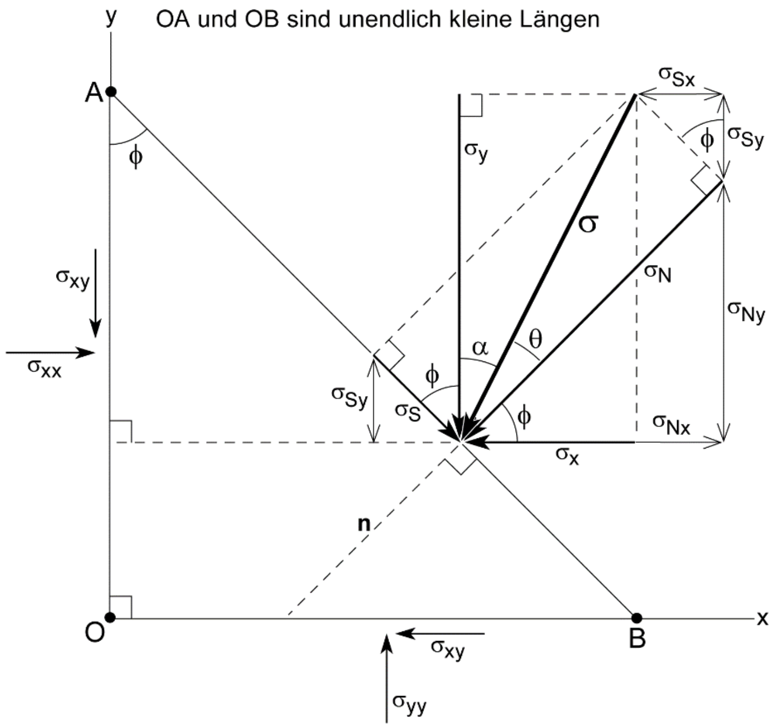
Das Spannungssystem wird zunächst auf eine Deformation in einer zweidimensionalen Fläche beschränkt.

Übung

** Nehmen Sie einen Punkt O auf einer horizontalen Fläche P.*
Eine vertikale Spannung von 100 MPa und eine horizontale Spannung von 50 MPa wirken in O.

** Bestimmen Sie mit einem Taschenrechner und der unteren Skizze die Absolutwerte der Spannungen auf Flächen, die mit 5° Schritten gegenüber O geneigt sind.*
** Machen Sie getrennte Berechnungen für die Normal-, Scher- und Gesamtspannungen.*
** Beschreiben Sie die Variation der Spannungsgrössen als Funktion ihrer Orientierung.*





Geometrische Beziehung zwischen den Komponenten des Spannungsvektors und den Komponenten des Spannungstensors

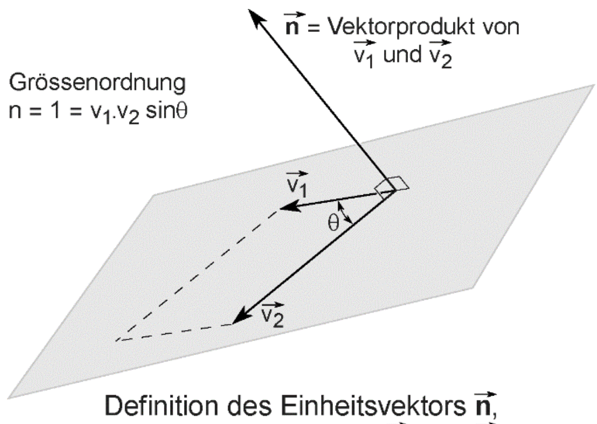
Es entsteht eine Ellipse für die gesamte Spannung, die Spannungsellipse genannt wird, demzufolge eine Reduktion des Spannungsellipsoids.
Wir können uns die gleiche Übung vorstellen:
- auf einer vertikalen Fläche, in der die vertikale Spannung 100 MPa beträgt und die horizontale Spannung einen intermediären Wert von 75 MPa hat.

- auf einer horizontalen Fläche, in der die Intensitäten der zwei zueinander senkrechten Spannungen 75 bzw. 50 MPa sind.

Die Kombination dieser drei Spannungsellipsen um O legt das Spannungsellipsoid fest.

Analytischer Ansatz

Wir betrachten nun die Komponenten σ_x , σ_y und σ_z einer Spannung σ die auf eine Fläche P wirkt, wobei die Koordinatenrichtungen in einem kartesischen Koordinatensystem durch Ox, Oy und Oz (vertikal) gegeben sind.



Definition des Einheitsvektors $\vec{n}$, senkrecht zur Ebene, welche $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ enthält

Die Orientierung der P-Ebene ist durch den Normaleinheitsvektor **n** festgelegt. Die Richtung der Linie OP, und damit die Richtung der Fläche P wird konventionell durch **Polarkoordinaten** *(spherical coordinates* = Koordinaten, die Positionen auf einer Kugel beschreiben) von **n** ausgedrückt:

$$\begin{cases} n_x = \sin\theta.\cos\varphi \\ n_y = \sin\theta.\sin\varphi \\ n_z = \cos\theta \end{cases} \tag{8}$$

