Ableitungen - Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Inhaltsverzeichnis Ableitungen
Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Kapitel mit 58 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(12 Aufgaben)*	06
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	08
Aufgabenblatt 2 *(4 Aufgaben)*	09
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	10
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(4 Aufgaben)*	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	12
Aufgabenblatt 2 *(8 Aufgaben)*	13
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	14
Aufgabenblatt 3 *(8 Aufgaben)*	15
Lösungen zum Aufgabenblatt 3	16
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(9 Aufgaben)*	17
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	18
Aufgabenblatt 2 *(13 Aufgaben)*	20
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	22

Einführung

Die beiden Begriffe „Differenzierbarkeit" und „Stetigkeit" sind wesentliche Begriffe der Analysis. In diesem Kapitel lernen wir die beiden Begriffe kennen und wie wir damit umgehen müssen.

Stetigkeit

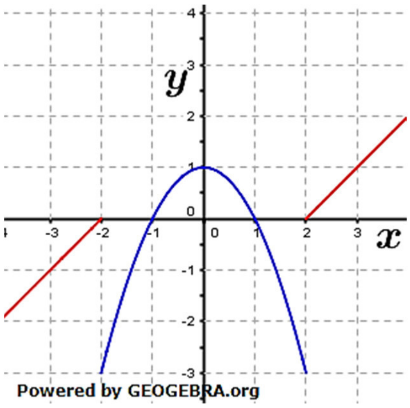
Zunächst einmal eine ganz anschauliche Erläuterung:
Eine Funktion f heißt dann in einem Intervall $I = [a; b]$ stetig, wenn man den dazugehörigen Graphen vom linken Intervallpunkt bis zum rechten Intervallpunkt zeichnen kann, ohne dabei den Zeichenstift absetzen zu müssen.

Anders ausgedrückt: Wenn sich alle Punkte des Graphen eine Funktion f innerhalb des Intervalls $I = [a; b]$ nahtlos aneinanderfügen, ohne dass sich irgendwelche Sprünge ergeben, dann ist die Funktion f im Intervall $I = [a; b]$ stetig.

Beispiel 1:

Wir betrachten die abschnittsweise definierte Funktion f mit

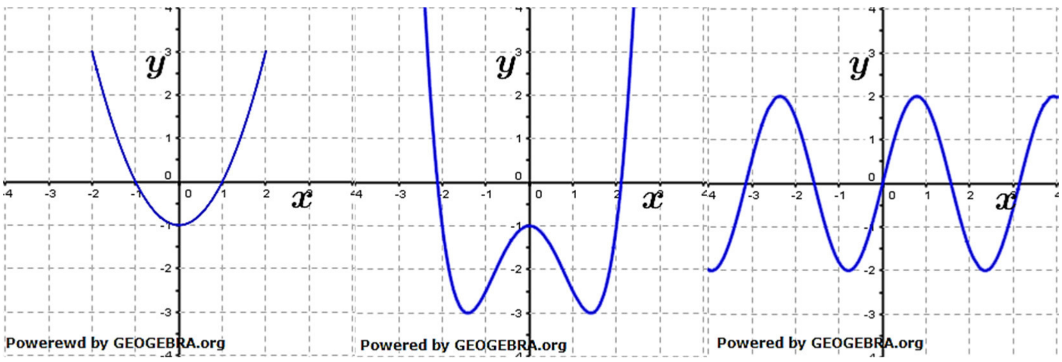
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$



An den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ weist der Graph von f Sprünge auf.
An diesen Stellen ist f ***unstetig.***

Beispiel 2:

Betrachten wir die uns bekannten Funktionen, wie z. B. die Potenzfunktionen, die ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen usw. usw., stellen wir fest, dass diese innerhalb ihres Definitionsbereiches $\mathbb{D}_f$ alle stetig sind, da sie an keiner Stelle x_0 einen Sprung aufweisen.



Merksatz

Stetigkeit:
Die Definitionsmenge einer Funktion f sei $\mathbb{D}_f$ und deren Wertemenge sei $\mathbb{W}_f$.
Eine Funktion f heißt an der Stelle $x = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{D}_f$ *genau dann stetig*, wenn

☞ der Funktionswert $f(x_0)$ existiert, d. h. $f(x_0) \in \mathbb{W}_f$,

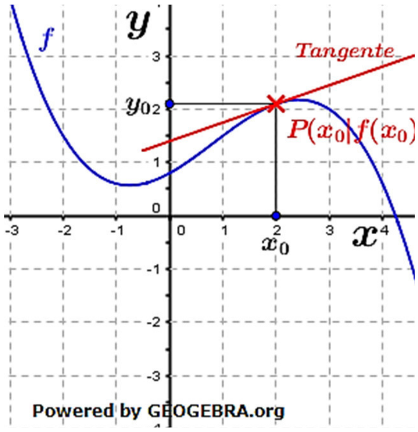
☞ der Grenzwert von f für $x = x_0$ existiert und gleich einer bestimmten Zahl $g \in \mathbb{R}$ ist und wenn

☞ $f(x_0) = g$ gilt.

Ist nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Funktion f an der Stelle $x = x_0$ *unstetig.*

Differenzierbarkeit

Im Kapitel „Vom Differenzenquotienten zur Ableitung" haben wir kennengelernt, dass die Begriffe Differenzialquotient und Ableitung denselben Umstand beschreiben, nämlich die Steigung der Tangente in einem bestimmten Punkt des Graphen einer Funktion f.

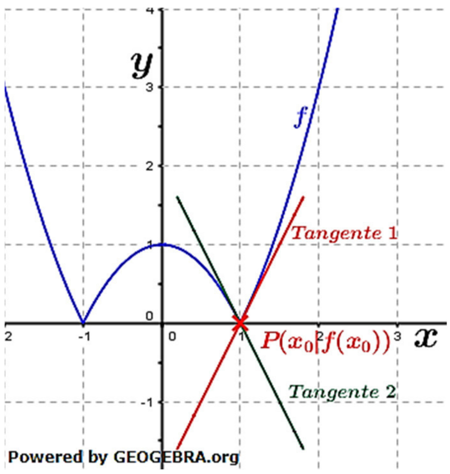


Demzufolge ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nur dann differenzierbar, wenn eine eindeutige Steigung existiert.
Eine wesentliche Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion f an der Stelle x_0 ist (folgerichtig aus der Stetigkeit hergeleitet):

Die Funktion muss an der Stelle x_0 stetig sein.

Diese Forderung alleine reicht aber nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt:
Beispiel 3:

Wir betrachten die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x^2 - 1|$.
Im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ existiert keine eindeutige Tangente, denn:
$t_1(x) = m_1 x + c_1$ und $t_2(x) = m_2 x + c_2$.
Der Graph der Funktion hat in x_0 keinen Sprung, ist also stetig, weist aber in x_0 zwei Tangenten auf. Das bedeutet, die Ableitungsfunktion ist an der Stelle x_0 nicht eindeutig, die Funktion ist in dieser Stelle nicht differenzierbar.



Formulieren wir diese Erkenntnis anschaulich:
Stellen des Graphen einer Funktion f, die Spitzen, die Knicke besitzen, sind an dieser Stelle nicht differenzierbar.

Umgekehrt bedeutet das für die Stetigkeit:
Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.

