EINFÜHRUNG IN DIE HÖHERE MATHEMATIK
ERSTER TEIL

WESSELKA MIHOVA

Begriffsbildungen, Vorgehensweisen und Erkenntnisse in einer Wissenschaftsdisziplin lassen sich immer dann präzise und zweifelsfrei darstellen, wenn eine geeignete Fachsprache zur Verfügung steht, deren "Vokabeln" und deren "Grammatik" vollständig und eindeutig definiert sind und bei korrekter Anwendung keiner Interpretationswillkür unterliegen.

Zu den wichtigsten klassischen Grundbausteinen der mathematischen Fachsprache gehören Elemente der Aussagenlogik und der Mengenlehre. Wir wollen diese Elemente im folgenden so weit darstellen, wie wir sie zur bequemen Anwendung der Mathematik auf ökonomische Probleme benötigen.

1. Grundbegriffe der Aussagenlogik

1.1. **Aussagen und Aussageformen.** Die formale Logik beschäftigt sich mit den Regeln bei der Bildung von Begriffen, Aussagen und Schlüssen und bildet damit nicht nur eine Grundlage der Mathematik, sondern jeder Wissenschaft.

Wir wollen im folgenden einige Grundbegriffe der *zweiwertigen* Aussagenlogik kennenlernen. Aussagen und ihre logischen Verknüpfungen mit Hilfe einer formalisierten Sprache dienen dazu, exakte Formulierungen mathemetischer Sachverhalte zu ermöglichen.

Erklärung 1.1. Unter *Aussagen* versteht man sprachliche Gebilde (Sätze), von dennen man sinnvoll annehmen kann, sie seien entweder "wahr" (w) oder "falsch" (f).

Die Aussage ist also eine gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhaltes. Je nachdem, ob dieser Sachverhalt der Realität entspricht oder nicht, ist die Aussage entweder "wahr" oder "falsch".

Beispiel 1.2. a) 2 ist eine Primzahl. (w)
b) $\sqrt{4} = \pm 2$. (f)
c) $(-4)^2 = 16$. (w)
d) $-2 > 2$. (f)
e) Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland. (w)
f) Jeder Tisch hat vier Beine. (f)
g) 6 ist eine gerade Zahl. (w)
h) $0 : 3 = 0$. (w)
i) $7 : 0 = 0$. (f)

Jede Aussage kann **nur** einen der beiden Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" annehmen, es gibt **keine** dritte Möglichkeit (*Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*).

Bemerkung 1.3. Der Wahrheitsgehalt der Aussage "*Jede gerade Zahl, die größer als* 2 *ist, läßt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben*" ist (noch) unbekannt (*Goldbach'sche Vermutung*). Wir zweifeln jedoch nicht daran, daß sie entweder wahr oder falsch sein **muß**. Daher werden auch derartige Sätze als Aussagen betrachtet.

Aufgabe 1.4. Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind Aussagen?

a) $2.2 = 5$	b) Quadrate schmecken bitter.
c) Alle Menschen sind sterblich.	d) Bist Du gesund?
e) Porsche baut die besten Autos.	f) Eßt mehr Gemüse!

In der Aussagenlogik wird häufig vom konkreten Inhalt der einzelnen Aussagen abgesehen und ganz allgemein nur von Aussagen gesprochen.

Für Überlegungen allgemeiner Art werden Symbole benutzt, die stellvertretend für bestimmte Aussagen stehen. Solche Symbole werden *Variablen* genannt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Objekte, für die stellvertretend Variablen eingesetzt werden, einem (dem jeweiligen Sachverhalt entsprechenden) *Grundbereich* entnommen werden.

Variablen werden in der Mathematik durch kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, ..., x, y, z, ...,$ oder $x_1, x_2, x_3, ...$ symboliziert.

Aussagevariablen, die mit *konkreten* Aussagen belegt werden können, werden in der formalen Logik mit $A, B, C, ...,$ oder $p, q, r, ...$ bezeichnet.

Aussagen werden meist in Form von *Aussagesätzen* angegeben. Nicht alle Aussagesätze sind jedoch Aussagen.

Die Sätze "a ist ein Teiler von 15" und "b ist keine Primzahl" sind zwar Aussagesätze, aber keine Aussagen; man kann nicht feststellen, ob diese Sätze wahr oder falsch sind. Setzen wir z.B. die Zahl 2 für a und die Zahl 7 für b , so gehen die Sätze in die (falschen) Aussagen "2 ist ein Teiler von 15" und "7 ist keine Primzahl" über, bei den Einsetzungen 3 und 6 für a und b ergeben sich wahre Aussagen.

Erklärung 1.5. Sätze mit einer oder mehreren Variablen heißen *Aussageformen*, wenn sie bei spezieller Wahl der Variablen in eine Aussage übergehen.

Aussageformen werden meist mit einem Buchstaben H, G, U und nachfolgender geklammerter Aufzählung der Variablennamen gekennzeichnet: $H(x), G(a, b, c), U(x, y)$ (gelesen: H von x, G von a, b, c usw.).

Beispiel 1.6. a) $H(x) : x + 4 = 7$, mit $x \in \mathbb{N}$;
b) $G(a, b, c) : a + b + c \geq 3$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$;
c) $U(x, y) : x/y$ (gelesen: x ist ein Teiler von y) mit $x, y \in \mathbb{N}$;
d) $H(x, y) : x < y$.

Eine Aussageform $H(x)$ wird *quantifiziert*, indem ihr die Wendungen "*für alle x*" oder "*es gibt mindestens ein x*" vorangestellt werden. Als Abkürzung für die Quantifikatoren "*für alle*" bzw. "*es gibt mindestens ein*" benutzt man in der formalen Logik die Zeichen $\forall$ bzw. $\exists$.

Beispiel 1.7.

	Aussageform		wahre Aussage
(1)	$x + 5 = 3$	mit $x \in \mathbb{N}$	$\exists\, x \in \mathbb{N} : x + 5 = 3;$
(2)	$y - 2 < 3$	mit $x \in \mathbb{R}$	$\exists\, y \in \mathbb{R} : y - 2 < 3;$
(3)	$a + 2 = 2 + a$	mit $a \in \mathbb{R}$	$\forall\, a \in \mathbb{R} : a + 2 = 2 + a.$

Aussageformen der Art (1) und (2) nennt man "*erfüllbar*", Aussageformen der Art (3) - "*allgemeingültig*".

Die Aussage "Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x mit $x + 5 = 3$" ist falsch, während die Aussage "Es gibt mindestens eine ganze Zahl x mit $x + 5 = 3$" wahr ist.

Wir **erkennen**: Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, hängt auch vom jeweiligen Grundbereich ab. Deshalb muß dieser stets eindeutig vorgegeben werden.

Ausdrücke wie $x+2$, a^2, $y-3$, x^2+y^2 nennt man *Terme*. Werden in diesen Ausdrücken die Variablen durch Objekte eines vorgegebenen Grundbereiches belegt, so entstehen keine Aussagen, sondern Bezeichnungen für Objekte.

Erklärung 1.8. Als *Term* bezeichnet man jeden mathematischen Ausdruck, der

- eine definierte Zahl darstellt, z.B. $\sqrt{3}.4+7$ oder
- nach Ersetzen der vorkommenden Variablen durch Zahlen in eine definierte Zahl übergeht, z.B. x^2+y^2.

Keine Terme sind sinnlose oder nicht definierte Ausdrücke wie z.B.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{1}{0}, \quad 0^0.$$

Terme werden oft mit dem Buchstaben T bezeichnet, gefolgt von den geklammerten Variablennamen, z.B.

$$T(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x+1}, \quad T(x,y) = x^2+y^2.$$

Jede mathematische Gleichung $T_1 = T_2$ (Ungleichung $T_1 \leq T_2$), deren Terme eine oder mehrere Variable enthalten, ist eine Aussageform. Ersetzt man die Variablen der Gleichung (Ungleichung) durch Elemente der zugehörigen Grundmenge, so geht die Gleichung (Ungleichung) in eine (wahre oder falsche) Aussage über.

Erklärung 1.9. Diejenigen Elemente der Grundmenge, die eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) zu einer wahren Aussage machen, heißen *Lösungen* der Aussageform (Gleichung, Ungleichung). Sie werden zusammengefaßt in der *Lösungsmenge* L der Aussageform (Gleichung, Ungleichung).

Gelegentlich kann es vorkommen, daß ein Element aus der Grundmenge beim Einsetzen einen nicht definierten Ausdruck erzeugt. Daher ist es erforderlich, die Grundmenge zu reduzieren auf die sogenannte *Definitionsmenge*.

Erklärung 1.10. Die *Definitionsmenge* D_A der Aussageform $A(x)$ enthält nur diejenigen Elemente der Grundmenge, bei deren Einsetzen $A(x)$ in eine sinnvolle, definierte Aussage übergeht.

Beispiel 1.11. Die Lösungsmenge L_A der Gleichung

$$A(x) : (x+1)^2 = x^2+2x+1, \quad x \in \mathbb{R}$$

ist $L_A = \mathbb{R}$, denn für jede Einsetzung aus der Grundmenge $\mathbb{R}$ geht die Gleichung in eine wahre Aussage über.

Erklärung 1.12. Eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) $A(x)$ heißt *allgemeingültig*, wenn die Lösungsmenge L_A von $A(x)$ mit der Definitionsmenge D_A von $A(x)$ übereinstimmt.

Erklärung 1.13. Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen *äquivalent* (gleichwertig), wenn bei jeder Einsetzung von Variablen die beiden Terme T_1 und T_2 dieselben Zahlenwerte liefern.

Beispiel 1.14. Folgende Terme sind jeweils äquivalent:

$$\begin{array}{lll} (i) & T_1(x) = x^2 + 5x - 14, & T_2(x) = (x+7)(x-2); \\ (ii) & T_1(x) = x^4 - y^4, & T_2(x) = (x^2+y^2)(x^2-y^2); \\ (iii) & T_1(a,b,x) = \dfrac{a-b}{b-a}\, x, & T_2(a,b,x) = -x,\ a \neq b; \\ (iv) & T_1(u,v,x) = \dfrac{ux - vx}{x^2 + 7x}, & T_2(u,v,x) = \dfrac{u-v}{x+7},\ x \neq 0, -7. \end{array}$$

Erklärung 1.15. Eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) A heißt *unerfüllbar* (oder: widersprüchlich), wenn keine Zahl aus der Definitionsmenge Lösung von A ist.

Die Lösungsmenge unerfüllbarer Aussageformen ist *leer*.

Zusammenfassung: Es gibt Aussageformen (Gleichungen, Ungleichungen), die in $\mathbb{R}$

(i) lösbar sind, und zwar
- mit genau einer Lösung, z.B. $x - 1 = 0,\ L = \{1\}$;
- mit mehreren Lösungen, z.B. $x^2 = 4,\ L = \{-2, 2\}$;
- mit unendlich vielen Lösungen, z.B.
  $x^2 < 49, \quad L = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$;

(ii) allgemeingültig sind, z.B. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1),\ L = \mathbb{R}$;

(iii) unerfüllbar sind, z.B. $x^2 + 1 = 0,\ L = \emptyset$.

Aufgabe 1.16. (i) In welchen Fällen handelt es sich um Aussagen, in welchen Fällen um Aussageformen?

a) $x^2 + 1 = 1 + x^2$; *b)* $A + B = 1$; *c)* $4 + 1 = 0$;

d) $0 \leq 0^2 = \sqrt{4} - 1$; *e)* $x + y = 4$; *f)* $y = x^2 + 1$;

g) $\dfrac{1}{0} = 0$; *h)* $a^2 + b^2$; *i)* 2 ist Lösung von $x > 4$.

(ii) Man gäbe die Lösungsmengen folgender Aussageformen an. Welche Aussageformen sind allgemeingültig, welche unerfüllbar? (Grundmenge: $\mathbb{R}$)

a) $x^2 = 49$; *b)* $p^2 \geq 0$; *c)* $0\,x = 5\,x$; *d)* $(y+1)(y+2) = 0$;

e) $0 + x = 5 + x$; *f)* $2z + 1 = 1 + 2z$; *g)* $x^2 > 36$; *h)* $u^2 < 81$.

Von jeder gegebenen Aussage läßt sich eine neue Aussage, ihre *Negation*, bilden.

Erklärung 1.17. Die *Negation* (Verneinung) einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A wird mit $\overline{A}$ (gelesen: nicht A) bezeichnet.

Die Beziehungen zwischen den Wahrheitswerten von A und $\overline{A}$ lassen sich in einer Wahrheitswerttabelle zusammenstellen:

A	$\overline{A}$
w	f
f	w

Auch quantifizierte Aussageformen können negiert werden.

So gilt beispielsweise im Bereich

a) der natürlichen Zahlen $\exists\, x : x < 0$ (f) und $\overline{\exists}\, x : x < 0$ (w);
$\exists\, x : x \leq 0$ (f) und $\overline{\exists}\, x : x \leq 0$ (w).

b) der ganzen Zahlen $\exists\, x < 0$ (w) und $\overline{\exists}\, x < 0$ (f);
$\exists\, x \leq 0$ (w) und $\overline{\exists}\, x \leq 0$ (f).

Allgemein ist die Formulierung $\overline{\exists}\, x : H(x)$ (gelesen: es gibt kein x mit $H(x)$) gleichbedeutend mit $\forall\, x : \overline{H(x)}$ (gelesen: für alle x gilt die Negation von $H(x)$).

Eine analoge Beziehung besteht zwischen $\overline{\forall}\, x : H(x)$ und $\exists\, x : \overline{H(x)}$.

So ist z.B. die Formulierung "Nicht alle Abteilungen des Betriebes arbeiten dreischichtig" gleichwertig mit der Aussage "Es gibt mindestens eine Abteilung des Betriebes, die nicht dreischichtig arbeitet".

1.2. **Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen.** Aus zwei gegebenen Aussagen A und B lassen sich mit Hilfe von Bindewörtern (*Junktoren*) neue Aussagen gewinnen.

Häufig auftretende Verknüpfungen von Aussagen sind die sogenannten klassischen Aussagenverbindungen:

Name	Schreibweise	gelesen
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Alternative	$A \vee B$	A oder B
Disjunktion	$A \asymp B$	entweder A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	wenn A, so B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B

Es interessiert uns vor allem der Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer Aussagenverbindung und den Wahrheitswerten der verbundenen Einzelaussagen.

Erklärung 1.18. Werden zwei Aussagen durch *und* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Konjunktion* (Junktor: "und"; Quantor: $\wedge$).

Die *Konjunktion* $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn *beide* Aussagen A und B wahr sind.