Die Polarrichtungen sind gleich den Kosinusrichtungen $\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\theta\}$ direkt ableitbar aus den Winkeln zwischen der Flächennormalen und den Koordinatenachsen. Da **n** ein Einheitsvektor ist, müssen diese Komponenten die Bedingung der Einheitslänge erfüllen:

$$n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2 = 1 \tag{9}$$

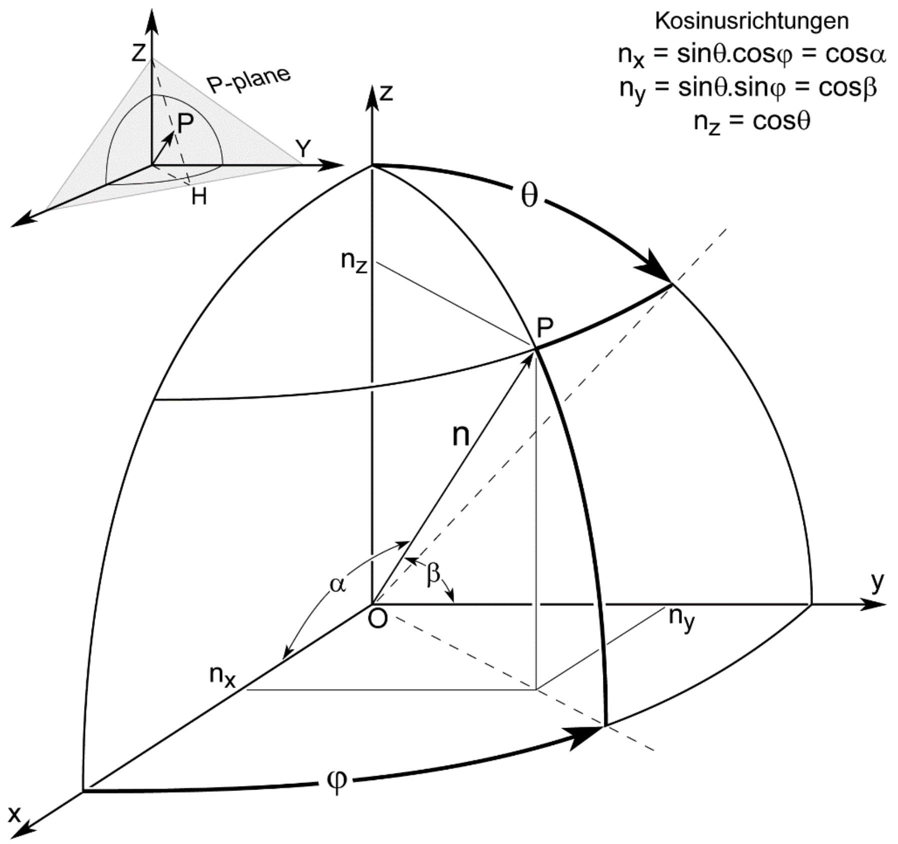
Jetzt betrachtet man einen unendlich kleinen Tetraeder, der begrenzt ist durch die Fläche P und durch jene drei anderen dreieckigen Flächen, welche die Koordinatenachsen enthalten. Die Fläche schneidet die Achsen Ox, Oy und Oz an den Punkten, X, Y und Z. Das Dreieck XOY ist die Projektion parallel zu Oz der Deckfläche XYZ auf die xOy-Ebene. Die Grösse der XYZ-Flächenelemente ist:

(1/2).(Basis XY * Höhe ZH)

Die Grösse des XOY-Flächenelementes ist:

(1/2).(Basis XY * Höhe OH)

Das Verhältnis zwischen den zwei Flächen ist gleich dem Verhältnis OH/ZH, wobei OH und ZH die beiden Seiten vom gleichen Dreieck sind, die einen rechten Winkel in O haben. Ein geometrischer Aufbau innerhalb der Fläche ZOH zeigt, dass OH/ZH = $\cos\theta = n_z$. Eine ähnliche Argumentation zeigt, dass für die Projektion von XYZ auf die beiden anderen Koordinatenflächen, die Proportionalitätsfaktoren α (Projektion parallel zu Ox) und β (Projektion parallel zu Oy) resultieren.



Komponenten des Einheitsvektors **n** senkrecht zur P-Ebene, die an P tangent zur Einheitssphäre ist

Jetzt betrachten wir das nötige Kräftegleichgewicht im Tetraeder, das von der Fläche P und den drei anderen dreieckigen Flächen, welche die Koordinatenachsen enthalten, umschlossen wird. Kräfte, die auf eine der Fläche des Tetraeders wirken, werden in eine Normalkraft und in zwei Scherkräfte zerlegt.

$$\begin{matrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yy} & \Phi_{yx} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zz} & \Phi_{zx} & \Phi_{zy} \end{matrix}$$

Wir nehmen XYZ als Einheitsfläche auf der die angewandte Kraft F/1 gleich einem Druckvektor **T** ist. Dessen Komponenten T_x, T_y und T_z sind zu den Koordinatenachsen parallel. **T** wird dann durch die einfache vektorielle Summe bestimmt, wobei die Kosinus-Richtungen die Vektorkomponenten gewichten:

$$\mathbf{T} = T_x \cos\alpha + T_y \cos\beta + T_z \cos\theta \tag{10}$$

Diese drei Komponenten werden durch die Kraftbestandteile ausgeglichen, die in der gleichen Richtung auf die drei anderen Flächen wirken. Zum Beispiel:

$$(\text{area} = 1) T_x = \Phi_{xx} + \Phi_{yx} + \Phi_{zx} \tag{11}$$

Die Flächen der Koordinatenebenen, die in Bezug auf die XYZ-Einheitsfläche oben errechnet wurden sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\theta$. Per Definition sind Kraftkomponenten Φ_{ij} gleich den Spannungskomponenten σ_{ij} und Scherkomponenten τ_{ij} multipliziert mit der Grösse der Fläche, auf die sie wirken. Deshalb kann man alle Kraftkomponenten schreiben als:

$$\Phi_{xx} = \alpha\,\sigma_{xx} \qquad \Phi_{xy} = \alpha\,\tau_{xy} \qquad \Phi_{xz} = \alpha\,\tau_{xz}$$
$$\Phi_{yy} = \beta\,\sigma_{yy} \qquad \Phi_{yx} = \beta\,\tau_{yx} \qquad \Phi_{yz} = \beta\,\tau_{yz}$$
$$\Phi_{zz} = \gamma\,\sigma_{zz} \qquad \Phi_{zx} = \gamma\,\tau_{zx} \qquad \Phi_{zy} = \gamma\,\tau_{zy}$$