Merksatz

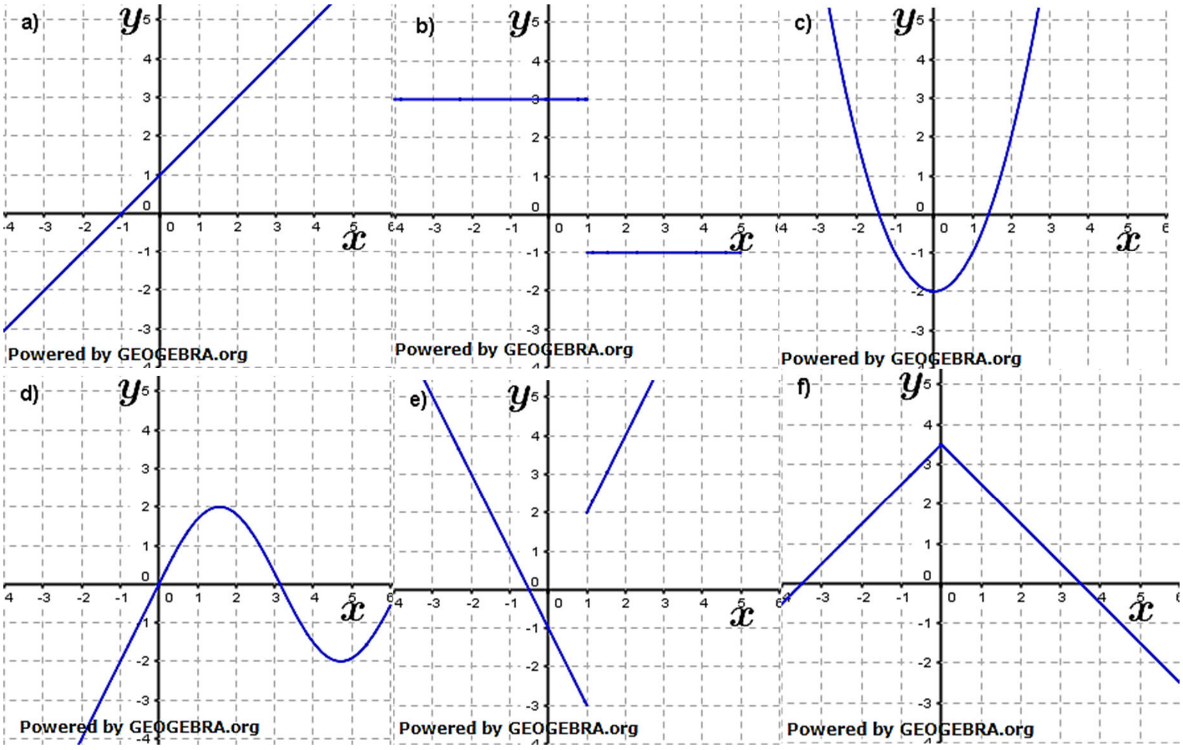
Linksseitiger Differenzialqotient
$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x < x_0$

Rechtsseitiger Differenzialquotient
$\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x > x_0$

Sind die Werte des linksseitigen Differenzialquotienten und des rechtsseitigen Differenzialquotienten in x_0 gleich groß, so ist die Funktion f mit $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar.
Die Ableitung der Funktion $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ bestimmt für $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

Aufgabe A1

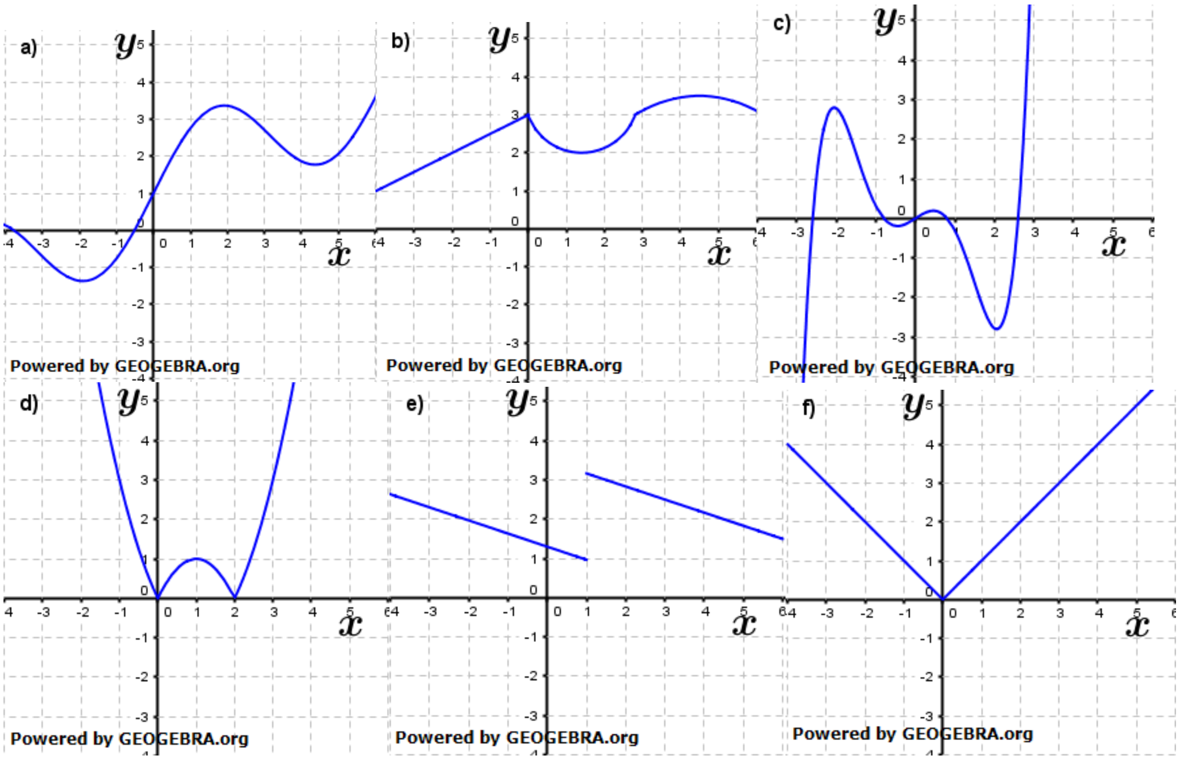
Bestimme für die nachfolgend skizzierten Graphen von Funktionen die Intervalle, in denen die Funktion differenzierbar ist sowie deren Stetigkeit.



Grafik	Differenzierbar im Intervall:	stetig / nicht stetig
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Aufgabe A2

Bestimme für die nachfolgend skizzierten Graphen von Funktionen die Intervalle, in denen die Funktion differenzierbar ist sowie deren Stetigkeit.



Grafik	Differenzierbar im Intervall:	stetig / nicht stetig
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

Lösung A1

Grafik	Differenzierbar im Intervall:	stetig / nicht stetig
a)	$I = x \in \mathbb{R}$	stetig
b)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	nicht stetig
c)	$I = x \in \mathbb{R}$	stetig
d)	$I = x \in \mathbb{R}$	stetig
e)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	nicht stetig
f)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	stetig

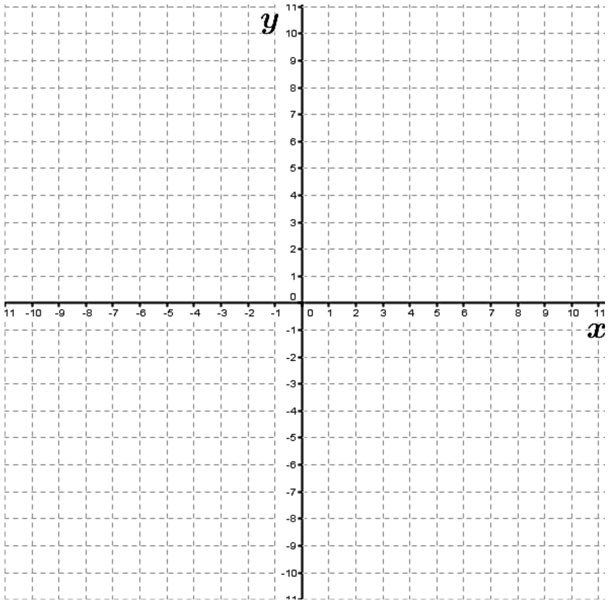
Lösung A2

Grafik	Differenzierbar im Intervall:	stetig / nicht stetig
a)	$I = x \in \mathbb{R}$	stetig
b)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2{,}8\}$	stetig
c)	$I = x \in \mathbb{R}$	stetig
d)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$	stetig
e)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	nicht stetig
f)	$I = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	stetig

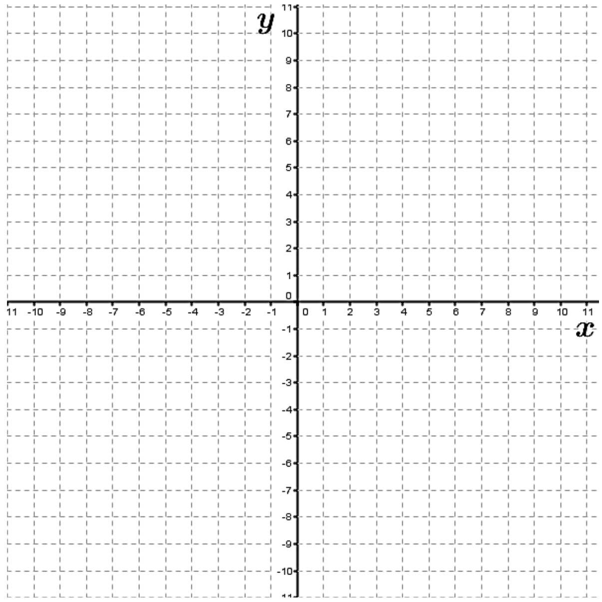
Aufgabe A1

Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x)$ in ein Koordinatensystem und kennzeichne die nicht differenzierbaren Stellen.