Die Wahrheitstafel für die Konjunktion ist:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \wedge A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.19. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage $A : \{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage $B : \{H_2(x) : x$ ist geradzahlig$\}$.

Streng genommen sind $H_1(x)$ und $H_2(x)$ Aussageformen, die erst bei Belegung der Variablen x in Aussagen überführt werden.

	A	B	$A \wedge B$
$2 < 4$ und 2 ist geradzahlig	w	w	w
$3 < 4$ und 3 ist geradzahlig	w	f	f
$4 < 4$ und 4 ist geradzahlig	f	w	f
$5 < 4$ und 5 ist geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.20. Werden zwei Aussagen durch *oder* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Alternative* (Junktor: "oder"; Quantor: $\vee$).

Die *Alternative* $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn *wenigstens eine* ihrer Aussagen A und B wahr ist.

Die Wahrheitstafel für die Alternative ist:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das *oder* in einer Alternative wird als *einschließendes oder* bezeichnet, weil die Wahrheit der einen Aussage die Wahrheit der anderen nicht ausschließt.

$A \vee B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \vee A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.21. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x \text{ ist geradzahlig}\}$.

	A	B	$A \vee B$
$2 < 4$ oder 2 ist geradzahlig	w	w	w
$3 < 4$ oder 3 ist geradzahlig	w	f	w
$4 < 4$ oder 4 ist geradzahlig	f	w	w
$5 < 4$ oder 5 ist geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.22. Werden zwei Aussagen durch *entweder - oder* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Disjunktion* (Junktor: "entweder - oder": Quantor: $\asymp$).

Die *Disjunktion* $A \asymp B$ ist genau dann wahr, wenn die Aussagen A und B verschiedene Wahrheitswerte haben.

Die Wahrheitstafel für die Disjunktion ist:

A	B	$A \asymp B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \asymp B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \asymp A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.23. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x \text{ ist geradzahlig}\}$.

	A	B	$A \asymp B$
Entweder ist $2 < 4$ oder ist 2 geradzahlig	w	w	f
Entweder ist $3 < 4$ oder ist 3 geradzahlig	w	f	w
Entweder ist $4 < 4$ oder ist 4 geradzahlig	f	w	w
Entweder ist $5 < 4$ oder ist 5 geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.24. Werden zwei Aussagen durch *wenn - so* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Implikation* (Folgerung) (Junktor: "wenn - so"; Quantor: $\Rightarrow$).

Außer der formulierung "wenn A, so B", werden für eine Implikation auch andere Wendungen benutzt: "aus A folgt B"; "A ist eine hinreichende Bedingung für B"; "B ist eine notwendige Bedingung für A".

A ist die *Voraussetzung* (Prämisse), B ist die *Behauptung* (Konklusio).

Die *Implikation* $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist.

Die Wahrheitstafel für die Implikation ist:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bemerkung 1.25. Jede Implikation, deren Behauptung wahr ist, ist auch wahr, unabhängig davon, ob die Voraussetzung wahr ist oder nicht. Ebenso ist jede Implikation wahr, deren Voraussetzung falsch ist, unabhängig davon, ob die Behauptung wahr ist oder nicht.

Aus der Gültigkeit der Folgerung $A \Rightarrow B$ läßt sich durch *Kontraposition* der Schluß ziehen: Immer, wenn B falsch ist, dann ist auch A falsch (denn andernfalls - d.h. wenn A wahr wäre - müßte wegen $A \Rightarrow B$ auch B wahr sein).

$A \Rightarrow B$ bedeutet dasselbe, wie $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Die Implikation ist *nicht* umkehrbar, d.h die Aussagen A und B dürfen nicht gegenseitig vertauscht werden.

Beispiel 1.26. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x \text{ ist geradzahlig}\}$.

	A	B	$A \Rightarrow B$
Wenn $2 < 4$, so ist 2 geradzahlig	w	w	w
Wenn $3 < 4$, so ist 3 geradzahlig	w	f	f
Wenn $4 < 4$, so ist 4 geradzahlig	f	w	w
Wenn $5 < 4$, so ist 5 geradzahlig	f	f	w

Es gilt die Folgerung $A \Rightarrow B$, wenn alle Lösungen von $H_1(x)$ auch Lösungen von $H_2(x)$ sind.

Aufgabe 1.27. Man untersuche, ob der Folgerungspfeil korrekt verwendet wurde:

a) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$;
b) $(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$;
c) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$;
d) $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$;
e) $z = \sqrt{4} \Rightarrow z^2 = 4$;
f) $x(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$;
g) $x^2 < 16 \Rightarrow x < 4$;
h) $x^2 < 16 \Rightarrow x < 4 \wedge x > -4$;
i) $k^2 > 16 \Rightarrow k > 4$;
j) $x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$;
k) $(z-4)(z+5) = 0 \Rightarrow z = 4 \vee z = -5$.

Beispiel 1.28. (1) Zu beweisen ist die Irrationalität von der Zahl $\sqrt{2}$.

Beweis. Statt die Aussage $p = \{\sqrt{2} \text{ ist irrational}\}$ zu beweisen, widerlegt man die Aussage $\overline{p} = \{\sqrt{2} \text{ ist rational}\}$.

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann ist $\sqrt{2}$ darstellbar als Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ nicht beide durch 2 teilbar. (Sonst kürze man den Bruch.) Aus $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und damit $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade. Dann ist auch m gerade, $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. (Denn das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade!) Aus $2n^2 = m^2$ und $m = 2k$ folgt $2n^2 = 4k^2$, d.h. $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n gerade.

Das ist ein Widerspruch; m, n sollten nicht beide durch 2 teilbar sein.

□

(2) Für je zwei positive Zahlen a, b gilt: $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

Indirekter Beweis. Es sei $a^2 < b^2$.

Annahme: $a \geq b$. Dann folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$, also $a^2 \geq b^2$.

Das ist ein Widerspruch.

Beweis durch Übergang zur Kontraposition. Anstelle von $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ beweisen wir die Kontraposition der Aussage: $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$.

Aus $a \geq b$ folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und mit Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$. Also ist $a^2 \geq b^2$.

□

Erklärung 1.29. Werden zwei Aussagen durch *genau dann, wenn* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Äquivalenz* (Junktor: "genau dann, wenn"; Quantor: $\Leftrightarrow$).

Man sagt:

- Genau dann, wenn $A(x)$ gilt, gilt auch $B(x)$.
- Wenn $A(x)$, so $B(x)$ und umgekehrt.
- $A(x)$ ist notwendig und hinreichend für $B(x)$ bzw.
- $B(x)$ ist notwendig und hinreichend für $A(x)$.
- $A(x)$ ist äquivalent zu $B(x)$.

A und B dürfen dabei vertauscht werden.

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Zwei Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ sind äquivalent genau dann, wenn die Lösungsmengen beider Aussageformen übereinstimmen.

Bei der Umformung von Gleichungen zur Lösungsfindung darf man daher nur Äquivalenzumformungen vornehmen, d.h. Gleichungsumformungen, die die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung nicht verändern.

Aufgabe 1.30. Man untersuche durch Vergleich der Lösungsmengen, ob folgende Aussageformen äquivalent sind (d.h. ob der Äquivalenzpfeil zutreffend angewendet wurde):

$$\begin{array}{ll} a)\ x = 7 \Leftrightarrow x^2 = 49; & x = 1 \vee x = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0; \\ c)\ \dfrac{x-1}{x-2} = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1; & d)\ x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0; \\ e)\ \sqrt{x} = -4 \Leftrightarrow x = 16; & f)\ x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3. \end{array}$$

Bemerkung 1.31. Bei allen Aussagenverbindungen der formalen Logik ist zu beachten, daß der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung nicht vom Sinn (der Intension) der Einzelaussagen, sondern nur von deren Wahrheitswert abhängt. Sie werden deshalb **extensionale** Aussagenverbindungen genannt.

Erklärung 1.32. Eine aus einzelnen Aussagen mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen wahr ist, nennt man *aussagenlogisch allgemeingültig*, ein *Gesetz der Aussagenlogik* oder eine *Tautologie*.

Sind A und B zusammengesetzte Aussagen und ist $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie, so nennt man A und B *aussagenlogisch equivalent.*

Ist $A \Rightarrow B$ eine Tautologie, so sagt man: Die Aussage A *folgt aussagenlogisch aus* B.

Beispiel 1.33. Ist A eine Aussage, so ist die Aussage $A \vee \overline{A}$ eine Tautologie.

Aufgabe 1.34. (1) Im Grundbereich der natürlichen Zahlen sind folgende mathematischen Ausdrücke gegeben:

$$\begin{array}{llll} a)\ 3/18; & b)\ 3x \geq 0; & c)(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; & \\ d)\ 4/b; & e)\ 4 + c < 8; & f)\ \dfrac{5x-4}{3} = 6; & g)\ \dfrac{2x+2}{4}. \end{array}$$

Man bestimme die Aussagen, die Aussagenformen und die Terme.

(2) Man quantifiziere die Beispiele $b)$ bis $e)$ in Aufgabe 1 mit Hilfe der Quantoren $\forall$ oder $\exists$ so, daß stets wahre Aussagen entstehen.

(3) Gegeben sind folgende Aussagenverbindungen:
   a) Eine natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade.
   b) Eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist auch durch 3 teilbar.
   c) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie gerade und durch 3 teilbar ist.

   Um welche Aussagenverbindungen handelt es sich?

(4) Mit den Aussagen
   A: 5 ist ein Teiler von 15.
   B: 7 ist eine ungerade Zahl.
   C: 9 ist eine Primzahl.
   D: 8 ist durch 2 teilbar.
   E: 8 ist eine ungerade Zahl.
   F: 2 ist eine Primzahl.

   sind nachstehende Aussagenverbindungen aufzubauen und auf ihren Wahrheitswert zu prüfen:
   a) $A \wedge B$ b) $A \wedge C$ c) $A \vee D$ d) $E \Rightarrow F$
   e) $E \vee C$ f) $B \Leftrightarrow F$ g) $D \Rightarrow E$ h) $C \Leftrightarrow E$

(5) Man negiere folgende Aussagen:
   a) Das Papier aller Bücher ist weiß.
   b) Es ist nicht wahr, daß $3 + 2 = 5$ ist.
   c) Alle Studenten unserer Seminargruppe erreichen im Fach Mathematik die Note "*Sehr gut*".

(6) Welche Eigenschaft besitzen die Zahlen, für die die Konjunktion $A \wedge B$ der folgenden Aussagen gilt?
   Aussage A: Eine gegebene Zahl ist durch 3 teilbar,
   Aussage B: Eine gegebene Zahl ist durch 4 teilbar.

(7) Man überprüfe durch Aufstellen von Wahrheitstabellen die folgenden *Gesetze der (zweiwertigen) Aussagenlogik* (Aussagenalgebra). Dabei behauptet der Äquivalenzpfeil $\Leftrightarrow$, daß die Wahrheitstabellen übereinstimmen:

a) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\quad \overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$;
$A \vee (B \wedge C) \not\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge C$.

b) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$; $\quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

c) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

d) $A \vee A \Leftrightarrow A$; $\quad A \wedge A \Leftrightarrow A$.

e) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$; $\quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

f) $A \vee \overline{A}$ immer war; $\quad A \wedge \overline{A}$ immer falsch.

2. Grundbegriffe der Mengenlehre

2.1. **Der Mengenbegriff.** In der Umgangssprache bezeichnet das Wort *Menge* eine unbestimmte, nicht näher bekannte Anzahl gleichartiger Objekte. Wir sprechen von der Menge der Zuschauer bei einem Fußballspiel, der Menge der Neubauten einer Stadt, der Menge der Teilnehmer an einer Kundgebung.

In der Mathematik ist der Begriff der Menge ein Grundbegriff, der sich nicht auf noch allgemeinere Begriffe zurückführen läßt, sich nicht definieren läßt (wie der Begriff *Punkt* in der Geometrie oder *war* in der Logik).

Von Georg Kantor (1845 - 1918), dem Begründer der klassischen Mengenlehre, stammt die folgende Definition einer Menge:

Erklärung 2.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die *Elemente* der Menge genannt werden - zu einem Ganzen.

Nach dieser Erklärung soll unter einer Menge eine Gesamtheit von wirklichen oder gedachten Objekten verstanden werden, wenn vor der Zusammenfassung von jedem Objekt einwandfrei festgestellt bzw. entschieden werden kann, ob es der Gesamtheit angehört oder nicht.

Die grundlegende Beziehung zwischen einer Menge und ihren Elementen, die sogenannte *Element-Mengen-Relation*, wird kurz symbolisiert durch $x \in M$ (gelesen: x ist ein Element der Menge M oder x gehört zu M), bzw. $x \notin M$ (gelesen: x ist nicht Element der Menge M oder x gehört nicht zu M).

Bei der Bildung von Mengen muß vorausgesetzt werden, daß ein Grundbereich, dem die einzelnen Elemente der Menge entnommen werden, bereits vorgegeben ist.

Zur eindeutigen Festlegung einer Menge formulieren wir das *Mengenbildungsprinzip*:

Ist $H(x)$ eine Aussageform über einem gegebenen Grundbereich G, so gibt es eine eindeutig bestimmte Menge M, die genau diejenigen Elemente des Grundbereiches enthält, für die $H(x)$ wahre Aussagen ergibt.

Eine Menge kann demnach folgenderweise beschrieben werden:

(1) durch die Angabe des jeweiligen Grundbereiches und einer die Menge M erzeugenden Aussageform $H(x)$ (d.h. durch eine die Menge charakterisierende Eigenschaft).
Schreibweise: $M = \{x \mid x \in G \wedge H(x)\}$ (gelesen: M gleich Menge aller x, mit x Element von G und $H(x)$).

(2) durch die Aufzählung aller ihrer Elemente.
Schreibweise: $M = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Dabei ist die Reihenfolge innerhalb der Mengenklammern unerheblich.

Die vollständige Aufzählung aller Elemente ist nur bei endlichen Mengen (d.h. bei Mengen mit endlich vielen Elementen) möglich.

Unendliche Mengen (d.h. Mengen mit mehr als endlich vielen Elementen) müßen gemäß (1) beschrieben werden.

(3) durch graphische Darstellung.

Zur graphischen Veranschaulichung von Mengen benutzt man häufig sogenannte Venn-Diagramme, d.h. berandete Punktmengen in der Zeichenebene. Die Menge wird veranschaulicht durch die Menge aller im berandeten Bereich liegengen Punkte.

Bei der Festlegung einer Menge spielen die Aussageformen $H^*(x) : x = x$ und $H_0(x) : x \neq x$ eine besondere Rolle.