Das Beispiel (10) wird:

$$T_x = n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} \tag{12}$$

Die Abwesenheit von Rotation impliziert, dass $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, und Gleichung (11) wird:

$$T_x = n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} \tag{13}$$

Mit ähnlichen Gleichgewichtsargumenten entlang der anderen Richtungen, sind die Koordinatenachsen des Spannungsvektors T in Bezug auf **n**:

$$\begin{cases} T_x = \sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \\ T_y = \tau_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z \\ T_z = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{cases}$$

Diese 3 linearen Gleichungen werden in Matrixdarstellung geschrieben:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{14}$$

Die 3 x 3 Spannungsmatrix, die linear jeden Spaltenvektor n in einen anderen Spaltenvektor **T** umwandelt, ist ein **Spannungstensor** *(stress tensor)* zweiter Stufe. Er verbindet jede mögliche gegebene Fläche mit ihrem dazugehörigen Spannungsvektor, und wird in einer verkürzten Art als Cauchy's Formel geschrieben:

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$$

Die Magie dieser Formel: Multipliziert man den als einfache Matrix behandelten Spannungstensor mit einem Einheitsvektor n_j, der normal zu einer bestimmten Ebene ist, erhält man die Zugkraft, die auf diese Ebene wirkt.

Erinnern Sie sich: Wenn **A** und **B** zwei rechteckige Reihen von Variablen sind, wird ihr Produkt **C** definiert als:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A.B}$$

Wobei das Element c_{ij} von **C** errechnet wird durch Multiplikation der i^ten^ Reihen von **A** mit der j^ten^ Spalte von **B** und die einzelnen Elemente summiert:

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

AB ist definiert nur wenn die Breite (Spaltenzahl) von **A** gleich der Höhe (Zahl von Reihen) von **B** ist und wenn **AB≠BA** ist. Ausserdem bedeutet **AB=0** nicht, dass entweder **A** oder **B** eine null Matrix ist.

Diese geometrische Parallelogrammkonstruktion und Gleichung (13) zeigen, dass die Normalspannung σ entlang der Fläche mit der Normalen **n** gegeben ist durch:

$$\mathbf{T.n} = T_x n_x + T_y n_y + T_z n_z$$
$$\sigma = n_x^2\sigma_x + n_y^2\sigma_y + n_z^2\sigma_z + 2\left(n_y n_z \tau_{yz} + n_x n_z \tau_{zx} + n_x n_z \tau_{xy}\right) \tag{15}$$

während die zugehörige Scherspannung:

$$\tau^2 = \mathbf{T}^2 - \sigma^2$$

beträgt.
Wir sind daran interessiert, die geometrische Darstellung der Spannungsänderung mit der Richtung zu finden. Die Theorie kann am besten für ein zwei dimensionales Spannungssystem gezeigt werden, wobei der Winkel xOP = θ. Dann gilt $n_x = \cos\theta$, $n_y = \sin\theta$ und $n_z = 0$. Gleichung (9) wird zu:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta\cos\theta$$

In der vertikalen Fläche xOP, mit σ parallel zur horizontalen Achse Ox, sind die einzigen Kräfte, die auf das Tetraeder (Prisma in 2D) in Richtung Ox wirken σ_x * (Fläche von *P*) und σ_1 * (Fläche von xOz). Diese Kräfte müssen im Tetraeder im Gleichgewicht sein, so dass:

$$\sigma_x = \sigma_1 \text{ (Fläche von xOz / Fläche von } P\text{)}$$

Nachdem nun

$$\text{Fläche von xOz} = n_x * \text{(Fläche von } P\text{)},$$

(Flächen sind in 2D auf Linien projiziert) erhält man:

$$\sigma_x = n_x \sigma_1$$

und mit ähnlichen Argumenten

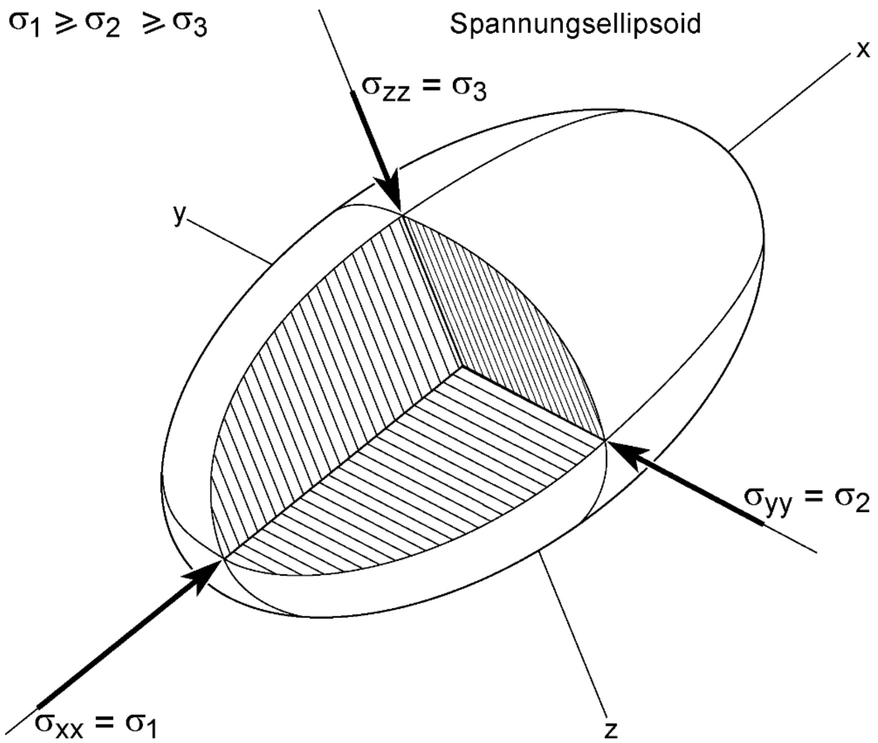
$$\sigma_y = n_y \sigma_2$$

$$\sigma_z = n_z \sigma_3$$

Substituieren der Kosinusrichtungen aus (9) ergibt:

$$\left(\sigma_x^2 / \sigma_1^2\right) + \left(\sigma_y^2 / \sigma_2^2\right) + \left(\sigma_z^2 / \sigma_3^2\right) = 1 \qquad (16)$$

Gleichung (16) ist die Gleichung eines Ellipsoids, das im Ursprung zentriert ist und dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind. Dieses **Spannungsellipsoid** *(stress ellipsoid)* ist eine graphische Darstellung der Spannung.