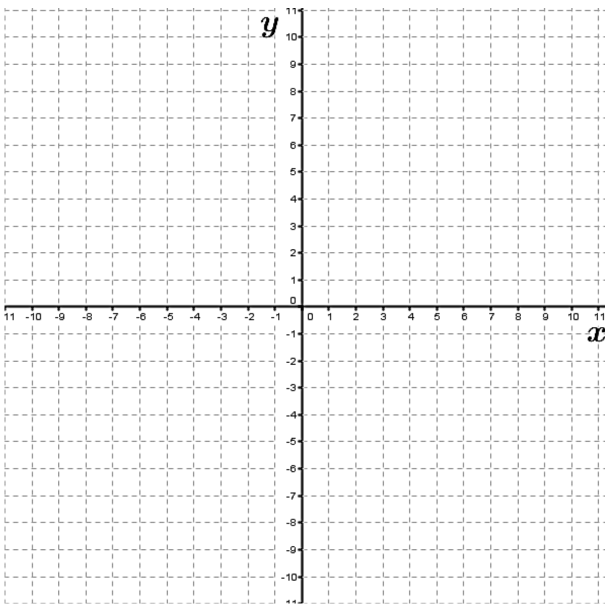
a) $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 1\right|$



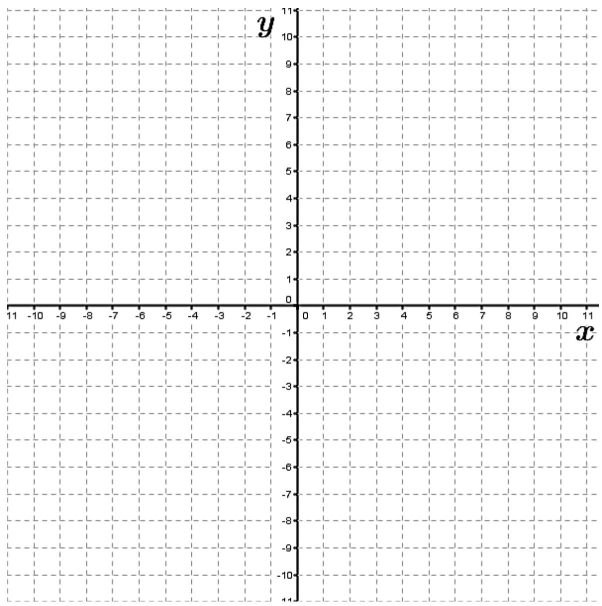
b) $f(x) = |x^3 - 8|$



c) $f(x) = \sqrt{|x-1|} - 1$

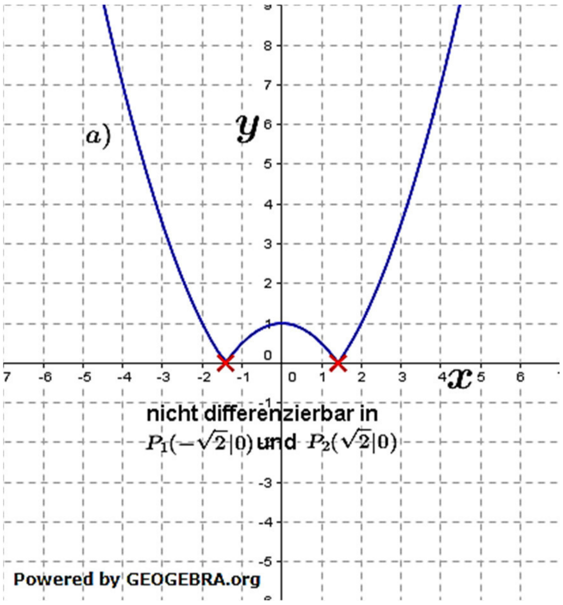


d) $f(x) = 2(|x+2|) + 3$

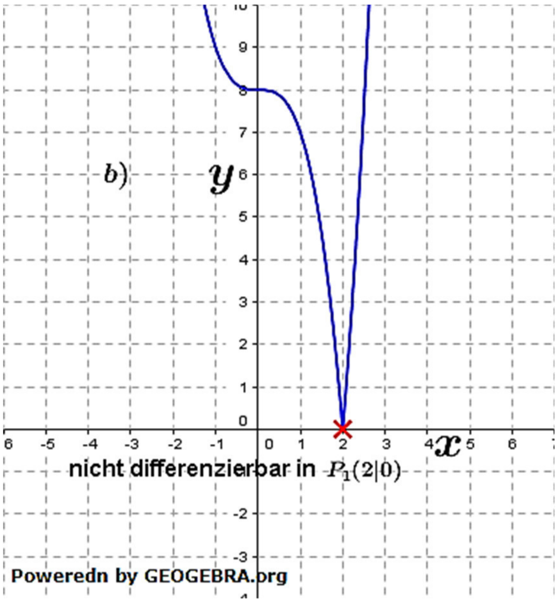


Lösung A1

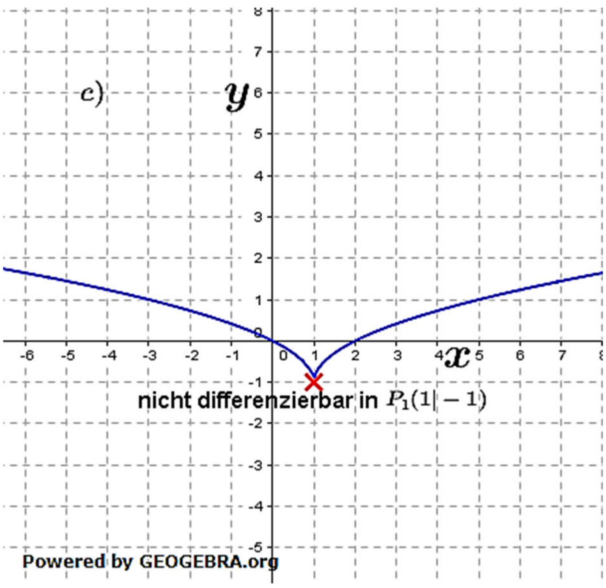
a) $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-1\right|$