Die Aussageform $H^*(x) : x = x$ wird offensichtlich von jedem Objekt des vorgegebenen Grundbereiches G erfüllt; deshalb wird die dadurch festgelegte Menge auch als *Grundmenge* bezeichnet.

Die Aussageform $H_0(x) : x \neq x$ wird dagegen, unabhängig vom betrachteten Grundbereich, von keinem Objekt erfüllt; die entsprechende Menge enthält also kein Element und wird *leere Menge* (symbolisch: $\emptyset$) genannt. Die leere Menge wird in der Literatur auch als Nullmenge bezeichnet.

Die Menge $M = \{0\}$ ist eine Einermenge, da sie ein (eiziges) Element, die Zahl 0, enthält, während die Nullmenge 0 Elemente (kein Element) besitzt bzw. leer ist.

Beispiel 2.2. (1) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$;
(2) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\} = \{0\}$;
(3) $\emptyset = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x^2 - 3 = 0)\}$;
(4) $L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 - 3 = 0)\} = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.

Bestimmte Zahlenmengen, die häufig in der Mathematik verwendet werden, haben genormte Symbole:

(1) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen);
(2) $\mathbb{Z} := \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (Menge der ganzen Zahlen);
(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x = \dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0\}$ (Menge der rationalen Zahlen);
Fügt man die sogenannten *irrationalen* Zahlen (wie z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{10}$, π, ...) zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hinzu, so ergibt sich
(4) $\mathbb{R}$:={Menge der reellen Zahlen}.

Bemerkung 2.3. Mit $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ wollen wir die jeweils *positiven* und mit $\mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{R}_0^+$ die jeweils *nichtnegativen* ganzen, rationalenn bzw. reellen Zahlen bezeichnen. Analog bedeutet $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ die Menge der um die Zahl 0 erweiterten natürlichen Zahlen.

Aufgabe 2.4. (1) Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:
a) $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x^2 + 2x - 15 = 0)\}$;
b) $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge (x^2 + 2x - 15 = 0)\}$;
c) $M = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 + 4 = 0)\}$.

(2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Angabe wenigstens einer Eigenschaft:
a) {1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81};
b) {2; 11; 101; 1001};
c) {1; -1}.

(3) Welche folgender vier Aussagen ist richtig?

$$a)\ 3 \in \{3\};\quad b)\ \{3\} \in \{3\};\quad c)\ \{3\} \in 3;\quad d)\ 3 \in 3.$$

2.2. **Relationen zwischen Mengen.** Zwischen Mengen können verschiedene *Relationen* (Beziehungen) bestehen. Elementare Mengenrelationen sind *Gleichheit* und *Enthaltensein* (Teilmengeneigenschaft).

Gleichheit zweier Mengen

Erklärung 2.5. Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, geschrieben $A = B$, wenn sie nur dieselben Elemente enthalten.

$$A = B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Eine Menge $\{a\}$ mit einem Element ist sorgfältig zu unterscheiden von dem Element a selbst. Es gilt: $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$.

Gleiche Mengen können durch verschiedene Aussageformen erzeugt werden.

Beispiel 2.6. (1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2x/20\}$; $B = \{1; 2; 5; 10\}$. Beide Mengen enthalten nur dieselben Elemente; es gilt $A = B$.

(2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2x < 7\}$. Beide Mengen enthalten nur dieselben Elemente; es gilt $A = B$.

Die Mengengleichheit ist eine *Äquivalenzrelation*, d.h. sie ist sicher

a) reflexiv: $A = A$;
b) symmetrisch: $A = B \Rightarrow B = A$;
c) transitiv: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

Teilmengenrelation

Erklärung 2.7. Gehören *alle* Elemente einer Menge A zugleich einer Menge B an, so heißt A *Teilmenge* von B.

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Anstelle von $A \subseteq B$ (gelesen: A ist Teilmenge von B oder A ist enthalten in B) ist auch $B \supseteq A$ (gelesen: B ist Obermenge von A oder B umfaßt A) gebräuchlich.

Es gilt stets:

$M \subseteq M$ Jede Menge ist (unechte) Teilmenge von sich selbst.

$\emptyset \subseteq M$ Die leere Menge ist in jeder Menge enthalten.

Beim Enthaltensein wird, wenn notwendig, unterschieden zwischen *enthalten* und *echt enthalten*. Die Formulierung "echt enthalten" ist wesentlich strenger als "enthalten". Sie fordert, daß die Menge B außer den gleichen Elementen wenigstens ein Element mehr enthält als die Menge A.

Erklärung 2.8. Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* der Menge B, wenn A Teilmenge von B ist und außerdem mindestens ein Element $x \in B$ existiert, das nicht zu A gehört.

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

Die Mengenrelation Enthaltensein umfaßt den Fall der Gleichheit zweier Mengen.

Im Falle der Gleichheit von A und B gilt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Die Teilmengenrelation ist eine *Ordnungsrelation*, d.h. sie ist sicher

a) reflexiv: $A \subseteq A$;
b) identitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$;
c) transitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Beispiel 2.9. Die Studenten einer Seminargruppe bilden eine Menge im mathematischen Sinne. Diese Menge soll mit G bezeichnet werden. Die Menge M der männlichen Studenten dieser Seminargruppe ist eine Teilmenge von G. Es existiert noch eine andere Teilmenge von G, die Menge W der weiblichen Studenten dieser Seminargruppe. Man nennt die Menge W die *Komplementärmenge* von M in G und bezeichnet sie mit $\overline{M}$ (gelesen: M quer).

Erklärung 2.10. Ist $H(x)$ eine Aussageform über einer Grundmenge G, dann heißen die Mengen $M = \{x \mid x \in G \wedge H(x)\}$ und $\overline{M} = \{x \mid x \in G \wedge \overline{H(x)}\}$ *zueinander komplementäre Mengen* in G.

$$M \subseteq G \Rightarrow \forall x : x \in \overline{M} \Leftrightarrow x \in G \wedge x \notin M.$$

Beispiel 2.11. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbb{N}} := \{... -3, -2, -1, 0\}$, d.h. $\overline{\mathbb{N}}$ enthält alle negativen ganzen Zahlen und die Zahl Null.

Die Negation der Teilmengenbeziehung bedeutet: A ist nicht Teilmenge von B ($A \nsubseteq B$), wenn nicht alle Elemente von A auch zu B gehören, wenn es also mindestens ein Element von A gibt, das nicht zugleich Element von B ist.

Erklärung 2.12. Die Menge $P(M)$ aller Teilmengen einer Menge M heißt die *Potenzmenge* der Menge M.

$$P(M) := \{X \mid X \subseteq M\}.$$

Die Elemente der Potenzmenge sind selbst Mengen.

Solche Mengen, deren Elemente selbst Mengen sind, werden *Mengensysteme* genannt.

Beispiel 2.13. $A = \{2; 3; 4\} \quad \Leftrightarrow$

$$P(A) = \{\emptyset; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{3; 4\}; \{2; 3; 4\}\}.$$

Erklärung 2.14. Wenn in einem Satz von einer unbestimmten ganzen Zahl n die Rede ist, die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, nicht unterhalb eines gewissen Anfangswertes a zu liegen, so kann man die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes häufig dadurch dartun, daß man folgendes nachweist:

i) Der Satz ist richtig für den Anfangswert a der Zahl n, also kurz für $n = a$;
ii) Der Satz ist, wenn k irgendeine nicht unterhalb a gelegene Zahl bedeutet und seine Gültigkeit für $n = a, n = a + 1, ..., n = k$ vorausgesetzt wird, auch für den nächstfolgenden Wert $n = k + 1$ richtig.

Diese Methode ist als *Schluß von n auf $n + 1$* oder als die *Methode der vollständigen mathematischen Induktion* bekannt.

Satz 2.15. *Ist M eine endliche Menge und bezeichnet $|M| = n$ die Anzahl ihrer Elemente, so gilt für die Elementenzahl der Potenzmenge $|P(M)| = 2^{|M|} = 2^n$.*

Beweis. Wir wenden die Methode der *vollständigen mathematischen Induktion* an.

- Ist M die leere Menge $\emptyset$, dann hat diese nur sich selbst zur Teilmenge:

$$M = \emptyset \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow P(M) = \{\emptyset\} \Rightarrow |P(M)| = 2^0 = 1.$$

- Ist M einelementig, d.h. $M = \{a\}$, so kann die Potenzmenge nur die leere Menge $\emptyset$ und M selbst als Elemente besitzen:
$$P(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\} \Rightarrow |P(\{a\})| = 2^1 = 2.$$
- Für $M = \{a; b\}$ wird die Potenzmenge bereits vierelementig:
$$P(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\} \Rightarrow |P(\{a; b\})| = 2^2 = 4.$$
- Für $M = \{a; b; c\}$ ist $P(\{a; b; c\})$ achtelementig:
$$P(\{a; b; c\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$$
$$\Rightarrow |P(\{a; b; c\})| = 2^3 = 8.$$
- Wir nehmen nun allgemein die Richtigkeit des Gesetzes für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an und versuchen daraus die Gültigkeit für $n + 1$ herzuleiten.

  Es sei $M = \{a_1;\, a_2; ...;\, a_n;\, a_{n+1}\}$ eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Dann gibt es nach unserer Induktionsannahme genau 2^n Teilmengen, die das Element a_{n+1} nicht enthalten. Hinzu kommen noch einmal 2^n Teilmengen, die a_{n+1} als Element besitzen. Das sind insgesamt $2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

□

Aufgabe 2.16. (1) Formulieren Sie die Aussage $A \neq B$ formal in Zeichen.

(2) Auf der Grundmenge G aller Dreiecke seien folgende Mengen erklärt:
A $= \{x \mid x$ ist gleichseitiges Dreieck$\}$
B $= \{x \mid x$ ist gleichschenkliges Dreieck$\}$
C $= \{x \mid x$ ist rechtwinkliges Dreieck$\}$
D $= \{x \mid x$ ist Dreieck mit wenigstens einem 45°-Winkel$\}$
Stellen Sie graphisch die Beziehungen zwischen diesen Mengen dar.

(3) Welche Mengen werden durch folgende Aussageformen erzeugt, wenn als Grundbereich die Menge der ganzen Zahlen gewählt wird?
a) $H_1(x) : -3 \leq x \leq 3; \quad H_2(x) : -3 < x < 3;$
b) $H_3(x) : -3 < x + 2 \leq 3; \quad H_4(x) : -3 \leq x + 2 < 3;$
c) $H_5(x) : -6 \leq 2x \leq 6; \quad H_6(x) : -6 < 2x < 6.$

2.3. **Operationen (Verknüpfungen) mit Mengen.** Mengen lassen sich durch verschiedene Mengenoperationen miteinander verknüpfen, so daß sich stets wieder eine Menge ergibt (sogenannte *innere Verknüpfungen*).

Die Durchschnittsmenge

Die Menge $A \cap B$ (gelesen: A geschnitten B) aller Elemente, die sowohl einer Menge A als auch einer Menge B angehören, ist der *Durchschnitt* von A und B.
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Beispiel 2.17. (1) $M_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \quad M_2 = \{2; 4; 6; 8; 10\} \quad \Rightarrow$
$$M_1 \cap M_2 = \{2; 4; 6\}.$$
(2) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}; \quad M_2 = \{2; 4\} \quad \Rightarrow$
$$M_1 \cap M_2 = \{2; 4\} = M_2.$$

(3) $M_1 = \{-1; -2; -3\}; \quad M_2 = \{1; 2; 3\} \quad \Rightarrow$

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

Sind A und B durch die mengenbildenden Eigenschaften $H_1(x)$ bzw. $H_2(x)$ erklärt, d.h.

$$A = \{x \mid x \in G \wedge H_1(x)\}, \quad B = \{x \mid x \in G \wedge H_2(x)\},$$

so fordert die Durchschnittsmenge die Erfüllung beider Eigenschaften:

$$A \cap B = \{x \mid x \in G \wedge H_1(x) \wedge H_2(x)\}.$$

Haben beide Mengen keine gemeinsamen Elemente, so ist ihr Durchschnitt leer; die Mengen heißen in diesem Fall *elementenfremd* oder *disjunkt*.

Aufgabe 2.18. A, B, C seien Mengen. Es gilt stets:

(1) $A \cap A = A, \quad \emptyset \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset;$

(2) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A;$

(3) die Mengendurchschnittsverknüpfung ist *kommutativ* und *assoziativ*:
$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

Erst die Assoziativität ermöglicht eine Verallgemeinerung der Durchschnittsverknüpfung auf mehr als zwei Mengen.

Erklärung 2.19. Der Mengenterm

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in G \wedge x \in A_i, \forall i = 1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$$

heißt *generalizierter Durchschnitt* der Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$.

Beispiel 2.20. Hochwertige technische Erzeugnisse werden einer Vielzahl von Kontrollen unterworfen, bevor sie in den Vertrieb kommen. Interpretieren wir A_i als die Menge der Produkte, welche die i-te Kontrolle fehlerfrei passiert haben, so wird nach $n(\in \mathbb{N})$ Prüfungen gerade die Menge $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ für den Vertrieb freigegeben, da genau diese Erzeugnisse sämtliche Prüfungen überstehen konnten.

Die Vereinigungsmenge

Die Menge $A \cup B$ (gelesen: A vereinigt B) der Elemente, die wenigstens einer der Mengen A und B angehören, heißt die *Vereinigung* der Mengen A und B.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Für ein Element x der Vereinigung $A \cup B$ ist stets genau ein der folgenden drei Sachverhalte erfüllt:

I) x gehört nur zu $A : x \in A \wedge x \notin B;$

II) x gehört nur zu $B : x \notin A \wedge x \in B;$

III) x gehört zu $A \cap B : x \in A \wedge x \in B.$

Zusatz 2.21. *Ein Element gehört* **nicht** *der Vereinigung $A \cup B$ an, wenn es weder Element der einen noch der anderen Menge ist:*

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B.$$

Erklärt man A und B durch die Eigenschaften $H_1(x)$ bzw. $H_2(x)$ für Elemente x einer Grundmenge G, so verlangt die Vereinigungsmenge die Erfüllung wenigstens einer der beiden Eigenschaften:

$$A \cup B = \{x \mid x \in G \wedge (H_1(x) \vee H_2(x))\}.$$

Beispiel 2.22. (1) $M_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad M_2 = \{2; 4; 6; 8; 10\} \Rightarrow$
$M_1 \cup M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$;

(2) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}, \quad M_2 = \{2; 4\} \Rightarrow$
$M_1 \cup M_2 = M_1$.

Aufgabe 2.23. A, B, C seien Mengen. Es gilt stets:

(1) Die Vereinigungsverknüpfung ist *kommutativ* und *assoziativ*:

$$A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

(2) $A \cup A = A; \quad \emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$;

(3) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; \quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$;

(4) $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.