Die Hauptachsen dieses Ellipsoids sind die **Hauptachsen der Spannung** *(principal axes of stress)*, die senkrechten Richtungen zu Flächen mit keiner Scherspannung sind. Die Richtung und Grösse eines Radiusvektors des Spannungsellipsoids gibt eine komplette Darstellung der Spannung auf einer Fläche, die mit diesem Radiusvektor verbunden ist. Der Radiusvektor ist:

$$s = \sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2}$$

Beachte, dass i.A. die Fläche, die zu einem gegebenen Radiusvektor gehört, nicht normal zu diesem ist.
Wegen der Symmetrie des Ellipsoids gibt es immer drei senkrechte Richtungen (die Hauptachsen)in denen **T** und **n** dieselbe Richtung haben. Nun ist die Normalspannung (15) auf einer Fläche, deren Normale den Richtungskosini $\{n_x; n_y; n_z\}$ hat, gegeben durch:

$$\sigma = n_x{}^2\sigma_1 + n_y{}^2\sigma_2 + n_z{}^2\sigma_3$$

Die Grösse der Scherspannung auf dieser Fläche ist:

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2\, n_x{}^2 n_y{}^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\, n_y{}^2 n_z{}^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\, n_z{}^2 n_x{}^2$$

Wenn diese Richtungen als Koordinatenachsen genommen werden, sind alle Scherkomponenten gleich null. Der Spannungstensor (aus Gleichung 13) vereinfacht sich zu:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Spannungsellipsoid – Spannungstensor

Die numerisch erzeugte Ellipse stellt einen Abschnitt des **Spannungstensors** *(stress tensor)* mit einer elliptischen Form in einer speziellen Hauptfläche dar. Der Spannungstensor ist kein einzelner Vektor. Er bezieht die gesamte Ansammlung von Spannung ein, die an jeder Fläche mit jeder denkbaren Orientierung wirkt und einen bestimmten Punkt in einem Körper, das Zentrum des Ellipsoids, zu einer bestimmten Zeit durchläuft.
Um den Spannungstensor zu beschreiben, braucht man die Orientierung, Grösse und Form des Spannungsellipsoids. Das wird gewöhnlich gemacht, indem man die Orientierung und Länge der drei Hauptachsen des Spannungsellipsoids bestimmt. Wenn man den Spannungstensor in jedem Punkt innerhalb eines Körpers definieren kann, kann man das gesamte Spannungsfeld beschreiben, das die gesamte Sammlung der Spannungstensoren ist. Diese Übung ist ein fundamentaler Ansatz für die Bestimmung der Beziehung zwischen Spannung und Verformung.

Spannungsfeld

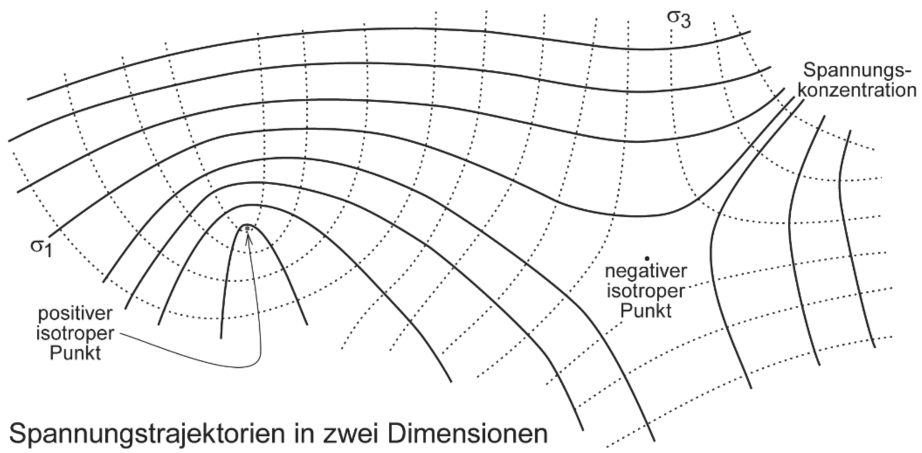
Wenn Oberflächenkräfte auf einem beliebigen Körper wirken, variieren die resultierenden Spannungen innerhalb des Körpers im Allgemeinen in Richtung und Intensität von Punkt zu Punkt. Die Verteilung aller Spannungen in allen Punkten wird als das **Spannungsfeld** *(stress field)* beschrieben. Das Spannungsfeld kann entweder als ein Satz von Spannungsellipsoiden oder als ihre Spannungsachsen oder als Spannungstrajektorien beschrieben werden. Wenn Normal- und Scherkomponenten in allen Punkten gleich sind, d.h. gleiche Magnitude und Orientierung haben, ist das Spannungsfeld **homogen**. Ansonsten ist es **inhomogen** was in der Geologie häufig der Fall ist. Die relative Gleichförmigkeit der Spannungsorientierungen und der relativen Spannungsgrössen fällt auf und ermöglicht eine Karte der regionalen Spannungsfelder zu zeichnen.