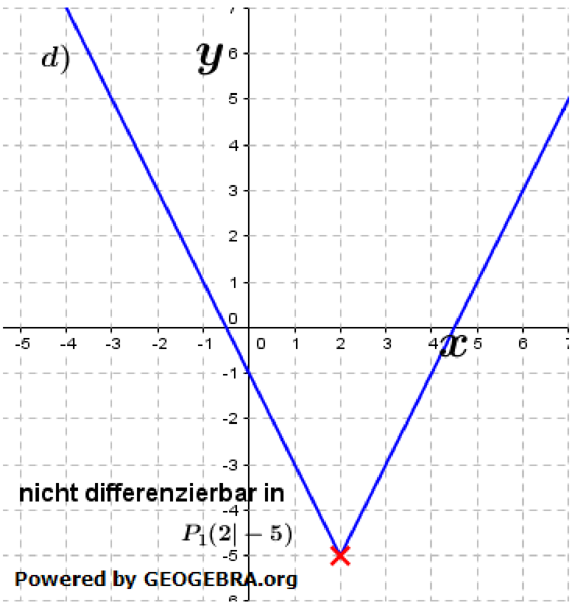
b) $f(x)=|x^3-8|$



c) $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1$



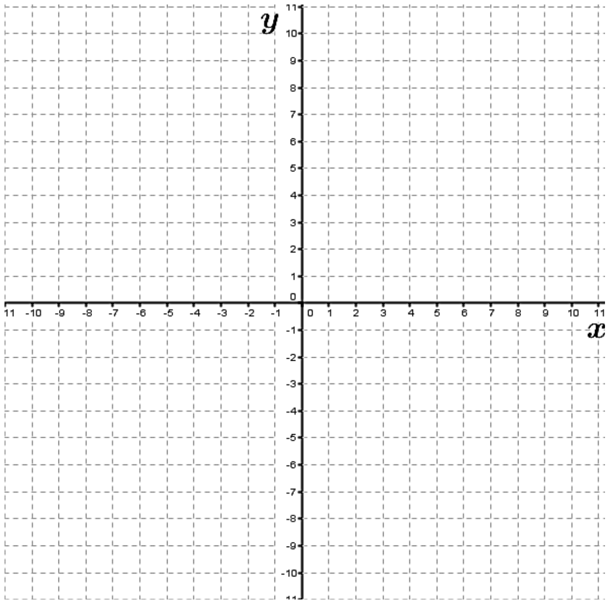
d) $f(x)=2(|x+2|)+3$



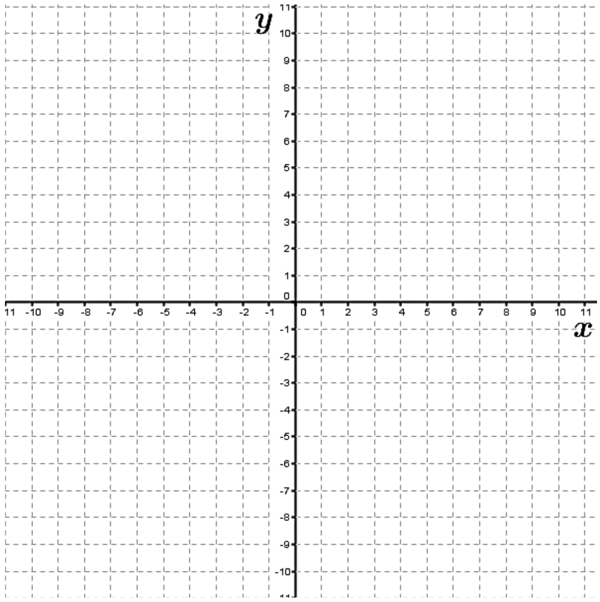
Aufgabe A1

Zeichne den Graphen der abschnittsweise definierten Funktionen f in ein Koordinatensystem und kennzeichne die nicht differenzierbaren Stellen.

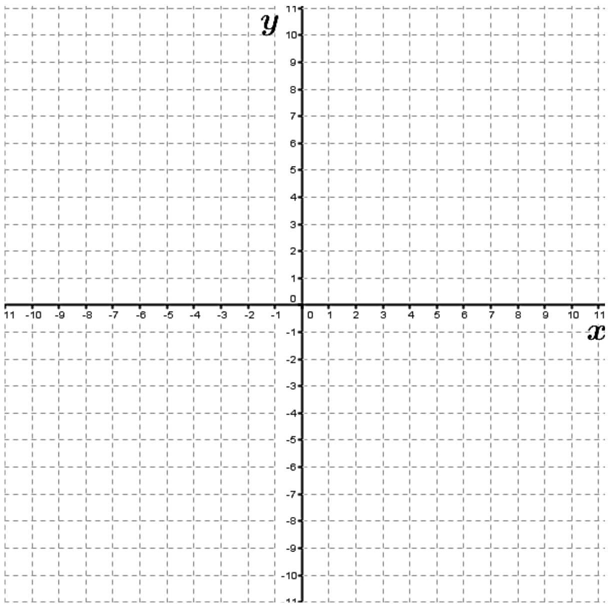
a) $f(x) = \begin{cases} |0{,}5(x-1)^2 - 2| & \text{für } x < 0 \\ |0{,}5(x-1)^2 + 2| & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



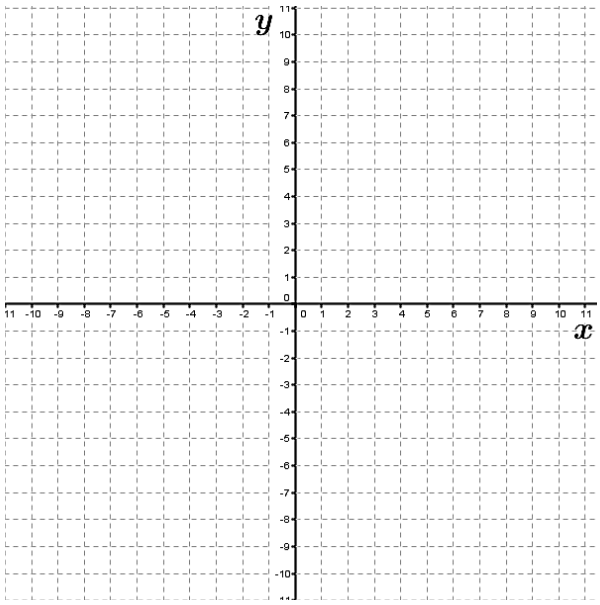
b) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 3 & \text{für } x < 2 \\ x - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{x} + 2 & \text{für } x \leq -1 \\ 2\sqrt[3]{x} - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$



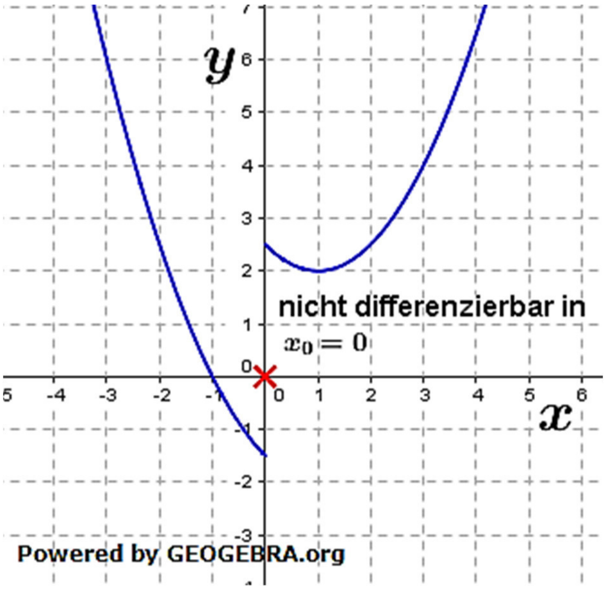
d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} + 2 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

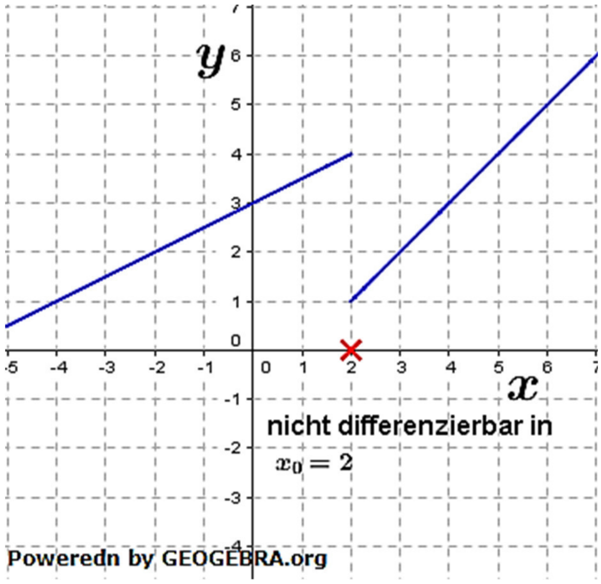


Lösung A1

a) $f(x) = \begin{cases} |0{,}5(x-1)^2 - 2| & \text{für } x < 0 \\ |0{,}5(x-1)^2 + 2| & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