Erklärung 2.24. Der Mengenterm $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ heißt *generalizierte Vereinigung* der Mengen $A_1, ..., A_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i \in (1, 2, ..., n) : x \in A_i.$$

Nun läßt sich jede Menge als generalizierte Vereinigung der Einermengen ihrer Elemente schreiben:

$$M = \{a_1; a_2; ...; a_n; ...\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\} \cup ...$$

Aufgabe 2.25. A, B, C seien Mengen. Es gelten folgende Aussagen (die *Distributivgesetze*):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 2.26. Beweisen Sie:

$$A \cap (A \cup B) = A; \quad A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cup (A \cap B) \cup [A \cap (B \cup C \cup A)] = A.$$

Erklärung 2.27. Die *Differenz* (die Restmenge) $A \setminus B$ (gelesen: A ohne B) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A, nicht aber zu B gehören.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \;\; (A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A \cap B\}).$$

Beispiel 2.28. (1) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad B = \{2; 4; 6; 8; 10\} \Rightarrow$

$$A \setminus B = \{1; 3; 5\}, \quad B \setminus A = \{8; 10\}.$$

(2) $A = \{1; 2; 3; 4\}, \quad B = \{2; 4\} \Rightarrow$

$$A \setminus B = \{1; 3\}, \quad B \setminus A = \emptyset.$$

Aufgabe 2.29. A, B, C seien Mengen.

(1) Es gilt stets

$$A \setminus A = \emptyset; \quad \emptyset \setminus A = \emptyset; \quad A \setminus \emptyset = A; \quad \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset.$$

(2) Die Verknüpfung *Differenz* ist weder kommutativ, noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C).$$

Den Zusammenhang zwischen Enthaltensein, Differenz und Komplementärmenge zeigen die folgenden Beziehungen (Grundmenge G):

$$\begin{array}{lcl} M \subset G & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus M; \\ M = G & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus G = \emptyset; \\ M = \emptyset & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus \emptyset = G. \end{array}$$

Aufgabe 2.30. A, B, C seien Mengen. Mit hilfe von Mengenbildern (Venn-Diagrammen) überprüfe man, ob die folgenden Gesetze der Mengenlehre gültig sind:

(1) Satz vom Widerspruch: $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

(2) Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

(3) Gesetz von de Morgan: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(4) Gesetz von de Morgan: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(5) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

(6) Es sei G eine Grundmenge und es sei $A \subseteq G \Rightarrow$
$A \cap (G \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (G \setminus A) = G, \quad G \setminus (G \setminus A) = A$.

(7) $A \subseteq G, \quad B \subseteq G \quad \Rightarrow \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(8) $A \subseteq G, \quad B \subseteq G \quad \Rightarrow \quad A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}, \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

(9) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A, \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(10) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

(11) $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subset C, \quad A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.

2.4. **Paarmengen, Produktmengen, Abbildungen.** Zusammenfassungen von Objekten auf Grund bestimmter Eigenschaften definieren Mengen; Beziehungen zwischen Objekten führen zu den Begriffen der Abbildung und der Funktion.

Bisher haben wir Elemente von Mengen nur als vereinzelte Objekte, wie z.B. Zahlen oder Variable, kennengelernt.

Ausgehend von zwei Mengen A und B und einer vorgegebenen Beziehung zwischen den Elementen von A und B untersuchen wir je ein $x \in A$ und ein $y \in B$ daraufhin, ob zwischen diesen die betreffende Beziehung besteht. Ist dies der Fall, so bringen wir diese Eigenschaft mathematisch dadurch zum Ausdruck, daß wir diese beiden Elemente zu einem *geordneten Elementenpaar* (x, y) zusammenfassen.

Erklärung 2.31. Unter einem *geordneten Paar* wird eine Zweiermenge verstanden, die erst durch Angabe der beiden Elemente und deren Reihenfolge eindeutig bestimmt ist.

Wir weisen ausdrücklich auf den Unterschied zwischen geordnetem Elementenpaar (x, y) und zweielementiger Menge $\{x, y\}$ (Zweiermenge) hin:

Für das geordnete Paar (x, y) fordern wir

(a) $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$;

(b) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$,

während für eine Menge von zwei Elementen bekanntlich

$$\{a; b\} = \{b; a\}; \ \{a; b\} = \{c; d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

gilt.

Erklärung 2.32. Die Menge $A \times B$ (gelesen: A kreuz B) aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ heißt die *Produktmenge* (das kartesische Produkt, die Kreuzmenge) der Mengen A und B

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

x und y nennt man *Koordinaten* des geordneten Paares $(x, y) \in A \times B$.

Da es bei der Paarbildung auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, ist diese Mengenverknüpfung sicher **nicht** kommutativ:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Durch Zurückführung auf den Paarbegriff erklärt man rekursiv

$$(a_1, a_2, a_3) := ((a_1, a_2), a_3)$$

für das Tripel,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) := ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

für das Quadrupel, und allgemein für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) := ((a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$$

für das n-tupel. Ein Tripel ist also ein Paar, dessen erstes Element selbst ein Paar ist, entsprechend ist ein Quadrupel ein Paar, dessen erstes Element ein Tripel ist usw.

Demnach ist **scharf zu trennen** zwischen

$$(A \times B) \times C = \{((x, y), z) \mid (x, y) \in A \times B \wedge z \in C\}$$

und

$$A \times (B \times C) = \{(x, (y, z)) \mid x \in A \wedge (y, z) \in B \times C\}.$$

Als Folge der Negation $((x, y), z) \neq (x, (y, z))$ gilt das Nichtbestehen der Assoziativität

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

Die Mengen A und B in $A \times B$ können auch übereinstimmen. Besonders wichtig ist der Fall $A = B = \mathbb{R}$. Statt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schreibt man auch $\mathbb{R}^2$ (gelesen: $\mathbb{R}$ zwei).

Aufgabe 2.33. Bestimmen Sie $M_1 \times M_2$ bzw. $M_2 \times M_1$, falls

(1) $M_1 = \{2; 3\}, \quad M_2 = \{3; 4; 5\}$;

(2) $M_1 = \{2; 3\}, \quad M_2 = \{2; 3\}$;

(3) $M_1 = \{a; e; i\}, \quad M_2 = \{n; m\}$.

Aufgabe 2.34. Mit Hilfe der Definitionen zeige man die Gültigkeit folgender *Distributivgesetze*:

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Erklärung 2.35. Sind zwei Mengen A und B gegeben, so heißt jede Teilmenge $\mathcal{R}$ der Produktmenge $A \times B$ eine *Abbildung* aus A in B.

Beispiel 2.36. (1) $M_1 = \{a; b; c; d; e; f\}$, $M_2 = \{5; 6; 7; 8\}$ $\mathcal{R} = \{(a, 5); (b, 6); (c, 7)\}$.
Es gilt: $\mathcal{R} \subset M_1 \times M_2$.
(2) $M_1 = \{a; b; c\}$, $M_2 = \{5; 6; 7\}$ $\mathcal{R} = \{(a, 5); (b, 6); (c, 7)\}$.
Es gilt: $\mathcal{R} \subset M_1 \times M_2$.

Alle an erster Stelle bzw. alle an zweiter Stelle stehenden Elemente der geordneten Paare der Teilmenge $\mathcal{R}$ bilden ihrerseits je eine neue Menge, die als *Vorbereich* $V_{\mathcal{R}}$ von $\mathcal{R}$ bzw. als *Nachbereich* $N_{\mathcal{R}}$ von $\mathcal{R}$ bezeichnet wird.

Im Beispiel (1) besteht der Vorbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen a, b und c; der Nachbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen 5, 6, 7. Dabei gilt: $V_{\mathcal{R}} \subset M_1$, $N_{\mathcal{R}} \subset M_2$.

Im Beispiel (2) besteht der Vorbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen a, b und c; der Nachbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen 5, 6, 7. Dabei gilt: $V_{\mathcal{R}} = M_1$, $N_{\mathcal{R}} = M_2$.

Ist $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, so gilt $V_{\mathcal{R}} \subseteq A \wedge N_{\mathcal{R}} \subseteq B$. Die Menge A heißt dann *Quellmenge*, und die Menge B *Zielmenge* der Abbildung $\mathcal{R}$. Die Elemente des Vorbereiches werden *Urbilder* oder *Originale*, die Elemente des Nachbereiches *Bilder* genannt.

In Abhängigkeit von den Relationen, die zwischen dem Vorbereich von $\mathcal{R}$ und der Menge A einerseits und dem Nachbereich von $\mathcal{R}$ und der Menge B andererseits bestehen, unterscheidet man vier verschiedene Möglichkeiten der Abbildung zweier Mengen aufeinander:

$V_{\mathcal{R}} \subset A \ \wedge \ N_{\mathcal{R}} \subset B$	Abbildung *aus A in B*;
$V_{\mathcal{R}} \subset A \ \wedge \ N_{\mathcal{R}} = B$	Abbildung *aus A auf B*;
$V_{\mathcal{R}} = A \ \wedge \ N_{\mathcal{R}} \subset B$	Abbildung *von A in B*;
$V_{\mathcal{R}} = A \ \wedge \ N_{\mathcal{R}} = B$	Abbildung *von A auf B*.

Erklärung 2.37. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig* (oder nur eindeutig), wenn sie keine zwei Paare mit gleicher erster, aber verschiedener zweiter Koordinate enthält, d.h. *jedes Urbild besitzt genau ein Bild*:

$$\forall x \in V_{\mathcal{R}},\ \forall y \in N_{\mathcal{R}},\ \forall z \in N_{\mathcal{R}} \ : \ (x, y) \in \mathcal{R} \ \wedge \ (x, z) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow y = z.$$

Erklärung 2.38. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn sie keine zwei Paare mit gleicher zweiter, aber verschiedener erster Koordinate enthält, d.h. *jedes Bild hat genau ein Urbild*:

$$\forall x \in V_{\mathcal{R}},\ \forall y \in N_{\mathcal{R}},\ \forall z \in V_{\mathcal{R}} \ : \ (x, y) \in \mathcal{R} \ \wedge \ (z, y) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow x = z.$$

Erklärung 2.39. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *eineindeutig*, wenn jedes Urbild genau ein Bild (Rechtseindeutigkeit) und auch umgekehrt jedes Bild genau ein Urbild (Linkseindeutigkeit) besitzt.

Erklärung 2.40. Wird die einer Abbildung $\mathcal{R}$ zugrunde liegende Zuordnung umgekehrt, wird also die Rolle von Urbild und Bild vertauscht, so entsteht eine neue Abbildung. Sie wird als *Umkehrabbildung* oder inverse Abbildung $\mathcal{R}^{-1}$ bezeichnet.

$$(y,x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R} \ \wedge \ V_{\mathcal{R}^{-1}} = N_{\mathcal{R}} \ \wedge \ N_{\mathcal{R}^{-1}} = V_{\mathcal{R}}.$$

Der Vorbereich einer Abbildung wird auch *Definitionsmenge* (Urbildmenge, Originalmenge, Definitionsbereich, Argumentenbereich), und der Nachbereich auch *Bildmenge* genannt.

Ordnet f dem Element $x \in A$ das Element (das eindeutigbestimmte Element) $y \in B$ zu, so bringen wir diese (rechtseindeutige) Zuordnung durch $y = f(x)$ (oder $f : x \mapsto y$) zum Ausdruck.

Bei analytischen Anwendungen heißt $y = f(x)$ die *Funktionsgleichung*.

Die Zuordnungsvorschrift f ist die *Funktion*.

Wichtig! $f(x)$ bzw. y ist **nicht** die Funktion, sondern der *Funktionswert* an der Stelle x.

Erklärung 2.41. (i) Eine Abbildung f von A in B mit $x \mapsto f(x)$ heißt *injektiv*, wenn unterschiedlichen Urbildern stets auch unterschiedliche Bilder zugeordnet werden:

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \text{ mit } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

d.h. ein Bild gehört niemals zu zwei verschiedenen Urbildern.

(ii) Eine Abbildung von A auf B mit $x \mapsto f(x)$ heißt *surjektiv*, wenn jedes Bild **mindestens** ein Urbild hat.

(iii) Eine Abbildung f von A auf B, die gleichzeitig injektiv und surjektiv ist, heißt *bijektiv*.

Bijektionen von A auf B sind **stets** eineindeutig (umkehrbareindeutig).

Zum Vergleich zweier Mengen in Bezug auf ihren Reichtum an Elementen dient der Begriff der *Mächtigkeit*, der es vor allem gestattet, auch unendliche Mengen miteinander zu vergleichen.

Erklärung 2.42. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es mindestens eine eineindeutige Abbildung der beiden Mengen aufeinander gibt.

Beim Vergleich endlicher Mengen kann als Kriterium an Stelle des Begriffs der Mächtigkeit auch die Anzahl der Elemente herausgezogen werden. Das ist bei unendlichen Mengen, bei denen sich keine exakte Anzahlbestimmung durchführen läßt, nicht möglich. Es kann hierbei sogar passieren, daß *ein Teil gleichmächtig dem Ganzen ist*, denn eine unendliche Menge kann die gleiche Mächtigkeit wie eine ihrer echten Teilmengen haben.

Aufgabe 2.43. (1) Die Menge der natürlichen Zahlen läßt sich eineindeutig auf die Menge der geraden (ungeraden) natürlichen Zahlen abbilden.

Beweis.

$$\begin{array}{cccccccc}
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & ... & 2n & ... \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & ... & \updownarrow & ... \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... & n & ... \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & ... & \updownarrow & ... \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & ... & 2n-1 & ...
\end{array}$$

(2) Beweisen Sie die Gleichmächtigkeit der Mengen A, B:
  a) $A = \{$beiderseits abgeschlossene echte Strecke$\}$,
     $B = \{$beiderseits abgeschlossene echte Strecke$\}$.
  b) A und B sind Kreise.
  c) $A = \{$offene echte Strecke$\}$,
     $B = \{$Halbkreis$\}$.

Erklärung 2.44. Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich.*

Unendliche Mengen, die im sinne dieser Definition nicht abzählbar sind, werden *überabzählbar* genannt.
Eine unendliche überabzählbare Menge ist $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2.45. (1) Bilden Sie den Durchschnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$ und die Differenz $A \setminus B$ der Mengen A und B unter der Bedingung, daß $A \subset B$ gilt.

(2) Bilden Sie Durchschnitt, Vereinigung und Differenz der Mengen:
  (a) $A = \{3; 4; 6; 7; 8\}, \quad B = \{2; 4; 5; 6; 7\}$;
  (b) $A = \{a; b; c\}, \quad B = \emptyset$;
  (c) $A = \emptyset, \quad B = \{1; 3; 5; 7\}$.