Schauen Sie sich dazu die **World Stress Map** an: http://dc-app3-14.gfz-potsdam.de/

Zwei oder mehr Spannungsfelder verschiedenen Ursprungs können sich überlagern. Dies ergibt ein **kombiniertes Spannungsfeld** *(combined stress field)*. Die Ursprünge der Spannungen sind vielfältig und infolgedessen verteilt sich die Spannung ungleich innerhalb der Erdlithosphäre. Die grössten Magnituden werden innerhalb oder nahe den Regionen erreicht, in denen die verursachenden Kräfte auftreten. Die Spannung vermindert sich graduell infolge der Elastizität und der Kriechenergie, die bei Verformung verbraucht werden. Der **Spannungsgradient** *(stress gradient)* ist die Rate, mit der sich die Spannung in eine bestimmte Richtung erhöht, zum Beispiel mit zunehmender Tiefe mit einem normalen hydrostatischen Gradienten = 10 MPa/km und einem lithostatischen Überlastgradienten von 23 MPa/km. Kurven von gleichen Druckgrössen (Spannungskonturen) illustrieren solche Gradienten. In der Lithosphäre ergeben sich Spannungen aus Kräften, die von Punkt zu Punkt übermittelt werden. Das Kennen der Grösse und der Orientierung der Hauptspannungen an irgendeinem Punkt ermöglichen die Berechnung der Normal- und Scherkomponenten auf jeder möglichen Fläche, die durch diesen Punkt geht.

Spannungstrajektorien

In zwei Dimensionen, d.h. auf einer gegebenen Oberfläche (z.B. in einem Kartenbild) sind die **Spannungstrajektorien** *(stress trajectories)* virtuelle Linien mit der Eigenschaft, dass die Richtungen der Hauptachsen Tangenten zu diesen Linien in allen Punkten sind und die gleichen Spannungsachsen an diesen Punkten verbinden. Z.B. bestimmt eine Gruppe von Linien die Richtung der maximalen Hauptspannungen und die zweite, die der minimalen Hauptspannungen. Die beiden Gruppen sind überall rechtwinklig zueinander. Die einzelnen Trajektorien der Hauptspannungen können gebogen sein, müssen sich aber in irgendeinem Punkt immer rechtwinklig schneiden. Deshalb porträtieren die Spannungstrajektorien die Variation der Spannung innerhalb eines Körpers.
Benachbarte Trajektorien, die sich einander annähern, zeigen Spannungskonzentration an.
Punkte, an denen die Hauptspannungen gleich sind, sind **isotrope Punkte** *(isotropic points)*. Verflochtene Trajektorien verbinden positive isotrope Punkte; trennende Trajektorien definieren negative isotrope Punkte.
Punkte, an denen die Hauptspannungen alle null sind, sind **einzigartige Punkte** *(singular points)*.



Spannungstrajektorien in zwei Dimensionen

Gleitlinien

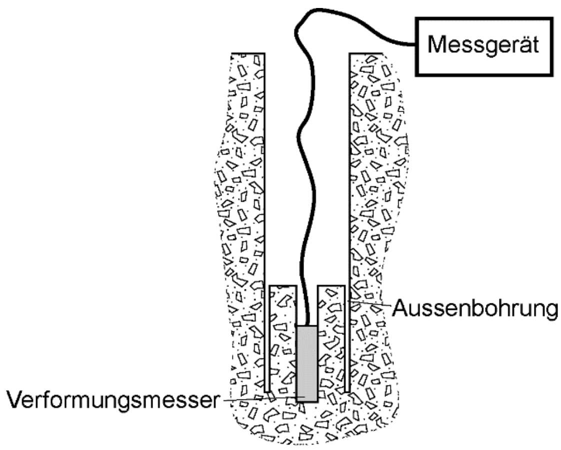
Kennen wir die Trajektorien der Hauptspannung, sind die möglichen Scherflächen in jedem Punkt des Spannungsfeldes die Oberflächentangenten zur Richtung der maximalen Scherspannung an diesen Punkten. Spuren von möglichen Scherflächen sind **Gleitlinien** *(slip lines)*. In zwei Dimensionen stellen zwei Sätze von Linien Kurven von rechtsinnigen und linkssinnigen Scherrichtungen dar. Sie laufen in Richtung zu den isotropen Punkten zusammen.

Messen von Spannungen

Die Beweggründe Spannungen zu messen, kamen aus der Ingenieurgeologie, Exploration und aufgrund von geologischen Gefahren. Wenn Minen oder Bohrlöcher gegraben oder ausgehoben werden, werden die Spannungen, die vorher durch die jetzt weggenommenen Gesteine gestützt wurden, sofort auf die umgebenden Gesteine übertragen. Die resultierende Spannungskonzentration wird gut mit der elastischen Theorie erklärt. Entlastung der Spannung ergibt die Verformung, vorausgesetzt dass die elastischen Konstanten der intakten Gesteine bekannt sind. Spannungsmessungen werden indirekt durch das Messen des Gesteinsverhaltens unter Spannungseinfluss um Minen oder Bohrlöcher vorgenommen.
Die zwei Hauptmethoden um in-situ Spannungen rund um Spannungskonzentrationen in oberflächennahen Bohrlöchern zu messen, sind **Überkernung** *(overcoring)* und **Hydraulische Bruchbildung** *(hydrofracturing)*.

Elastische Verformung: Überkernung und Ausbruch

Beim Überkernen wird eine kleine ringförmige Bohrung gebohrt in der ein Feindeformationsmesser (Dehnungsmessstreifen) auf der Unterseite installiert wird. Nachfolgend wird eine tiefere, koaxiale und ringförmige Bohrung, um und mit einem internen Radius kleiner als die erste Bohrung, gebohrt. Dieses Verfahren befreit den Gesteinszylinder mit dem Messgerät von regionalen Spannungen. Die nachfolgende elastische Verformung des inneren kreisförmigen Gesteinszylinders zu einem elliptischen Zylinder definiert die Richtung der horizontalen Spannungen, wobei die lange Achse der Ellipse parallel zur maximalen horizontalen Hauptspannung ist (grössere Entspannung entlang der Richtung von maximaler Kompression). Diese Verformung kann in eine Spannungsgrösse umgewandelt werden, wenn die elastischen Eigenschaften des Gesteins bekannt sind.