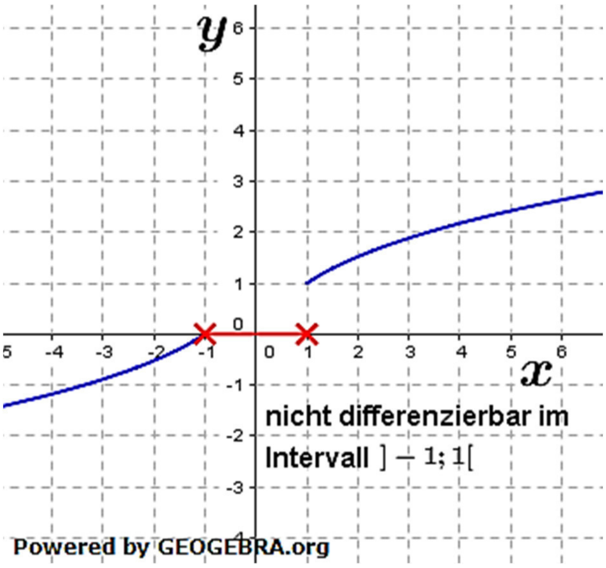
b) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 3 & \text{für } x < 2 \\ x - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$

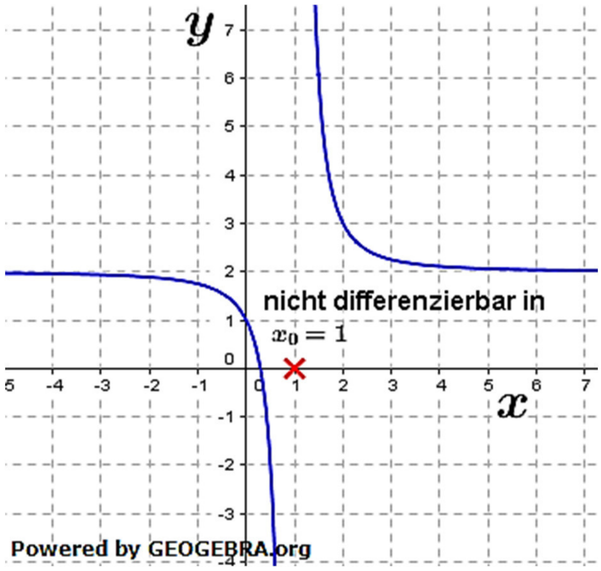




c) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{x} + 2 & \text{für } x \leq -1 \\ 2\sqrt[3]{x} - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

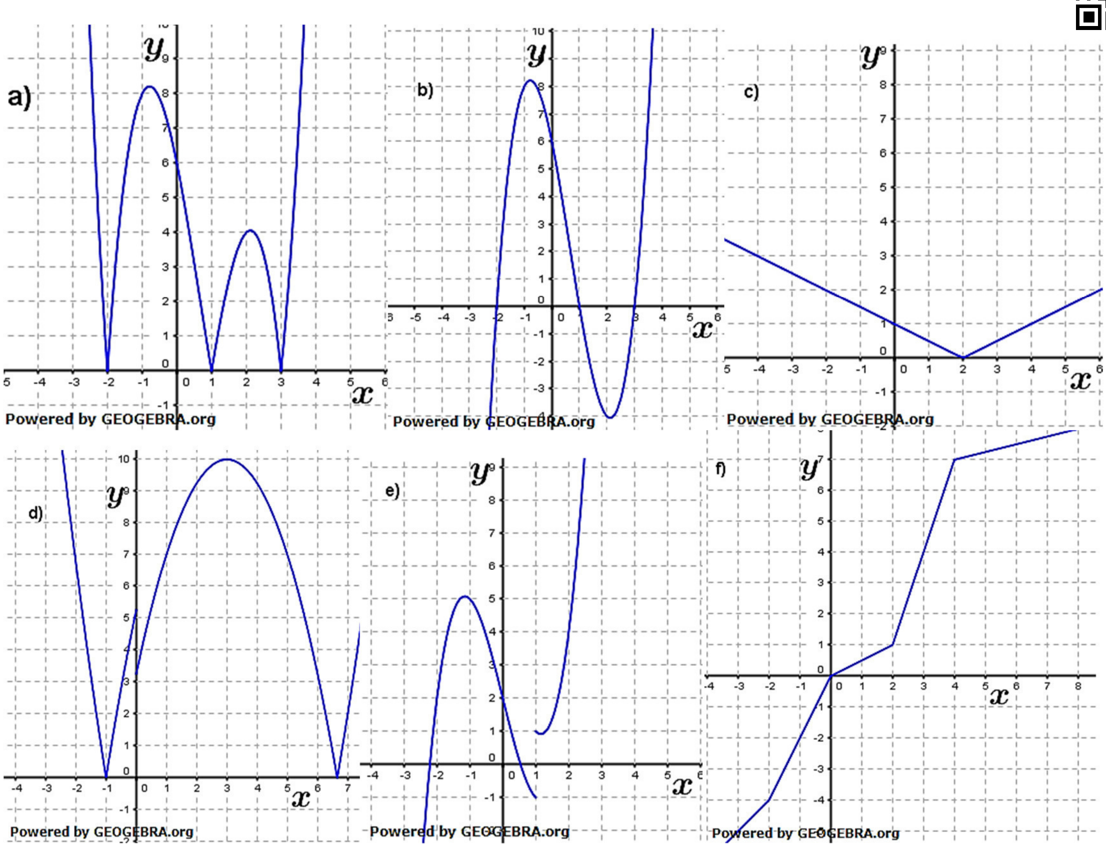
d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} + 2 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$





Aufgabe A1

Bestimme die Stellen, in denen die abgebildeten Graphen nicht differenzierbar sind.

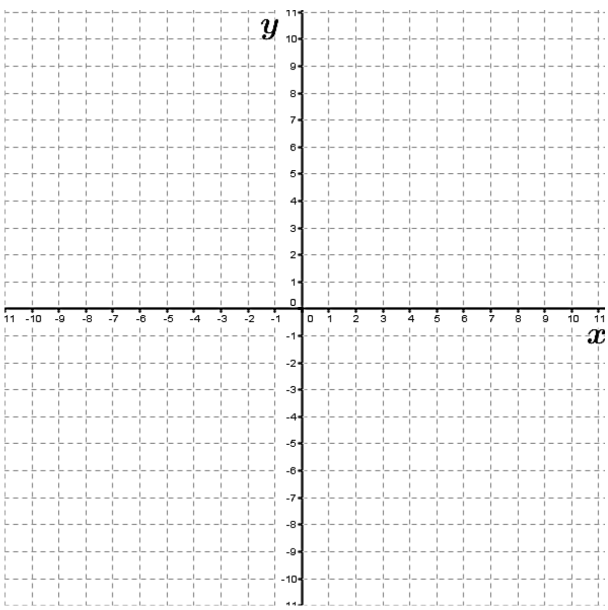


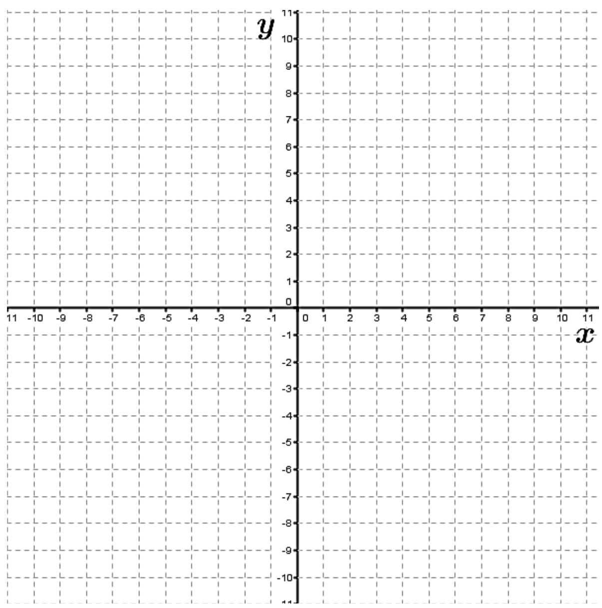
Aufgabe A2

Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x)$ jeweils in ein Koordinatensystem und kennzeichne die nicht differenzierbaren Stellen.