(3) Gegeben sind die Mengen

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2/x \wedge x \leq 20\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3/x \wedge x < 20\},$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5/x \wedge x \leq 30\}.$$

Bilden Sie $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

(4) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3x/36\}, \quad M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 8 \wedge 2/x\};$$

$$M_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 12\}, \quad M_4 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4x/48\}.$$

Geben Sie an, welche Relationen zwischen den einzelnen Mengen bestehen.

(5) Aus der Produktmenge $M_1 \times M_2$ mit $M_1 = \{a; b; c\}$ und $M_2 = \{1; 2; 3\}$ sind folgende Teilmengen herausgegriffen worden:

$$\begin{array}{ll} F_1 = \{(a;1);(b;1);(c;1)\}, & F_2 = \{(a;3);(b;2);(c;1)\}; \\ F_3 = \{(a;1);(b;2);(c;3)\}, & F_4 = \{(a;1);(b;2);(c;2)\}; \\ F_5 = \{(a;1);(c;3)\}, & F_6 = \{(a;2);(b;2)\}. \end{array}$$

Untersuchen Sie um welche Abbildung (aus - in, aus - auf, von - in, von - auf) es sich jeweils handelt und welche der Abbildungen eindeutig bzw. eineindeutig sind.

Es seien $f_1 : V_{f_1} \to N_{f_1}$, $f_2 : V_{f_2} \to N_{f_2}$ zwei Abbildungen mit $N_{f_1} \cap V_{f_2} = M \neq \emptyset$. Es seien $A := \{x \mid x \in V_{f_1} \wedge f_1(x) = y \in M\}$, $B := \{z \mid y \in M \wedge f_2(y) = z \in N_{f_2}\}$.
Dann gilt $A \subseteq V_{f_1}$ und $B \subseteq N_{f_2}$.

Erklärung 2.46. Die Verknüpfung von f_1 mit f_2 (in dieser Reihenfolge) heißt gemäß $f_2 \circ f_1 : A \to B$ mit $x \mapsto (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ die *Verkettung* (Komposition) der Abbildungen f_1 und f_2.

Ist $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung (Funktion) von A auf B und ist $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrabbildung zu f, so gilt stets:

$$\forall y \in B : f \circ f^{-1}(y) = y, \quad \forall x \in A : f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Bezeichnet $i_M : M \to M$ mit $x \mapsto x\ \forall x \in M$ die *identische* Abbildung auf M, so ist $f \circ f^{-1} = i_B$ bzw. $f^{-1} \circ f = i_A$.

Erklärung 2.47. Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, welche die Eigenschaft hat unverändert zu bleiben, falls man die Koordinaten jedes Paares vertauscht, heißt *symmetrisch*:

$$\forall x \in A \wedge y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Genau die symmetrischen Abbildungen sind gleich ihren Umkehrungen.

Aufgabe 2.48. Beweisen Sie, daß folgende Relationen gültig sind:

(1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(4) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

(5) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$
$= \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$;

(6) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$, wenn $n \geq 3$ ist;

(7) $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{n}$, wenn $n \geq 2$ ist;

(8) $2^n > n^2 + 2$, wenn $n \geq 5$ ist;

(9) $2^n > 2n$, wenn $n \geq 3$ ist;

(10) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, wenn $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1, \infty)$;

(11) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} < 1$;

(12) $\dfrac{1}{2}\, n^2 < 1 + 2 + 3 + ... + n < \dfrac{1}{2}\,(n+1)^2$;

(13) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$;

(14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = \frac{1}{3}\,(4n^2 - 1)n$;

(15) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$;

(16) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \ x \neq 1$;

(17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x},\ x \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(18) $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(2n+1)x)}{2\sin(\frac{x}{2})},\ x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(19) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})},\ x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(20) $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|,\ n \in \mathbb{N}.$

3. Kombinatorik

Die Kombinatorik dient zur Lösung einer besonderen Gattung von Aufgaben, deren Eigenart sich am leichtesten an Beispielen klarmachen läßt.

(1) Zwölf Personen sollen namentlich in eine Liste eingetragen werden. Die Eintragung kann in sehr verschiedener Reihenfolge vorgenommen werden, etwa nach dem Alter oder der Größe der Personen, nach der alphabetischen Ordnung ihrer Namen oder nach andersartigen Gesichtspunkten. Auf wieviel verschiedene Arten ist diese Einordnung möglich?

(2) Ein Kind hat 10 Perlen, und zwar 2 rote, 3 schwarze und 5 weiße. Die Perlen gleicher Farbe haben jedesmal auch gleiche Größe und gleiche Form, so daß sie nicht voneinander unterschieden werden können. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Kind diese 10 Perlen von unten nach oben auf eine lotrecht gehaltene Nadel reihen?

(3) Aus einem Kartenspiel, welches 32 verschiedene Karten enthält, bekommt ein Spieler bei jedem Spiele 10 Karten zugeteilt. Wieviel verschiedene Zusammenstellungen kann der Spieler nach und nach erhalten, wenn er bei jedem neuen Spiel eine neue Zusammenstellung bekommt und das Spiel hinreichend lange fortsetzt?

(4) Wieviel verschiedene Wörter von je 5 Buchstaben kann man aus den 25 Buchstaben des Alphabets zusammensetzen, wenn man ein und denselben Buchstaben in das nämliche Wort mehrmals aufnehmen darf und auch solche Zusammenstellungen wie z.B. pkktk, welche in keiner Sprache vorkommen, ja sich gar nicht aussprechen lassen, als Wörter gelten läßt?

(5) Wieviel Steine würde ein Dominospiel enthalten, wenn die Nummern nicht wie gewöhnlich von 0 bis 6, sondern von 0 bis 12 gingen?

Bei der Beschäftigung mit diesen und ähnlichen Aufgaben handelt es sich um mehr als eine Spielerei, weil diejenigen Schlußweisen und Sätze, auf welchen ihre Lösung beruht, in vielen wichtigen Teilen der Mathematik Anwendung finden.

In jedem der angeführten Beispiele wird nach der Anzahl der verschiedenen *Zusammenstellungen* gefragt, welche sich aus gewissen gegebenen Dingen unter bestimmten, von Fall zu Fall verschiedenen Bedingungen bilden lassen. Stets denkt man sich eine wohl abgegrenzte Mehrheit von Dingen in Betracht gezogen, von denen genau angegeben ist, welche als gleich und welche als verschieden angesehen werden sollen.

Jedes einzelne der Dinge, welche bei einer Aufgabe der Kombinatorik in Betracht gezogen werden, heißt ein *Element*.

Beispielsweise hat man unter "Elementen" bei der 1. Aufgabe die Namen der 12 Personen, bei der 3. Aufgabe die 32 Karten der Spiels und bei der 5. Aufgabe die Nummern von 0 bis 12 zu verstehen.

Zur Bezeichnung von Elementen benutzt man Ziffern oder auch Buchstaben. Verschiedene Elemente werden stets durch verschiedene Zeichen, gleiche durch das nämliche Zeichen dargestellt.

Man spricht von Zusammenstellungen *ohne Berücksichtigung der Anordnung*, oder von solchen *mit Berücksichtigung der Anordnung.* Beispielsweise ist es für einen Kartenspieler in der Regel gleichgültig, in welcher Reihenfolge er die ihm zugeteilten Karten erhält. Dagegen ist es beim Druck eines verschiedene Buchstaben enthaltenden Wortes nicht einerlei, in welcher Reihenfolge der Setzer diese Buchstaben zusammenfügt.

3.1. **Permutationen.**

Erklärung 3.1. Wenn eine endliche Anzahl von Elementen vorgelegt ist, so nennt man jede Zusammenstellung, welche dadurch entsteht, daß man die sämtlichen gegebenen Elemente in irgendeiner Anordnung nebeneinander setzt, eine *Permutation* der gegebenen Elemente (von dem lateinischen Worte *permutare* = umsetzen; Permutation = Ergebnis einer Umsetzung).

Zwei Permutationen der gleichen Elemente können sich überhaupt nur durch die Anorgnung der Elemente unterscheiden. Sie gelten immer als verschieden, sobald die Reihenfolge in ihnen nicht genau die nämliche ist.

Erste Grundaufgabe: Anzahl der Permutationen voneinander verschiedener Elemente.
Es seien n voneinander verschiedene Elemente gegeben. In wieviel verschiedenen Anordnungen kann man dieselben in eine Reihe nebeneinander stellen, oder wenigstens gestellt denken?

Ist nur ein Element $\{1\}$ vorhanden, so gibt es nur die eine Anordnung: $\mathcal{P} = 1$.
Sind zwei Elemente $\{1; 2\}$ gegeben, so gibt es zwei Permutationen: $\mathcal{P}_1 = 12$ und $\mathcal{P}_2 = 21$.
Sind drei elemente $\{1; 2; 3\}$ gegeben, so gibt es 6 Permutationen:

$$\mathcal{P}_1 = 123,\ \mathcal{P}_2 = 231,\ \mathcal{P}_3 = 312,\ \mathcal{P}_4 = 132,\ \mathcal{P}_5 = 321,\ \mathcal{P}_6 = 213.$$

Bei 4 Elementen $\{1; 2; 3; 4\}$ gibt es 24 Permutationen:

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{P}_1 = 1234 & \mathcal{P}_2 = 1243 & \mathcal{P}_3 = 1324 & \mathcal{P}_4 = 1342 \\
\mathcal{P}_5 = 1423 & \mathcal{P}_6 = 1432 & \mathcal{P}_7 = 2134 & \mathcal{P}_8 = 2143 \\
\mathcal{P}_9 = 2314 & \mathcal{P}_{10} = 2341 & \mathcal{P}_{11} = 2413 & \mathcal{P}_{12} = 2431 \\
\mathcal{P}_{13} = 3124 & \mathcal{P}_{14} = 3142 & \mathcal{P}_{15} = 3214 & \mathcal{P}_{16} = 3241 \\
\mathcal{P}_{17} = 3412 & \mathcal{P}_{18} = 3421 & \mathcal{P}_{19} = 4123 & \mathcal{P}_{20} = 4132 \\
\mathcal{P}_{21} = 4213 & \mathcal{P}_{22} = 4231 & \mathcal{P}_{23} = 4312 & \mathcal{P}_{24} = 4321
\end{array}$$

Allgemein gilt für eine beliebige Anzahl n von Elementen der folgende

Satz 3.2. *Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkte* 1.2.3...n *aller natürlichen Zahlen von* 1 *bis* n.

Beweis. I. Die Behauptung ist richtig für $n = 1, 2, 3$. (Das haben wir direkt gezeigt.)

II. Es läßt sich nun zeigen: Wenn die Behauptung für irgendeine Anzahl von Elementen, etwa für $n = k$ Elemente, richtig ist, so ist sie auch für die nächst größere Anzahl $n = k + 1$ von Elementen richtig.

Sind $k+1$ verschiedene Elemente gegeben, so kann man ihre Permutationen in $k+1$ Arten einteilen, indem man jedesmal die mit dem gleichen Element beginnenden Permutationen zu einer Art vereinigt. Die Permutationen jeder einzelnen Art werden dann dadurch erhalten, daß man auf das die Art kennzeichnende Anfangselement alle Permutationen der k übrigen Elemente folgen läßt. Die Anzahl der Permutationen einer Art ist daher jedesmal gleich der Anzahl der Permutationen von k verschiedenen Elementen, also nach Annahme gleich $1.2.3...k$. Folglich erhalten die $k+1$ verschiedenen Arten zusammen $1.2.3...k.(k+1)$ Permutationen.

Aus I. und II. zusammen folgt, daß der ausgesprochene Satz für *jede* Anzahl von Elementen gültig ist.

□

Wichtig! Ein etwas anderes Beweisverfahren ist das folgende: Man bezeichnet mit P_n die (noch unbekannte) Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen. Dann ist $P_{k+1} = (k+1)P_k$. Da nun direkt festgestellt wurde, daß $P_1 = 1$ ist, so können wir die Gleichungen $P_1 = 1,\ P_2 = 2P_1 = 2.1,\ P_3 = 3P_2 = 3.2.1, ..., P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},\ P_n = nP_{n-1}$ hinschreiben, aus denen sich sofort die zu erweisende Gleichung $P_n = 1.2.3...n$ ergibt. Es gilt nämlich:

$$P_1.P_2.P_3...P_{n-1}.P_n = 1.2P_1.3P_2...(n-1)P_{n-2}.nP_{n-1} \quad \Rightarrow$$
$$P_n = 1.2.3...(n-1).n,$$

da $P_1.P_2...P_{n-1} \neq 0$ ist.

Dieses Verfahren, das in der Formel $P_{k+1} = (k+1)P_k$ seine Hauptstütze hat, nennt man *Rekursionsverfahren*, die Formel dann eine *Rekursionsformel*.

Doch, es ist nicht immer so einfach, aus einer Rekursionsformel das allgemeine Gesetz zu erschließen. Sehr häufig muß man sich mit der Möglichkeit der rekutsiven Berechnung der späteren Werte mit Hilfe der Anfangswerte begnügen.

Für das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen, oberhalb 1 liegenden, ganzen Zahl n einschließlich hat man wegen seines häufigen Vorkommens ein abkürzendes Zeichen $n!$ (gelesen: n-Fakultät) eingeführt. Außerdem gilt als **Festsetzung**, daß die Zeichen $0!$ und $1!$ beide die Zahl 1 bedeuten sollen. Für negative und für nicht ganzzahlige Werte von n hat das Zeichen $n!$ **keine** Bedeutung.

Man sagt, die Permutationen von mehreren gegebenen Elementen seien *lexikographisch* (natürlich) geordnet, wenn von irgendzwei verschiedenen Permutationen stets diejenige vorangeht, deren erstes Element das niedrigere ist; falls jedoch die ersten Elemente gleich sind, diejenige, deren zweites Element das niedrigere ist; falls auch noch die zweiten Elemente übereinstimmen, diejenige, deren drittes Element das niedrigere ist, usf.

In der lexikographischen Anordnung der Permutationen steht an erster Stelle diejenige Permutation, welche die gegebenen Elemente in der natürlichen Anordnung enthält.

3.1.1. *Die Inversion.*

Erklärung 3.3. Es sei eine endliche Anzahl verschiedener Elemente gegeben, zwischen denen eine von vornherein gegebene Anordnung besteht, und es werde eine bestimmte Permutation dieser Elemente ins Auge gefaßt. Wenn irgend zwei Elemente in dieser Permutation umgekehrte Stellung haben wie in der natürlichen Rangordnung, so daß das höhere Element dem niedrigeren vorangeht, so sagt man, daß diese Elemente in jener Permutation eine *Inversion* oder einen *Fehlstand* bilden (Inversion = Umkehrung der natürlichen Anordnung).