Grundregel der Spannungsmessung durch die Überkernung

Nach der Bohrung kann eine kreisförmige Bohrung als Reaktion auf Belastungen in den umliegenden Gesteinen elliptisch (Ausbruch) werden. Die Längsachse der Ellipse liegt dabei parallel zur minimalen horizontalen Spannung.

Hydraulische Rissbildung

Bei der **hydraulischen Rissbildung** *(hydraulic fracturing)* wird eine unter Druck gesetzte Flüssigkeit in einen kurzen abgedichteten Teil einer Bohrung gepumpt. Der **Injektionsdruck bei Rissbildung** *(breakdown pressure)* ist der Flüssigkeitsdruck, der erfordert wird, um Extensionsbruchbildung an der Wand des Bohrlochs zu verursachen. Bruchbildung tritt auf, wenn dieser Druck gleich der Dehnfestigkeit σ_T des Gesteins ist, die der minimalen horizontalen effektiven Hauptspannung $\overset{*}{\sigma}_{h,eff}$ entspricht:

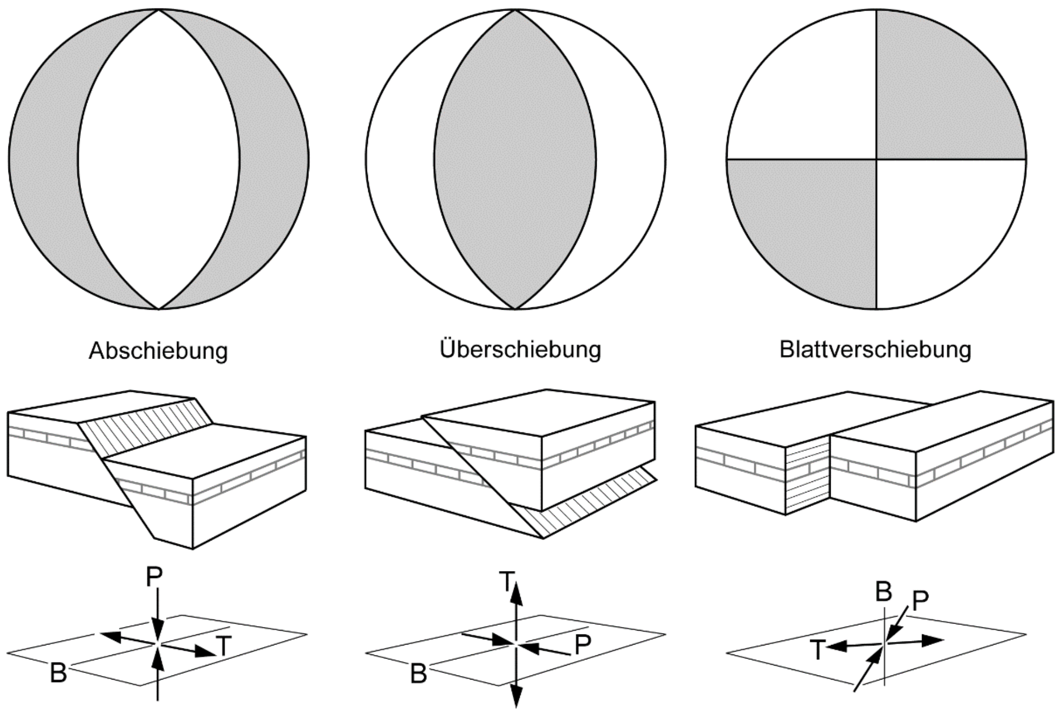
$$\overset{*}{\sigma}_{h,eff} = -\sigma_T$$

Das Konzept setzt voraus, dass eine Hauptspannung vertikal ist (Bedingung nahe der Oberfläche) und mit dem vertikalen Bohrloch übereinstimmt. Die Grösse der vertikalen Spannung σ_V ist offenbar das Gewicht der darüberliegenden Gesteine. Das Ziel ist, die Grössen der grösseren (σ_H) und kleineren (σ_h) Hauptspannungen und ihre Orientierung in der Horizontalebene zu finden. Die hydraulische Rissbildung nimmt an, dass sich die Risse senkrecht zur minimalen horizontalen Hauptspannung bilden. Folglich gibt die Messung der Orientierung der geschaffenen hydraulischen Risse und des Injektionsdrucks bei Rissbildung einen Hinweis zum Spannungstensor.
Jedoch kann man mit dieser Technik nicht die Richtungen der Hauptspannungsachsen berechnen. Tatsächlich hängt der Beginn der hydraulischen Rissbildung auch von den Druckregimen und von der Orientierung des Bohrlochs ab.
Sobald die Einspritzung aufgehört hat, wird der Riss zu einem Durchgang vom gebohrten Reservoir zum Bohrloch für Kohlenwasserstoffgas oder Wasser und erlaubt so eine erhöhte Produktion. Die hydraulische Rissbildung ist eine praktische Technik für Kohlenwasserstoffförderung aus Reservoirs mit einer niedrigen Permeabilität.

Erdbebenlösungen

Die Achsen P (für die Kom**P**rimierung, bewegt sich der Boden in Richtung der seismischen Station), B und T (Dila**T**ation, Bewegung weg von der seismischen Station) der im Erdbeben freigegebenen elastischen Verformung, sind annähernd gleich den aktiven Hauptspannungsrichtungen s_1, s_2 beziehungsweise s_3, wenn ein Erdbeben mit der Verwerfungsbewegung übereinstimmt (Vorlesung: Bruchbildung). Das ist der Fall für eine nahezu optimale Orientierung der Verwerfung für die Reaktivierung in Bezug auf das regionale Spannungsfeld.