a) $f(x) = |2x - 1{,}5|$

b) $f(x) = |(4 - x)(x - 2)|$





Lösung A1

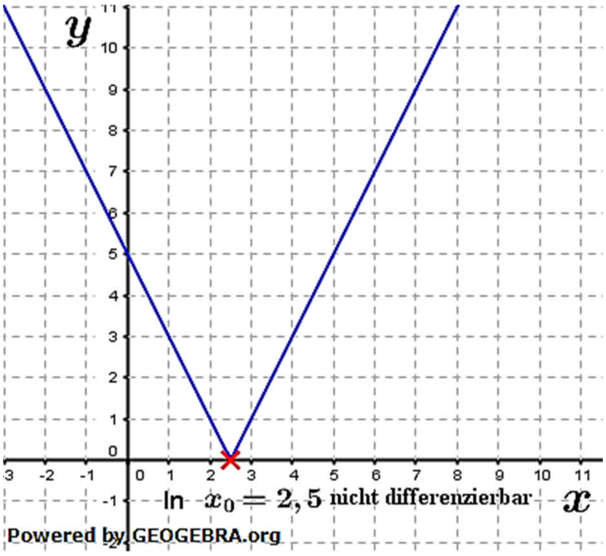
Differenzierbar in

a) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1; 3\}$ b) $x \in \mathbb{R}$ c) $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$

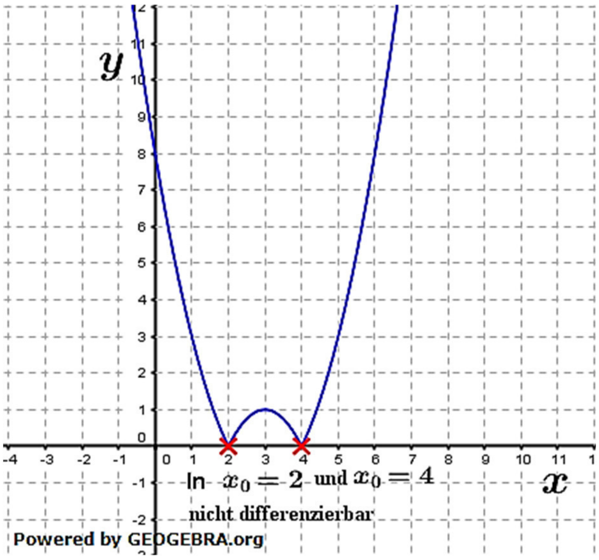
d) $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0; \approx 6{,}6\}$ e) $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ f) $x \in \mathbb{R}\backslash\{]-\infty, -2]; 0; 2; 4; [6; \infty[\}$

Lösung A2

a) $f(x) = |2x - 1{,}5|$

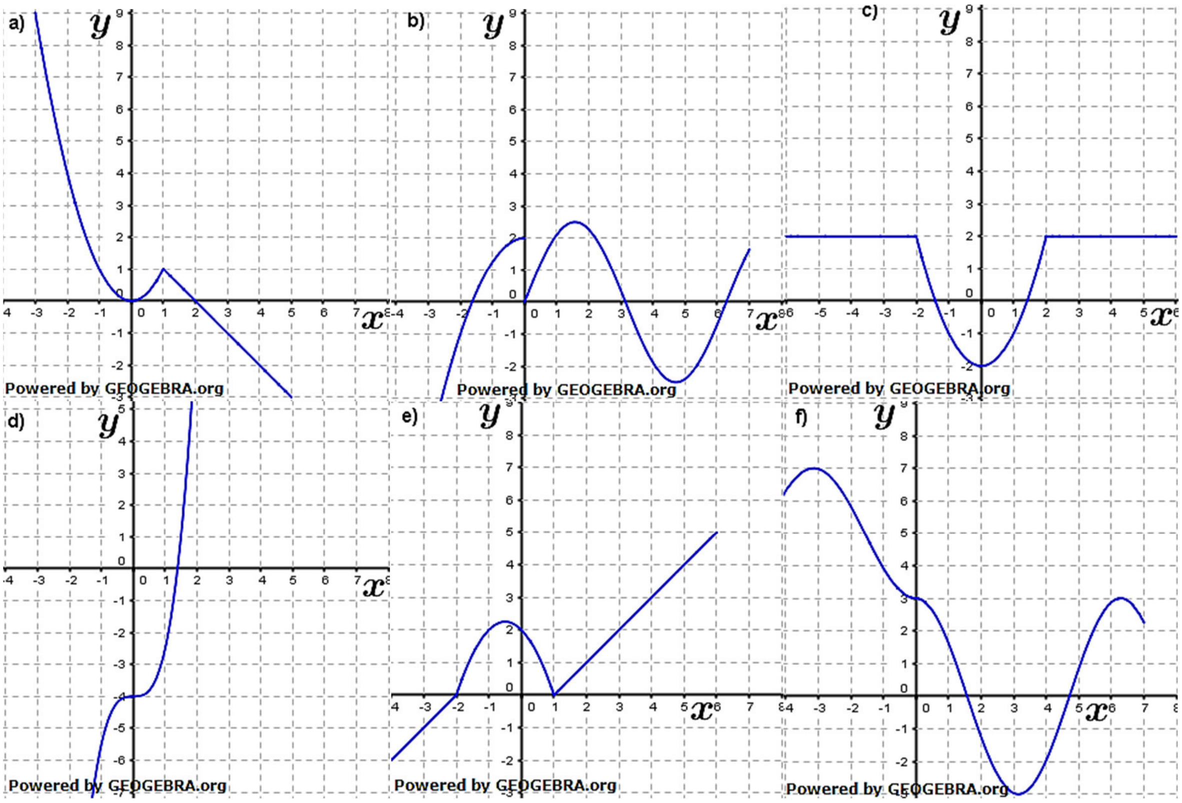


b) $f(x) = |(4 - x)(x - 2)|$



Aufgabe A1

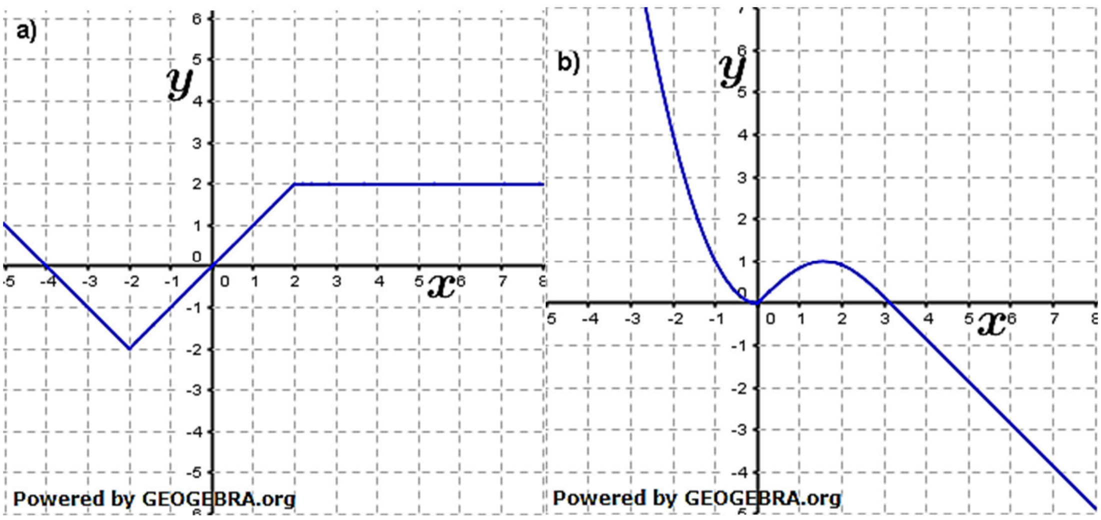
Bestimme, ob die abgebildeten Graphen im sichtbaren Bereich differenzierbar sind und gebe ggf. die Stellen an, in denen die zugehörige Funktion nicht differenzierbar ist.