Satz 3.4. *Wenn man aus einer Permutation P von lauter verschiedenen Elementen eine andere Permutation P' dadurch ableitet, daß man irgend zwei Elemente miteinander vertauscht, aber sonst keine Änderung vornimmt, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl.*

Beweis. Bei Vertauschung von zwei benachbarten Elementen ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen stets um eine Einheit:

$$a_1\,a_2\,...\,a_k\,a_i\,...\,a_n \quad\mapsto\quad a_1\,a_2\,...\,a_i\,a_k\,...\,a_n.$$

Zweitens werde vorausgesetzt, daß die Elemente i und k in P nicht nebeneinander stehen, sondern durch eine Gruppe von α Elementen $e_1, e_2, ..., e_\alpha$ voneinander getrennt seien:

$$i\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,k \;\mapsto\; k\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,i.$$

Wir führen den Bestandteil $i\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,k$ der Permutation P schrittweise in den Bestandteil $k\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,i$ der Permutation P' über, und zwar so, daß bei jedem einzelnen Schritt immer nur zwei benachbarte Elemente vertauscht werden:

$$i\,e_1\,e_2\,e_3\,...\,e_\alpha\,k \;\mapsto\; e_1\,i\,e_2\,e_3\,...\,e_\alpha\,k \;\mapsto\; e_1\,e_2\,i\,e_3\,...\,e_\alpha\,k \;\mapsto\; ...$$

Nach $\alpha+1$ Schritten ergibt sich $e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,k\,i$, und hieraus entsteht nach α Schritten

$$e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,k\,i \;\mapsto\; e_1\,e_2\,...\,k\,e_\alpha\,i \;\mapsto\; ... \;\mapsto\; e_1\,k\,e_2\,...\,e_\alpha\,i \;\mapsto\; k\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,i$$

der Bestandteil $k\,e_1\,e_2\,...\,e_\alpha\,i$ der Permutation P'. Der erwähnte allmähliche Übergang läßt sich in $2\alpha+1$ Schritten ausführen.

Da die Anzahl der vorhandenen Inversionen bei jedem Schritt um eine Einheit zu- oder abnimmt, so ist, wenn jene Anzahl p-mal um eine Einheit zugenommen und q-mal um eine Einheit abgenommen hat, die Gesamtänderung gleich $p-q$. Das ist aber, da $p+q=2\alpha+1$ und $p-q=2\alpha+1-2q=2(\alpha-q)+1$ ist, ebenfalls eine ungerade Zahl.

□

Eine Permutation von lauter verschiedenen Elementen, zwischen denen eine von vornherein gegebene Anordnung besteht, heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthält. (Die Zahl 0 gilt nach allgemein angenommener Übereinkunft als gerade Zahl.) Diejenige Permutation, welche die gegebenen Elemente in der natürlichen Anordnung enthält, ist den geraden Permutationen zuzurechnen.

Die Anzahl der geraden Permutationen von n verschiedenen Elementen ist, wenn $n>1$ ist, immer ebenso groß wie die der ungeraden, nämlich gleich $\frac{1}{2}(n!)$.

Zweite Grundaufgabe: Anzahl der Permutationen von Elementen, die nicht alle verschieden sind.

Es seien n Elemente gegeben, welche nicht alle voneinander verschieden sind, sondern so in p Arten zerfallen, daß die Elemente jeder einzelnen Art verschieden sind. Die erste dieser Arten enthalte α_1, die zweite α_2, ..., die letzte α_p Elemente, wobei $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p=n$ ist. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Anzahl der Permutationen?

Es seien beispielsweise die Elemente $a, a; b, b, b; c, c, c, c, c$ gegeben. Wenn man an den gleichen Elementen irgendwelche unterschiedlichen Merkmale anbringt, so erhält man 10 verschiedene Elemente, welche beziehentlich durch $a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ bezeichnet werden mögen. Diese liefern 10! Permutationen. Nimmt man nun die unterscheidenden Merkmale, welche man an den beiden Elementen a, der ersten Art angebracht hatte, wieder fort, so fallen je zwei der erwähnten Permutationen in eine zusammen, z.B. $b_2\,c_3\,a_1\,b_1\,c_1\,c_2\,b_3\,a_2\,c_4\,c_5$ und $b_2\,c_3\,a_2\,b_1\,c_1\,c_2\,b_3\,a_1\,c_4\,c_5$.

Für die Elemente $a, a; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ist daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!}$. Nimmt man sodann auch die unterscheidenden Merkmale, welche man an den Elementen b, b, b der zweiten Art angebracht hatte, wieder fort, so fallen je 3! Permutationen in eine zusammen, nämlich jedesmal alle diejenigen, welche dadurch ausenander hervorgehen, daß man bloß die Elemente b_1, b_2, b_3 untereinander vertauscht. Für die Elemente $a, a; b, b, b; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ist daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!\,3!}$.

Nimmt man endlich die an den Elementen der letzten Art angebrachten unterscheidenden Merkmale auch noch fort, so fallen von den noch übrigen Permutationen je 5! in eine zusammen. Für die Elemente $a, a; b, b, b; c, c, c, c, c$ wird daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!\,3!\,5!}$.

Ergebnis: Wenn n Elemente so in p Arten zerfallen, daß die Elemente jeder einzelnen Art einander gleich, Elemente verschiedener Arten jedoch verschieden sind, und die erste dieser Arten α_1, die zweite α_2, ..., die p-te α_p Elemente enthält, so ist die Anzahl der Permutationen stets gleich einer ganzen positiven Zahl:

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!...\alpha_p!} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!...\alpha_p!}$$

Aufgabe 3.5. (1) Ein Stadtteil von der Form eines Rechtecks ist auf seinen 4 Seiten von α Straßen durchzogen, welche dem einen und von β Straßen, welche dem anderen Paar von Gegenseiten des begrenzenden Rechtecks parallel laufen. Auf wieviel verschiedenen Wegen kann man, ohne Umwege zu machen, von einer der vier äußersten Ecken des Stadtteils zu der diagonal gegenüberliegenden äußersten Ecke gelangen?

Antwort: $\frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)!(\beta+1)!}$

(2) Wieviel verschiedene 6-stellige Zahlen kann man aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$ zusammenstellen?

Antwort: 5(5!)

(3) Welche ist die Anzahl der 5-stelligen ungeraden Zahlen, die man aus den Ziffern $2, 3, 4, 6, 8$ zusammenstellen kann?

(4) Aus wieviel Elementen kann man 6 (bzw. 120) Permutationen zusammenstellen?

(5) Rechnen Sie aus: $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; $\dfrac{n!}{(n+1)!}$; $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

(6) Welche Zahl ist größer: $2(n!)$ oder $(2n)!$; $\frac{1}{2}(2n)!$ oder $n!$?

3.2. **Kombinationen.**

Erklärung 3.6. Wenn mehrere Elemente gegeben sind und k eine positive ganze Zahl bezeichnet, welche jedoch die Anzahl der Elemente nicht übersteigt, so nennt man jede Zusammenstellung, die man erhält, indem man irgend k der gegebenen Elemente herausgreift und in irgendeiner Anordnung nebeneinander stellt (oder sich dies wenigstens ausgeführt denkt), eine *Kombination k-ter Ordnung* (oder auch k-ter Klasse) der gegebenen Elemente.

Unter den Kombinationen erster Klasse von irgendwelchen gegebenen Elementen sind natürlich diese Elemente selbst zu verstehen.

Man spricht von Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung und von Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung.

Dritte Grundaufgabe: Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung.

Man soll, unter der Voraussetzung, daß k eine ganze positive, nicht oberhalb n gelegene Zahl bezeichnet, die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen erhalten, und zwar

- mit Berücksichtigung der Anordnung;
- ohne Berücksichtigung der Anordnung.

I. Die Anordnung wird berücksichtigt.

Die Kombinationen zur ersten Klasse von n verschiedenen Elementen $1, 2, 3, ..., n$ stimmen mit diesen Elementen überein. Ihre Anzahl ist gleich n.

Die Kombinationen derselben n Elemente zur zweiten Klasse mit Berücksichtigung der Anordnung sind

$$\begin{array}{llllll}
12 & 13 & 14 & ... & 1(n-1) & 1n \\
21 & 23 & 24 & ... & 2(n-1) & 2n \\
... & ... & ... & ... & ... & ... \\
n1 & n2 & n3 & ... & n(n-2) & n(n-1)
\end{array}$$

Ihre Anzahl ist gleich $n(n-1)$.

Ist $n > 2$, so lassen sich Kombinationen der nämlichen Elemente zu dreien bilden. Die Kombinationen lauten:

$$\begin{array}{llll}
123 & 124 & ... & 12n \\
132 & 134 & ... & 13n \\
... & ... & ... & ... \\
1n2 & 1n3 & ... & 1n(n-1) \\
213 & 214 & ... & 21n \\
... & ... & ... & ... \\
n(n-1)1 & n(n-1)2 & ... & n(n-1)(n-2)
\end{array}$$

Die Anzahl der Zeilen ist gleich $n(n-1)$, und jede von ihnen enthält $n-2$ Kombinationen. Die Gesamtzahl aller Kombinationen dritter Ordnung ist $n(n-1)(n-2)$.

Allgemein gilt folgender

Satz 3.7. *Die Anzahl der Kombinationen zu je k von n verschiedenen Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung wird durch das Produkt $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ der Zahl n und der $k-1$ nächst kleineren ganzen Zahlen dargestellt.*

Beweis durch die Methode der vollständigen mathematischen Induktion.

Die Behauptung ist richtig für $k = 1, 2, 3$.

Wenn unter der Voraussetzung, daß n oberhalb 1 liegt, k eine bestimmte der Zahlen $1, 2, ..., (n-1)$ bezeichnet und die Behauptung für die Kombinationen k-ter Ordnung als richtig angenommen wird, so ergibt sich daraus auch ihre Richtigkeit für die Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung.

Denn hat man eine Kombination k-ter Ordnung, so gibt es jedesmal $n-k$ Elemente, welche in dieser Kombination noch nicht vorkommen. Fügt man von diesen Elementen je eines am Ende der betrachteten Kombination hinzu, so erhält man $n-k$ Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung. Und wenn man so mit allen Kombinationen k-ter Ordnung verfährt, so erhält man nach und nach alle Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung, und zwar jede nur einmal. Also ist die Anzahl der Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung $(n-k)$-mal so groß wie die der Kombinationen k-ter Ordnung, d.h. $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)$.

$\square$

II. Die Anordnung wird nicht berücksichtigt.

Wird auf die Anordnung keine Rücksicht genommen, so fallen von den Kombinationen, die im vorigen Fall zu untersuchen waren, jedesmal alle dijenigen in eine zusammen, welche die gleichen Elemente in verschiedener Anordnung enthalten. Da aber k verschiedene Elemente auf $k!$ verschiedene Arten in eine Reihe nebeneinander gestellt werden können, so ergibt sich der folgende

Satz 3.8. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung wird durch den Ausdruck* $\frac{n(n-1)(n-k+1)}{.}..1.2...k$ *gegeben.*

Beispiel 3.9. Die Anzahl aller verschiedenen Zusammenstellungen von je 10 Karten, welche ein Spieler aus einem Spiel von 32 verschiedenen Karten erhalten kann, ist

$$\frac{32.31...24.23}{1.2...9.10} = 64\,512\,240.$$

Unter der Voraussetzung, daß α eine beliebige, k dagegen eine natürliche Zahl bedeutet, setzt man

$$\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1.2...k} =: \binom{\alpha}{k}$$

(gelesen: α über k) und nennt diesen Ausdruck einen *Binomialkoeffizienten.*

Allgemein bedeutet $\binom{\alpha}{k}$ einen Bruch, dessen Nenner das Produkt der k ersten ganzen positiven Zahlen und dessen Zähler ebenfalls ein Produkt von k Faktoren ist, von denen der erste gleich α und jeder folgende um eine Einheit kleiner als der vorangehende ist.

Hiernach bedeutet das Zeichen $\binom{\alpha}{1}$ **stets** die Zahl α; ferner gilt **als Festsetzung**, daß das Zeichen $\binom{\alpha}{0}$ **stets** die Zahl 1 bedeuten soll, so daß speziell auch $\binom{0}{0} = 1$ zu setzen ist.

Beispiel 3.10. (1) $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3} = -4.$

(2) $\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3.4} = -\frac{5}{128}.$

(3) Wenn n und k nicht negative ganze Zahlen sind und k nicht größer als n ist, so gilt die folgende *Symmetrieeigenschaft*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Beweis.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)[(n-k)(n-k-1)...2.1]}{k!\,[(n-k)(n-k-1)...2.1]}$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(k+1)}{(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

(4) Es gilt ausnahmslos die folgende *Summeneigenschaft*:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Beweis.
Für $k = 0$ geht die Gleichung über in $\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} = \binom{\alpha+1}{1}$, d.h. $1 + \alpha = \alpha + 1$, und ist also richtig.
Ist aber k eine positive ganze Zahl, so ist

$$\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{1.2...k.(k+1)} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

und folglich

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k}\left(1 + \frac{\alpha-k}{k+1}\right) = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha+1}{k+1}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1.2.3...k.(k+1)} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

□

(5) Es ist ausnahmslos

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+n}{n} = \binom{\alpha+n+1}{n}.$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$.
Nehmen wir nun ihre Richtigkeit für $n = k$ schon als bewiesen an, so daß also
$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$ ist, so folgt, daß
$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+k}{k} + \binom{\alpha+k+1}{k+1} = \binom{\alpha+k+1}{k} + \binom{\alpha+k+1}{k+1} = \binom{\alpha+k+2}{k+1}$ ist.
Unsere Behauptung ist also auch für $n = k + 1$ richtig; sie gilt infolgedessen allgemein.

□

Bemerkung 3.11. Das Symbol $\binom{n}{k}$ wurde vom Schweizer Mathematiker *Leonard Euler* eingeführt und trägt auch seinen Namen: *das Eulersche Symbol*.

3.3. **Der binomische Lehrsatz.** Ein *Binom* ist eine zweigliedrige Summe $a+b$.

Der binomische Lehrsatz gibt an, wie n Faktoren eines Binoms in eine Summe entwickelt werden können.