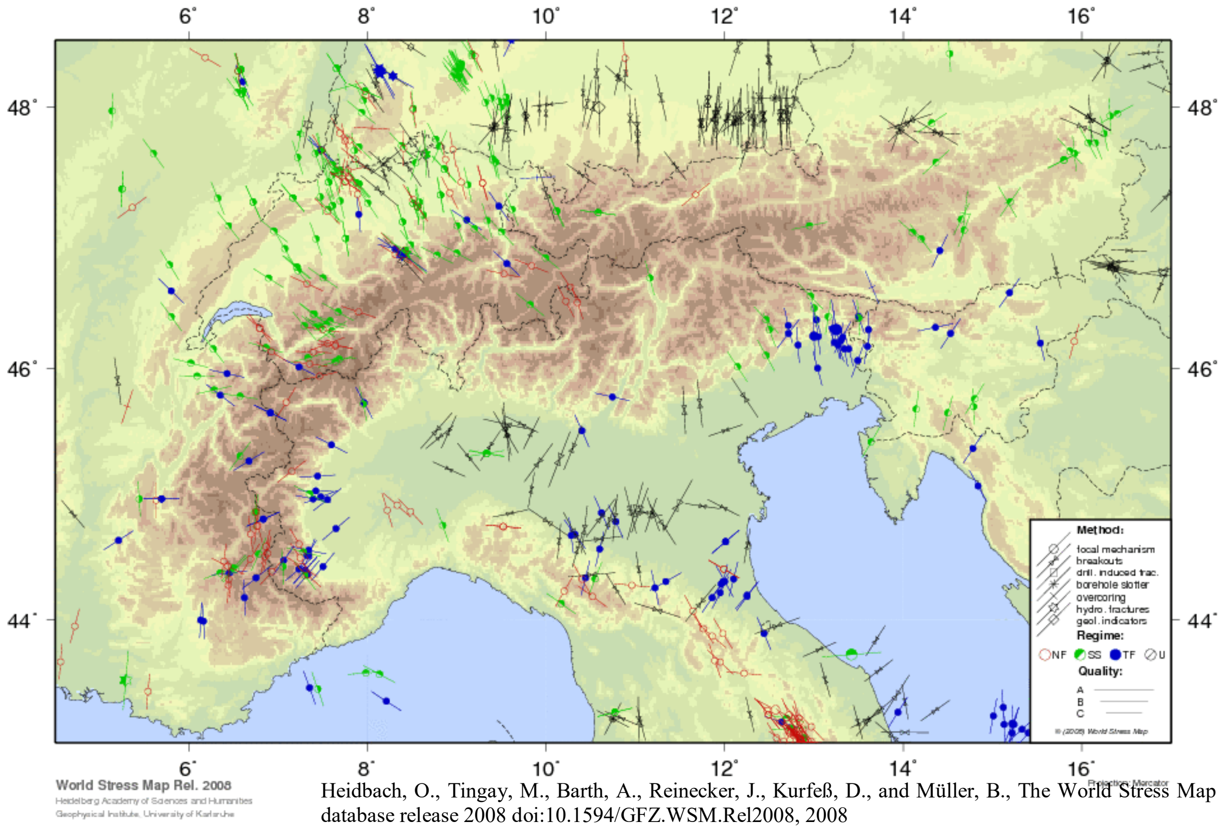
representative Herdlösungsmechanismen



Orientierung der Hauptspannungsachsen
(P Maximum, Kompression) T(Minimum, Extension) und B (intermediär)

Heutiges Spannungsfeld

Die Ermittlung der Spannungen ist unvollständig und spärlich. Resultate zeigen, dass der Spannungszustand charakteristischerweise heterogen und in Ort und Zeit unvorhersehbar ist. Extrapolationen von einzelnen Messpunkten bleiben sehr begrenzte Vereinfachungen des wirklichen Zustandes, weil lokale Störungen durch lokale geologische Eigenschaften bestimmt werden.



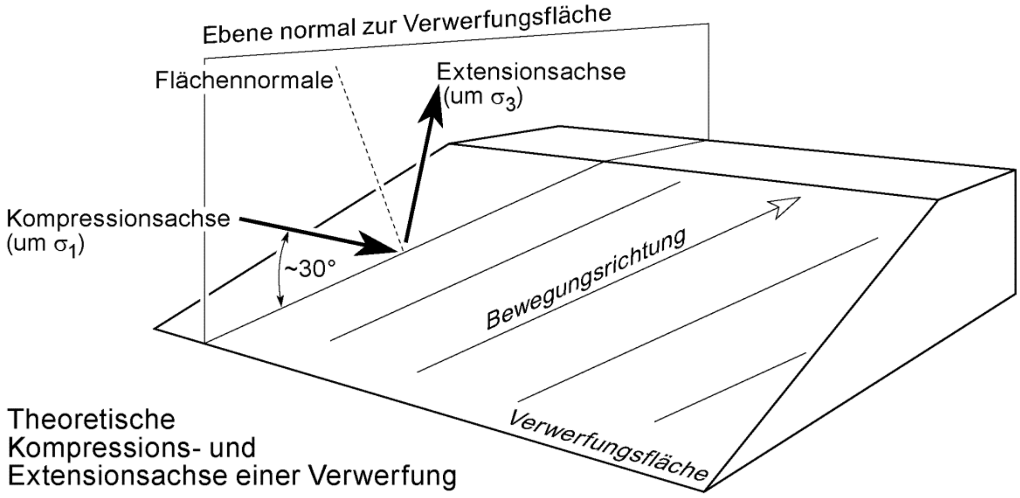
Heidbach, O., Tingay, M., Barth, A., Reinecker, J., Kurfeß, D., and Müller, B., The World Stress Map database release 2008 doi:10.1594/GFZ.WSM.Rel2008, 2008

Jedoch zeigen Messungssynthesen das Bestehen der bemerkenswert konstanten "Andersonian" Spannungprovinzen, mit zwei der horizontalen Hauptspannungen und der vertikalen Spannung gleich σ_1 (Extensionsregime), σ_2 (Blattverschiebungsregime) oder σ_3 (Kompressionsregime).