Aufgabe A2

AOrdne den dargestellten Graphen deren zugehörige Funktionsgleichung zu.

I) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x < 0 \\ \sin(x) \text{ für } 0 < x \le \pi \\ -x + \pi \text{ für } x > \pi \end{cases}$ II) $f(x) = \begin{cases} -x - 4 \text{ für } x < -2 \\ x \text{ für } -2 \le x \le 2 \\ 2 \text{ für } x > 1 \end{cases}$



Lösung A1

Differenzierbar in

a)	$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	b)	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	c)	$x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
d)	$x \in \mathbb{R}$	e)	$x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$	f)	$x \in \mathbb{R}$

Lösung A2

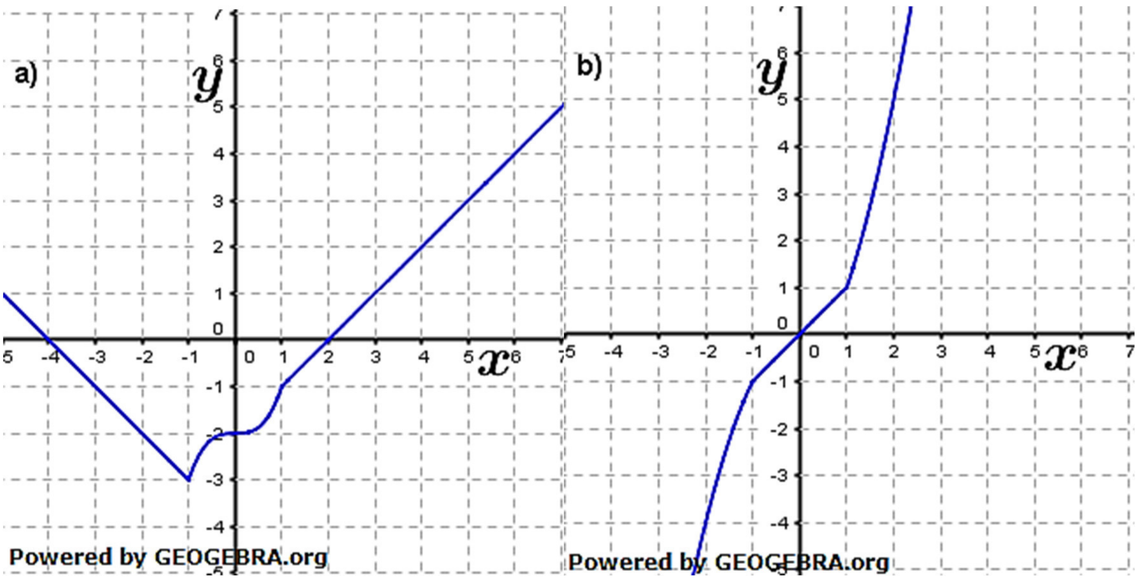
Gleichung II) gehört zu Graph a)

Gleichung I) gehört zu Graph b)

Aufgabe A1

Ordne den dargestellten Graphen deren zugehörige Funktionsgleichung zu.

I) $f(x) = \begin{cases} -x-4 \text{ für } x<-1 \\ x^3-2 \text{ für } -1 \le x \le 1 \\ x-2 \text{ für } x>1 \end{cases}$ II) $f(x) = \begin{cases} -x^2 \text{ für } x<-1 \\ x \text{ für } -1 \le x \le 1 \\ x^2+1-x \text{ für } x>1 \end{cases}$



Aufgabe A2

Bestimme s und t so, dass die Funktion f an der Stelle $x=1$ differenzierbar ist.
Es gilt $x; s; r \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} tx^2 - x - s \text{ für } x \le 1 \\ -x^2+1 \text{ für } 1x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe A3

Bestimme, ob der Graph der nachfolgend gegebenen Funktionsgleichungen nicht differenzierbare Stellen aufweist und falls ja, berechne diese.

a) $f(x) = |(x-5)(x-2)(x+1)|$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

c) $f(x) = ln(|x^2-1|)$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \text{ für } x<3 \\ -\frac{1}{2}x + 1 \text{ für } x \ge 3 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} \text{ für } -5 \le x < 0 \\ -\sqrt{25-x^2}+10 \text{ für } x \ge 0 \end{cases}$

Tipp:
Betragsfunktionen sind in Nullstellen mit Vorzeichenwechsel nicht differenzierbar.

Lösung A1

Gleichung I) gehört zu Graph a) Gleichung II) gehört zu Graph b)

Lösung A2

$$f(x) = \begin{cases} tx^2 - x - s \text{ für } x \le 1 \\ -x^2 + 1 \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

Soll die abschnittsweise definierte Funktion in $x = 1$ differenzierbar sein, so müssen

a) die Funktionswerte von $tx^2 - x - s$ und $-x^2 + 1$ in $x = 1$ gleich sein und

b) die Steigungen beider Teilfunktionen in $x = 1$ ebenfalls gleich sein.

(1) $tx^2 - x - s = -x^2 + 1$ | $+x^2 - 1$

(2) $2tx - 1 = -2x$ | $+2x$

(1) $x^2(t + 1) - x - s - 1 = 0$ | $x = 1$ einsetzen

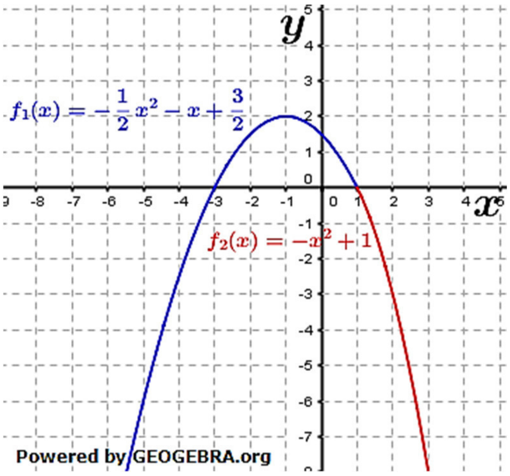
(2) $2x(t + 1) - 1 = 0$ | $x = 1$ einsetzen

(1) $t + 1 - 1 - s - 1 = 0$

(2) $2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

(2)-> (1)

(1) $-\frac{1}{2} - s - 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{3}{2}$



Lösung A3

a) $f(x) = |(x - 5)(x - 2)(x + 1)|$
Nullstellen mit Vorzeichenwechsel von f sind $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 5$.
Die Funktion ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 5\}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$
Die Funktion besitzt weder Nullstellen, noch kann ihr Funktionswert negativ sein, die Funktion ist außerdem stetig.
Die Funktion ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = ln(|x^2 - 1|)$
Die Funktion ist für $|x| = 1$ nicht definiert, da $ln(0)$ nicht existiert.
Die Funktion ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$
Die Funktion ist für $|x| = 2$ nicht definiert, da $\frac{1}{0}$ nicht existiert.
Die Funktion ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

e) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 \text{ für } x < 3 \\ -\frac{1}{2}x + 1 \text{ für } x \ge 3 \end{cases}$$
$\frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = 0{,}5;\ -\frac{1}{2} \cdot 3 + 1 = -0{,}5$
Wegen $f_1(x) = 0{,}5$ und $f_2(x) = -0{,}5$ ist die Funktion unstetig.
Die Funktion ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

f)
$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} \text{ für } -5 \leq x < 0 \\ -\sqrt{25-x^2}+10 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$