Es gilt:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
(a+b)^0 = & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 = & & & & & a & + & b & & & & \\
(a+b)^2 = & & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & & \\
(a+b)^3 = & & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & & \\
(a+b)^4 = & & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4 & \\
(a+b)^5 = & a^5 & + & 5a^4b & + & 10a^3b^2 & + & 10a^2b^3 & + & 5ab^4 & + & b^5 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Es ist sofort ersichtlich, daß die Anzahl der Summanden stets um 1 größer ist als der Exponent. Schließlich ist die Summe der Exponenten von a und b in jedem Teilprodukt gleich dem Exponenten des Binoms. Auch die Berechnung der Koeffizienten unterliegt einer Gesetzmäßihkeit.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Jeder Koeffizient ist aus der Summe der beiden darüberstehenden berechnet. Diese dreieckförmige Anordnung heißt *Pascalsches Zahlendreieck*.

Unter Verwendung der Eulerschen Symbole nimmt das Pascalsche Zahlendreieck folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Satz 3.12. *(Der binomische Lehrsatz)*

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Beweis mit Hilfe der vollständigen mathematischen Induktion.

Die Gleichung ist richtig für $n = 1, 2, 3$.

Wenn der binomische Lehrsatz für $n = k$ richtig ist,

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k,$$

so ist er es für $n = k + 1$ ebenfalls. Wir multiplizieren beiderseits mit $(a + b)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \\
&+\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k-2}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k+1}{k}ab^k + b^{k+1} \\
&= (a+b)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Anwendungen des binomischen Lehrsatzes

(1) Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = b = 1$, so erhält man $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(2) Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

(3) Aus (1) und (2) folgt durch Addition $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1}.$$

(4) Aus (1) und (2) folgt durch Subtraktion $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}.$$

(5) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^n = \binom{2n}{n}.$$

Beweis. $(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + ... + \binom{2n}{n}x^n + ... + \binom{2n}{2n}x^{2n}$,

$(1+x)^n(1+x)^n = \{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + ... + \binom{n}{n}x^n\}\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + ... + \binom{n}{n}x^n\}$.

Wir vergleichen die Koeffizienten vor den gleichen Potenzen von x in diesen Gleichungen. Die Koeffizienten vor x^n sind:

$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$.

□

Vierte Grundaufgabe: Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung.

Man soll die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ermitteln, und zwar

- mit Berücksichtigung der Anordnung;
- ohne Berücksichtigung der Anordnung.

I. Die Anordnung wird berücksichtigt.

Aus n Elementen $1, 2, ..., n$ lassen sich genau n Kombinationen zur ersten Klasse bilden.

Zur zweiten Klasse lassen sich bei Zulassung von Wiederholungen und bei Berücksichtigung der Anordnung die folgenden n^2 Kombinationen bilden:

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & ... & 1n \\ 21 & 22 & 23 & ... & 2n \\ 31 & 32 & 33 & ... & 3n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n1 & n2 & n3 & ... & nn \end{array}$$

Satz 3.13. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung ist gleich n^k.*

Beweis durch die vollständige mathematische Induktion.

Die Behauptung ist richtig für $n = 1, 2$.

Unter der Annahme, daß die Behauptung für irgendein k schon bewiesen ist, läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung gleich n^{k+1} ist. Beachten Sie, daß sich der Induktionsschluß hier auf den Buchstaben k bezieht und daß die Anzahl n der verschiedenen Elemente fest bleibt!

Man erhält in der Tat diese letzteren sämtlich und jede von ihnen nur einmal, wenn man zu jeder der nach Voraussetzung vorhandenen n^k Kombinationen k-ter Ordnung nach und nach ein jedes der gegebenen n Elemente am Ende hinzusetzt. Die Anzahl der Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung ist somit $n^k.n = n^{k+1}$.

□

II. Die Anordnung wird nicht berücksichtigt.

Man denke sich zwischen den gegebenen Elementen eine bestimmte Anordnung festgesetzt und in jeder Kombination die darin vorkommenden Elemente so nebeneinander gestellt, wie sie in der natürlichen Anordnung aufeinander folgen. Dann gibt es folgende Kombinationen zu zweien mit unbeschränkter Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung:

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & ... & 1n \\ & 22 & 23 & ... & 2n \\ & & 33 & ... & 3n \\ & & & ... & ... \\ & & & ... & nn \end{array}$$

Ihre Anzahl ist $n + (n-1) + (n-2) + ... + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$.

Satz 3.14. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung ist gleich $\dbinom{n+k-1}{k}$.*

Beweis. Der Satz ist für $n = 1$ und $n = 2$ richtig.

Unter der Annahme, daß die Behauptung für irgendein k schon bewiesen ist, erhält man $\binom{n+k-1}{k}$ Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung, welche mit 1 anfangen, $\binom{n+k-2}{k}$ Kombinationen, welche mit 2 anfangen (und sich aus den $n-1$ Elementen $2, 3, ..., n$ bilden lassen), $\binom{n+k-3}{k}$

Kombinationen, welche mit 3 anfangen, ..., $\binom{n+k-n}{k} = \binom{k}{k} = 1$ Kombination, welche mit n anfängt.

Die Anzahl aller Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung ist somit

$$\binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k} + ... + \binom{k}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

□

Aufgabe 3.15. (1) In Einer Ebene seien n Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch ein und denselben Punkt laufen. Wie groß ist

a) die Anzahl ihrer Schnittpunkte;

b) die Anzahl der geraden Verbindungslinien, welche sich außer den gegebenen Geraden selbst zwischen diesen Schnittpunkten ziehen lassen, wenn niemals zwei dieser Verbindungslinien in eine zusammenfallen? Antwort: *a)* $\binom{n}{2}$; *b)* $3\binom{n}{4}$

(2) In einer Ebene seien n verschiedene Punkte gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.

a) Wie groß ist die Anzahl ihrer geraden Verbindungslinien?

b) Wie groß kann die Anzahl derjenigen Schnittpunkte dieser Verbindungslinien, welche, außer den ursprünglich gegebenen Punkten, selbst noch vorhanden sind, höchstens sein? Antwort: *a)* $\binom{n}{2}$; *b)* $3\binom{n}{4}$

(3) Wieviel Steine würde ein Dominospiel enthalten, wenn die Nummern nicht wie gewöhnlich von 0 bis 6, sondern von 0 bis n gingen? Antwort: $\binom{n+2}{2}$

(4) In einer Ebene seien n Punkte gegeben. Es sei $n \geq 4$ und es werde vorausgesetzt, daß keine 3 dieser Punkte auf ein und derselben Geraden und keine 4 auf ein und demselben Kreise liegen. Dann bestimmen je 3 Punkte einen Kreis. Wieviel verschiedene Kreise werden so erhalten? Antwort: $\binom{n}{3}$

4. Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen

In seiner Tätigkeit muß der Mensch häufig mit Zahlen umgehen. Dabei muß er ihre Struktur und die ihnen innewohnenden Gesetzmäßigkeiten kennen.

Der folgende Abschnitt stellt die Grundregeln und Rechengesetze für rationale Zahlen zusammen, ohne deren Kenntnis keine mathematische Anwendung möglich ist. Es handelt sich dabei um elementares mathematisches Grundwissen, das in der Mittelstufe einer jeden allgemeinbildenden Schulform behandelt wird.

4.1. **Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln.** Das Rechnen im Bereich der rationalen (bzw. der reellen) Zahlen stützt sich auf ein **vollständiges** und in sich **widerspruchsfreies** System elementarer **Grundregeln** (*Axiome* genannt), deren Gültigkeit nicht bewiesen wird, sondern als **unmittelbar einleuchtend** unterstellt wird.

Bemerkung 4.1. Um Axiome "beweisen" zu können, müßte man noch einfachere Grundgesetze kennen, deren "Beweis" noch einfachere Grundregeln fordert usw.

Die im folgenden vorgestellten sechs Gruppen von Grundgesetzen gehören bereits der elementarsten Kategorie an.

Es sei $\mathbb{M} = \{a, b, c, ...\}$ eine unendliche Menge, dessen Elemente *Zahlen* genannt werden.

I. *Grundgesetze der Gleichheit und der Anordnung*

(1) Die Zahlen bilden eine **geordnete Menge**, d.h. zwischen je zweien von ihnen, etwa $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$, besteht stets **eine und nur eine** der drei Beziehungen

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b.$$

Diese Anordnung gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) Es ist stets $a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{M}$ (reflexive Beziehung);

(3) Aus $a = b$ folgt $b = a \quad \forall\, a, b \in \mathbb{M}$ (symmetrische Beziehung);

(4) Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{M}$ (transitive Beziehung);

(5) Aus $a \leq b$ und $b < c$ oder aus $a < b$ und $b \leq c$ folgt $a < c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{M}$.

Man schreibt $a \neq b$ (gelesen: a ungleich b), wenn a nicht gleich b ist; $a \geq b$ (gelesen: a größer oder gleich b, mindestens gleich b, nicht kleiner als b), wenn a nicht kleiner als b ist; $a \leq b$ (gelesen: a kleiner oder gleich b, höchstens gleich b, nicht größer als b), wenn a nicht größer als b ist. Jede dieser Angaben schließt also genau eine der drei Anordnungsbeziehungen aus und läßt es unentschieden, welche der beiden anderen gültig ist.

Zusatz 4.2. *Aus $a = b$ zusammen mit $a = a'$ und $b = b'$ folgt $a' = b'$.*

Beweis. $a = a' \Rightarrow a' = a$ (Axiom I.3); $\quad a' = a \wedge a = b \Rightarrow a' = b$ (Axiom I.4); $a' = b \wedge b = b' \Rightarrow a' = b'$ (Axiom I.4).

□

Die Beziehung des Kleiner-Seins ist **transitiv**. Sie ist aber offenbar weder reflexiv noch symmetrisch.

In der Menge $\mathbb{M}$ führen wir nun die Operationen *Summe* und *Produkt* zweier Elemente ein.

II. *Grundgesetze der Addition*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es stets **genau** eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, die die *Summe* von a und b genannt und mit $a + b$ bezeichnet wird (Existenz der Summe).
Die *Addition* gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) dem Gesetz der Eindeutigkeit der Addition:
Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $a + b = a' + b'$.

(3) dem Kommutativgesetz der Addition:
Es ist stets $a + b = b + a$.

(4) dem Assoziativgesetz der Addition:
Es ist stets $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(5) dem Monotoniegesetz der Addition:
Aus $a < b$ folgt stets $a + c < b + c$.

III. *Grundgesetz der Subtraktion*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es stets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, für die $a + c = b$ ist (Existenz der Differenz).

Satz 4.3. *Aus* $a + c = a + c'$ *folgt rückwärts* $c = c'$.

Beweis. Aus $c < c'$ folgt $a + c < a + c'$, d.h. $a + c \neq a + c'$.
Aus $c' < c$ folgt, daß $a + c' < a + c$ ist, d.h. $a + c' \neq a + c$.
Für eine von c verschiedene Zahl c' kann also die Summe $a+c'$ nicht denselben Wert haben wie $a + c$.

□

Man nennt c die *Differenz* von b und a ($c := b - a$).

Satz 4.4. (*Die Existenz der Zahl Null*) *Es gibt in* $\mathbb{M}$ *eine ganz bestimmte Zahl, die, bei der Addition als Summand verwendet, keine Änderung hervorruft:*

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{M}.$$

Diese Zahl wird darum auch die bezüglich der Addition neutrale Zahl genannt und mit 0 *bezeichnet.*

Beweis. Es sei $a \neq a'$. Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl x, für die $a+x = a$ ist und eine (eindeutig bestimmte) Zahl x', für die $a' + x' = a'$ ist. Es folgt nach dem Assoziations- und dem Kommutationsgesetz, daß

$$a + a' = (a + x) + a' = a + (x + a') = a + (a' + x) = (a + a') + x$$

und

$$a + a' = a + (a' + x') = (a + a') + x'$$

ist. Nun folgt aus $(a + a') + x = (a + a') + x'$, daß $x = x'$ ist.

□

Nun endlich kann man die Zahlen in *positive* und *negative* teilen:
Eine Zahl heißt *positiv*, wenn sie größer als Null ist, und *negativ*, wenn sie kleiner als Null ist.

Für $0 - a$ schreibt man kürzer $-a$ und nennt diese Zahl die zu a *entgegengesetzte* Zahl.

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{M}$ gibt es **genau** eine **Gegenzahl** nämlich $-a \in \mathbb{M}$, so daß

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Satz 4.5. *Ist* $a > 0$, *so ist* $-a < 0$; *ist* $a < 0$, *so ist* $-a > 0$.

Beweis. Da nach der Definition von $-a$ nämlich $a + (-a) = 0$ ist, so kann $-a$, wenn $a > 0$ ist, weder $= 0$ noch > 0 sein. Es muß also $-a < 0$ sein:

$$a > 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > (-a).$$

Ganz entsprechend schließt man, daß $a < 0 \Rightarrow -a > 0$.

□

IV. *Grundgesetze der Multiplikation*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es etets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, die das *Produkt* von a und b genannt wird (Existenz des Produktes).

Die *Multiplikation* gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) dem Eindeutigkeitsgesetz der Multiplikation:
Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $ab = a'b'$.

(3) dem Kommutativgesetz der Multiplikation:
Es ist stets $ab = ba$.

(4) dem Assoziativgesetz der Multiplikation:
Es ist stets $(ab)c = a(bc)$.

(5) dem Distributivgesetz:
Es ist stets $(a + b)c = ac + bc$.

(6) dem Monotoniegesetz der Multiplikation:
Aus $a < b$ folgt, wenn c positiv ist, stets $ac < bc$.

Satz 4.6. *Für jede Zahl $a \in \mathbb{M}$ gilt $a.0 = 0.a = 0$.*

Beweis. Da $b + 0 = b$ ist, gilt
$a(b + 0) = ab \;\Rightarrow\; ab + a.0 = ab \;\Rightarrow\; a.0 = 0.$

□

Satz 4.7. *Das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv, dasjenige einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ, und dasjenige zweier negativer Zahlen ist positiv.*

Beweis. Ist $b > 0 \wedge c > 0$, so ist $bc > 0.c = 0$.
Ist $a < 0 \wedge c > 0$, so ist $ac < 0.c = 0$.
Ist $a < 0 \wedge b < 0$, so folgt zunächst, daß $[a + (-a)].b = 0.b = 0$, also $ab + (-a)b = 0$ oder $ab = -(-a)b$ ist.
Da $a < 0$ ist, so ist $-a > 0$ und $(-a)b < 0$. Es folgt, daß $-(-a)b > 0$ und $ab > 0$ ist.

□

Satz 4.8. *Ein Produkt zweier Zahlen ist dann und nur dann gleich 0, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren gleich 0 ist.*

Der Beweis folgt aus den Sätzen 4.6 und 4.7.