Das herkömmliche Auftreten von anthropogener Seismizität während der Reservoirauffüllung und von Erdbeben-ausgelösten Erdbeben schlägt vor, dass die kontinentale Kruste global in einem Zustand des Reibungsgleichgewichts ist.

Anwendung auf geologische Strukturen

Es ist sehr wenig über das Spannungsfeld bekannt, das in Gesteinen während der Deformation herrscht, obwohl es eines der obersten Ziele des Faches ist, diese Felder so genau wie möglich zu beschreiben. Diese Lücke an Wissen resultiert teilweise aus der Komplexität der Spannungsfelder, die in verformenden Körpern herrschen, aber hauptsächlich aus einem allgemeinen Mangel an Information über die mechanischen Eigenschaften von Gesteinen.



Die Anwendung von Normal- und Scherspannungen kann anhand zweier einfacher, geologischer Beispiele gezeigt werden: die Spannung auf einer Störung und die Spannung auf einer Schichtfläche, die beide eine Biegegleitfaltung durchmachen, resultiert aus entgegengesetzten Druckkräften. Klarerweise kann der Sinn des Störungsversatzes und der Gleitung auf der Schichtfläche vorhergesagt werden, wenn die Richtung der Kräfte bekannt ist und umgekehrt.

Zusammenfassung

Die kinematische Analyse identifiziert vier Deformationskomponenten:
- Translation (Änderung des Orts)
- Rotation (Änderung der Orientierung)
- Dilatation (Änderung der Grösse) und
- Distorsion (Änderung der Form).

Spannung ist eine momentane Grösse, die als Kraft pro Flächeneinheit definiert ist. Die Spannungen an einem Punkt sind die Komponenten des Spannungsvektors auf den drei Bezugsebenen.
Der Spannungstensor σ_{ij} ist eine mathematische Struktur, die die Kraft pro Flächeneinheit auf einer orientierten Fläche des Körpers bezeichnet. Das erste Tiefzeichen gibt die Richtung der Kraft, und das Zweite gibt die Fläche des Würfels, auf der sie wirkt.
Es erfordert neun Zahlen und ein Koordinatensystem um diese Tensorquantität zu definieren: Es ist ein Tensor zweiter Stufe. Die neun Vektorkomponenten des Spannungstensors entsprechen den neun Komponenten der Spannung. Die Spannungen können nicht durch Vektoraddition summiert werden.
Der Spannungszustand an einem Punkt wird durch die Grösse und die Richtungen von drei Hauptspannungen oder von den Normal- und Scherspannungen auf einer Fläche mit bekannter Richtung beschrieben. Dieser Spannungszustand an einem Punkt kann durch ein Ellipsoid dargestellt werden, wobei die Längen der Achsen durch die drei Hauptspannungen festgelegt werden. Diese drei Hauptspannungen haben die folgenden Eigenschaften:
1) Sie sind orthogonal zueinander;
2) Sie sind senkrecht auf den Flächen ohne Scherspannung.

Das Mohr-Diagramm setzt eine materielle Fläche in Beziehung zu den Spannungspunkten. Der Scherspannungszustand σ_S auf Flächen mit unterschiedlichen Richtungen beschreibt einen Kreis, der durch σ_1 und σ_3 auf dem Mohr-Diagramm läuft. Die Magnitude und die Richtung der Scherspannung σ_S gegen die Normalspannung σ_N können auf diesem graphisch dargestellt werden.
Die Spannungen in der Lithosphäre haben beides, tektonischen (Plattenbewegung, Vergraben / Ausgraben, Magmaintrusion) und nicht-tektonischen, lokalen (thermische Expansion / Kontraktion, Meteoriteneinschlag, Flüssigkeitskreisläufe) Ursprung. Die regionale Gleichförmigkeit der natürlich beobachteten Spannungsfelder argumentiert für einen dominierenden tektonischen Ursprung. Die

Differentialspannung steuert die Verformung. Das Verständnis der Spannungen ist deshalb wichtig, um die Gesteinsverformung und die tektonischen Prozesse zu beschreiben, zu quantifizieren und vorauszusagen.

Empfohlene Literatur

Hubbert M.K. & Rubey W.W. - 1959. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting: I. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting. *Geological Society of America Bulletin.* **70** **(2)**, 115-166, 10.1130/0016-7606(1959)70[115:ROFPIM]2.0.CO;2

Jaeger J.C. - 1969. *Elasticity, fracture and flow: with engineering and geological applications*. third, Methuen & Co LTD and Science Paperback, London. 268 p.

Jaeger J.C. & Cook N.G.W. - 1979. *Fundamentals of rock mechanics*. 3, Chapman and Hall, London. 593 p.

Jaeger J.C., Cook N.G.W. & Zimmerman R.W. - 2007. *Fundamentals of rock mechanics. Fourth edition.* Blackwell Publishing, Oxford. 475 p.

Means W.D. - 1976. *Stress and strain. Basic concepts of continuum mechanics for geologists*. Springer Verlag, New York. 339 p.

Oertel G.F.M. - 1996. *Stress and deformation: a handbook on tensors in geology*. Oxford University Press, New York. 292 p.

Pollard D.D. & Fletcher R.C. - 2005. *Fundamentals of structural geology*. Cambridge University Press, Cambridge. 500 p.