$f_1(0) = 5;\ \ f_2(0) = -5$

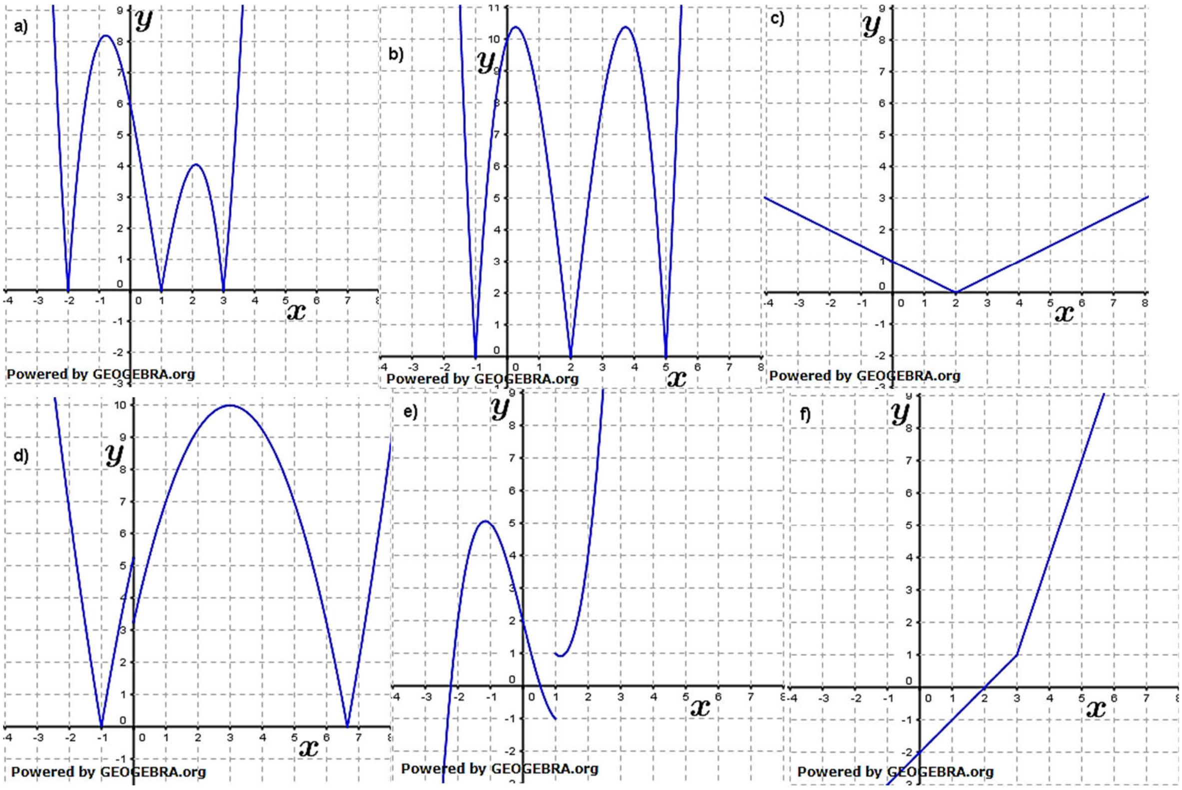
$f_1{}'(-5)$ als auch $f_2{}'(5)$ ist nicht existent, da $f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ und $f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.

Wegen $f_1(0) = 5$ und $f_2(0) = -5$ ist die Funktion unstetig.

Die Funktion ist differenzierbar in den Intervallen $I_1 =]-5;0[$ und $I_2 =]0;5[$.

Aufgabe A1

Die Funktionsgleichungen der nachfolgend abgebildeten Graphen sind gegeben. Ordne jedem Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu und bestimme die Stellen, an denen der Graph nicht differenzierbar ist.



1) $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 3x + 10|$

2) $f(x) = \begin{cases} |0{,}75(x-3)^2 - 12| & \text{für } x < 0 \\ |0{,}75(x-3)^2 - 10| & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x) = |(x+2)(x-1)(x-3)|$

4) $f(x) = |0{,}5(x-4) + 1|$

5) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{für } x < 3 \\ 3(x-3) + 1 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} x(x^2-4) + 2 & \text{für } x < 1 \\ x(x^2-4) + 4 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Aufgabe A2

Nenne drei Kriterien, die dazu führen, dass eine Funktion an einer Stelle nicht differenzierbar ist und führe jeweils eine diesbezügliche Funktionsgleichung an.

1. ______________________________

   Beispiel: ______________________________

2. ______________________________

   Beispiel: ______________________________

3. ______________________________

   Beispiel: ______________________________

Aufgabe A3

Gib an, ob die nachfolgend getroffenen Aussagen richtig oder falsch sind. Begründe deine Antwort durch Angabe eines Beispiels bzw. Gegenbeispiels.

a) Stetige Funktionen sind in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

b) Gebrochen rationale Funktionen sind in den Polstellen nicht differenzierbar.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

c) Ganzrationale Funktionen sind in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

d) Betragsfunktionen haben immer mindestens eine nicht differenzierbare Stelle.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

e) Wurzelfunktionen mit geradzahligem Wurzelexponent haben eine nicht differenzierbare Stelle.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

f) Abschnittsweise definierte Funktionen sind in ihren inneren Intervallgrenzen nicht differenzierbar.

Richtig ❒ Falsch ❒

Begründung: ______________________________

____

Lösung A1

1b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1;\; x_2 = 2;\; x_3 = 5$
Nicht differenzierbar in $\{-1; 2; 5\}$

2d) $0{,}75(x-3)^2 - 12 = 0$ für $x < 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1$
$0{,}75(x-3)^2 - 10 = 0$ für $x \geq 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{9+2\sqrt{30}}{3}$
Bei $x_0 = 0$ liegt ein Sprung in y–Richtung vor.
Nicht differenzierbar in $\{-1; 0; \frac{9+2\sqrt{30}}{3}\}$

3a) $(x+2)(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow\; x_1 = -2;\; x_2 = 1;\; x_3 = 3$
Nicht differenzierbar in $\{-2; 1; 3\}$

4c) $0{,}5(x-4) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$
Nicht differenzierbar in $\{2\}$

5f) Abschnittsweise definierte Funktion mit Knick in $x_0 = 3$.
Nicht differenzierbar in $\{3\}$

6e) Abschnittsweise definierte Funktion mit Sprung bei $x_0 = 1$.
Nicht differenzierbar in $\{1\}$

Lösung A2

Eine Funktion ist an Stellen nicht differenzierbar, in denen sie

1. keine eindeutige Tangente hat, z. B. $f(x) = |x|$
2. einen Sprung in y-Richtung aufweist, wie etwa
$$f(x) = \begin{cases} 1{,}8x + 100 & \text{für } 0 \leq x \leq 50 \\ 1{,}8x + 150 & \text{für } 0 > 50 \end{cases}$$
3. eine Definitionslücke aufweist wie z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$

Lösung A3

a) Stetige Funktionen sind in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.
Falsch ☒
Begründung: Betragsfunktionen wie z. B. $f(x) = |x|$ sind stetig, aber in ihren Nullstellen nicht differenzierbar.

b) Gebrochen rationale Funktionen sind in den Polstellen nicht differenzierbar.
Richtig ☒
Begründung: Der Grenzwert des Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ für $h \longrightarrow 0$ in der Polstelle existiert nicht, $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

c) Ganzrationale Funktionen sind in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.
Richtig ☒
Begründung: Ganzrationale Funktionen haben weder Definitionslücken noch Sprünge noch Knicke wie z. B. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x - 6$.

d) Betragsfunktionen haben immer mindestens eine nicht differenzierbare Stelle.

Falsch ☒

Begründung: Die Betragsfunktion f mit $f(x) = |x^2 + 5|$ ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.

e) Wurzelfunktionen mit geradzahligem Wurzelexponent haben eine nicht differenzierbare Stelle.

Richtig ☒

Begründung: Die Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

f) Abschnittsweise definierte Funktionen sind in ihren inneren Intervallgrenzen nicht differenzierbar.

Falsch ☒

Begründung: Eine abschnittsweise definierte Funktion mit z. B. $f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ für $-5 \leq x < 0$ und $f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2} + 10$ für $0 \leq x \leq 5$ ist in $x_0 = 0$ differenzierbar, da dort nur eine einzige Tangente möglich.