V. *Grundgesetz der Division*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$, deren erste nicht gleich 0 ist, gibt es stets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, für die $ac = b$ ist (Existenz des Quotienten).

Satz 4.9. *Aus $ac = ac'$ folgt rückwärts, falls nur $a \neq 0$ ist, daß auch $c = c'$ ist.*

Beweis. Wäre $c \neq c'$, so wäre die durch $c' = c + c''$ eindeutig bestimmte Zahl $c'' \neq 0$, und es wäre daher $ac' = a(c + c'') = ac + ac''$, also $ac' \neq ac$, da ja $ac'' \neq 0$ ist (Satz 4.8).

□

Es ist also auch die Division stets und mit eindeutigem Ergebnis ausführbar, falls nur der Nenner nicht gleich Null ist.
Die Division durch Null bleibt, wie man sagt, eine **sinnlose** oder **nicht definierte** Operation.
Sie ist unter allen Umständen auszuschließen!
Man nennt c den *Quotienten* von b und a und bezeichnet ihn mit $\frac{b}{a}$ oder $b : a$.

Satz 4.10. (*Die Existenz der Eins*) *Es gibt eine ganz bestimmte Zahl, die, bei der Multiplikation als Faktor verwendet, keine Änderung hervorruft:*

$$1.a = a.1 = a \ \forall a \in \mathbb{M}.$$

Diese Zahl wird darum die bezüglich der Muktiplikation neutrale Zahl genannt und mit 1 *bezeichnet.*

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{M} \setminus \{0\}$ gibt es **genau** eine **reziproke** Zahl nämlich $\frac{1}{a} \in \mathbb{M}$, so daß

$$a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.\, a = 1.$$

Jede Zahl der Art $1 + 1 + 1 + ... + 1$ wird eine *natürliche* Zahl genannt.

Die Differenz zweier natürlichen Zahlen ist eine *ganze* Zahl.

Jede *rationale* Zahl kann als Quotient zweier ganzen Zahlen, dessen Nenner $\neq 0$ ist, dargestellt werden.

VI. *Die Grundgesetze der ganzen Zahlen*

(1) *Archimedisches Grundgesetz*:
Sind a und b zwei positive Zahlen, so ist stets $a + a + ... + a > b$, wenn die Summe linkerhand eine geeignete Anzahl von Summanden enthält.
(2) Hat eine Menge von ganzen Zahlen die Eigenschaft, daß alle ihre Elemente größer als eine Zahl sind, so enthält sie eine kleinste Zahl.
(3) Hat eine Menge von ganzen Zahlen die Eigenschaft, daß alle ihre Elemente kleiner als eine Zahl sind, so enthält sie eine größte Zahl.

Durch die Zusammenstellung dieser Grundgesetze pflegt man auch den Zahlenbegriff selbst als definiert anzusehen:

Gehorchen die Elemente einer Menge $\mathbb{M}$ den vorstehenden Grundgesetzen I bis VI, so nennt man sie *Zahlen*, die Menge $\mathbb{M}$ selbst ein *Zahlensystem*.

4.2. **Graphische Darstellung. Absoluter Betrag.** Rationale Zahlen können in die Punktmenge einer Geraden abgebildet werden.

Da ein Punkt auf einer Geraden in **zwei entgegengesetzten** Laufrichtungen fortschreiten kann, so empfielt es sich zunächst, diese beiden Richtungen dadurch voneinander zu unterscheiden, daß man die eine als **positive** und die andere als **negative** Richtung bezeichnet. Dabei ist es meißt gleichgültig, welche der beiden Richtungen man als positive Richtung wählt.

Man wählt auf der zu orientierenden Geraden g zwei verschiedene Punkte O und E und vereinbart, daß die Richtung von O nach E als die positive angesehen werden soll. Wählt man nun die Strecke (OE) als **Längeneinheit** und trägt diese von O aus nach beiden Seiten wiederholt ab, so erhält man eine Schar von Punkten, die wir als die Bilder der ganzen Zahlen ansehen wollen, und zwar O als Bild der Zahl Null, E als Bild von 1, die weiteren ("nach rechts") folgenden Punkte als Bilder der natürlichen Zahlen $2, 3, 4, 5, ...$ und die "nach links" folgenden Punkte als Bilder der Zahlen $-1, -2, -3, -4, -5, ...$. Den Punkt O nennt man den **Nullpunkt** und den Punkt E den **Einheitspunkt**.

Es sei nun $r = \frac{a}{b}$ eine beliebige rationale Zahl, wobei a eine ganze und b eine natürliche Zahl ist. Teilen wir dann die Strecke zwischen dem Nullpunkt und dem Punkte a elementargeometrisch in b gleiche Teile, so sehen wir den (vom Nullpunkt aus) ersten der Teilpunkte als Bild der Zahl r an. Durch diese Festsetzung wird jeder rationalen Zahl genau ein Punkt der Geraden g zugeordnet.

Die Bildpunkte der rationalen Zahlen bezeichnen wir als die **rationalen Punkte** der Geraden.

Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen, rationalen Zahlen gibt es stets eine dritte rationale Zahl, die zwischen denen liegt (z.B. das arithmetische Mittel dieser Zahlen). Dieser Vorgang, beliebig fortgesetzt, führt zu der Schlußfolgerung, daß zwischen zwei voneinander verschiedenen rationalen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen.

Der Bereich der rationalen Zahlen bildet eine **dichte Menge**; die rationalen Punkte sind **überall dicht** auf der Zahlengerade gelegen.

Ausdrücklich sei hervorgehoben, daß **keineswegs** umgekehrt jeder Punkt der Zahlengerade Bild einer gewissen rationalen Zahl ist! Man stellte bereits vor mehr als 2000 Jahren mit Erstaunen fest, daß es neben den rationalen Zahlen beliebig viele weitere Zahlen gibt, die nicht als Bruch darstellbar, also *irrational* sind, z.B. die Zahl $\sqrt{2}$. Der Bereich der rationalen Zahlen hat also noch **Lücken**.

Um einen "lückenlosen" Zahlenbereich zu erhalten, wird eine Erweiterung vorgenommen. Man erhält dann den Bereich der **reellen Zahlen**. Dieser Bereich bildet eine **stetige Menge**.

Sind irgend zwei **rationale** Zahlen gegeben, so sind insbesondere die vier elementare Grundoperationen der **Arithmetik** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division mit ihnen immer ausführbar, und das Ergebnis der Rechnung ist **immer** eine rationale Zahl. In dieser Beziehung bildet die Menge der rationalen Zahlen ein **abgeschlossenes Ganzes**, einen *Rationalitätsbereich*.

Eine Menge, die den Axiomen $I - VI$ genügt, heißt *Körper*. Sowohl die rationalen Zahlen als auch die reellen Zahlen bilden bzgl. der Operationen " $+$ " und " $.$ " einen Körper.

Die Aufgabe des Wurzelausziehens (und viele andere Aufgaben) ist im Körper der rationalen Zahlen im allgemeinen nicht lösbar. Geometrisch zeigt sich diese Unvollkommenheit darin, daß , wenn man eine bestimmte Strecke als Maßeinheit wählt und mit ihr eine zweite Strecke messen will, im Körper der rationalen Zahlen keine Zahl zu existieren braucht, durch die diese Länge angegeben werden kann - etwa die Seite und die Diagonale eines Quadrates.

Das System der *reellen* Zahlen ist eine wohlbestimmte Menge, zu deren Elementen insbesondere die rationalen Zahlen gehören und mit deren Elementen nach genau denselben Regeln gerechnet werden darf wie mit diesen der rationalen Zahlen.

Sind a und b zwei beliebige reelle Zahlen und ist $a < b$, so bezeichnet man natürlich die Gesamtheit aller reellen Zahlen x, die der Bedingung $a \le x \le b$ genügen, als das *Intervall* $[a, b]$. Die Intervalle lassen sich als lückenlose Teilstrecken der Zahlengeraden (mit oder ohne Endpunkte) darstellen.

Oft benutzt man offene Intervalle, die symmetrisch um eine Stelle x_0 liegen, also links und rechts von der Stelle x_0 ein gleiches Stück der Zahlengeraden miteinschließen. Man nennt ein solches Intervall eine *ε-Umgebung* von x_0 und schreibt dafür $U_\varepsilon(x_0)$. Es gilt also

$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Eine ε-Umgebung hat die Länge 2ε.

Durch eine reelle Zahl a wird die Zahlengerade in zwei *Halbgeraden* (Strahlen) geteilt:

$\{x : \ x \ge a\}_{\mathbb{R}} = [a, \infty); \quad \{x : \ x \le a\}_{\mathbb{R}} = (-\infty, a].$

Bemerkung 4.11. Das System der reellen Zahlen kann auf **keine** Weise durch Hinzufügung neuer Elemente so erweitert werden, daß auch für die Elemente des erweiterten Systems die sämtlichen Grundgesetze der Arithmetik gültig bleiben.

Will man doch vom System der reellen Zahlen zu noch umfassenderen und darum vielleicht noch leistungsfähigeren Systemen aufsteigen, so kann dies **nur** durch den Verzicht auf die Gültigkeit einiger der Grundgesetze erkauft werden.

Ein solches erweitertes Zahlensystem ist das System der *complexen* Zahlen.

Der (absolute) Betrag einer reellen Zahl

Erklärung 4.12. Der (absolute) Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a ist diejenige nichtnegative reelle Zahl, für die gilt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn} \quad a > 0; \\ 0, & \text{wenn} \quad a = 0; \\ -a, & \text{wenn} \quad a < 0. \end{cases}$$

Satz 4.13. *Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt stets*

$$(a) \quad |a| \geq 0; \qquad (b) \quad \pm a \leq |a|;$$
$$(c) \quad |a| = |-a|; \qquad (d) \quad |ab| = |a||b|;$$
$$(e) \quad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|},\ a \neq 0; \quad (f) \quad \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|},\ a \neq 0.$$

Unter dem absoluten **Abstand** zweier Zahlen a, b versteht man den Betrag ihrer Differenz $|a-b|$ bzw. $|b-a|$. Insbesondere ist $|a-b| = |b-a|$.

$|a|$ ist also der Abstand von a bzw. $-a$ zum Nullpunkt.

Geometrisch ist $|a-b|$ die positiv gerechnete Länge des Intervalles zwischen a und b auf der Zahlengeraden (oder die absolute Abweichung voneinander).

Satz 4.14. *Für je zwei Zahlen a und b gelten die Dreiecksungleichungen*

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Aufgabe 4.15. (1) Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Es gilt stets

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|.$$

(2) Für $n = 0, 1, 2, ...$ ist stets $2^n > n$.

(3) Für die natürlichen Zahlen $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.

(4) Für nichtnegative Zahlen a und b und jedes natürliche n ist $a^n + b^n \leq (a+b)^n$.

(5) Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ist und die Nenner b und d positiv sind, so ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

(6) Es sei $n \geq 2$ und die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ seien sämtlich positiv, dann ist
$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) > 1 + (a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

(7) Es sei $n \geq 2$ und die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ seien sämtlich positiv, aber < 1, dann ist
$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

(8) Ist $0 < a < 1$ und n eine beliebige natürliche Zahl, so ist stets
$1 + a + a^2 + ... + a^n < \dfrac{1}{1-a}$.

(9) Ist $n \geq 2$ und $a > 0$ oder $0 > a > -1$, so ist
$(1+a)^n > 1 + na$ (Bernoullische Ungleichung).

(10) Für $n = 2, 3, ...$ ist stets

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist gleichbedeutend mit jeder der folgenden Aussagen:

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n}\frac{n^n}{(n-1)^n} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{n-1}{n} < \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Daß diese letzte Ungleichung richtig ist, folgt aus der Bernoullischen Ungleichung für $a = -\frac{1}{n^2}$.

Weiter ist nun für $n = 2, 3, ...$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + ... + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$.

Da aber für $2 \le k \le n$

$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!\, n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$

gilt, so ist für $n \ge 2$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$

□

(11) Für $n = 2, 3, ...$ ist stets

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Beweis. $\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$

□

5. Die Zahlenfolgen

5.1. **Grundbegriffe.**

Erklärung 5.1. Wenn sich auf Grund irgendeiner wohlbestimmter Vorschrift nacheinander eine erste Zahl x_1, eine zweite Zahl x_2, eine dritte Zahl x_3, ... bilden läßt, so sagt man, daß diese Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$ in dieser den natürlichen Zahlen entsprechenden Anordnung eine *Zahlenfolge* bilden.

Bricht die Bildung dieser Zahlen nach einer bestimmten Anzahl von Schritten ab, so spricht man von einer *endlichen Zahlenfolge*; wenn jeder natürlichen Zahl n eine wohlbestimmte Zahl x_n entspricht, redet man von einer *unendlichen Zahlenfolge.*

Man spricht von der Folge $\{x_n\}$ mit den *Gliedern* x_n.

Die einfachste und häufigste Rechenvorschrift ist diese, wenn eine fertige Formel gegeben ist, in der außer bekannten Zahlen nur der Buchstabe n auftritt (man bezeichnet n als den laufenden Buchstaben) und die die Glieder der Folge liefert, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, ...$ einsetzt.

Beispiel 5.2.

$$
\begin{array}{llll}
1) & x_n = \dfrac{1}{n} \ : & & 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...; \\
2) & x_n = 2^n \ : & & 2, 4, 8, ...2^n, ...; \\
3) & x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \ : & & 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, ...; \\
4) & x_n = \dfrac{n+1}{n} \ : & & 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, ...; \\
5) & x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \ : & & 2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{625}{256}, ...
\end{array}
$$

In diesen Fällen kann jedes geforderte Glied der Folge sofort angegeben werden.

Nicht so, wenn die Bildungsvorschrift so gefaßt ist, daß ein bestimmtes Glied der Folge erst dann berechnet werden kann, wenn die vorangehenden Glieder schon sämtlich oder teilweise bekannt sind.

Ein Beispiel für die *rekursive Bildungsweise* bietet die Vorschrift:

(1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1, ...,$ $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geq 3$.

Die Folge ist: $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

(2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1, ...,$ $x_n = \frac{1}{2}\,(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n \geq 3$.

Die Folge ist: $0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{11}{16}, ...$

Erklärung 5.3. - Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *beschränkt* genannt werden, wenn es eine positive Zahl K gibt, so daß stets $|\,x_n| \leq K$ oder $-K \leq x_n \leq K$ gilt. K heißt dann eine *Schranke* für die Glieder der Folge.

- Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *nach links* oder *nach unten* beschränkt heißen, wenn sich eine Zahl K_1 angeben läßt, so daß stets $x_n \geq K_1$ ist. K_1 heißt dann eine *linke Schranke* für die Glieder der Folge.
- Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *nach rechts* oder *nach oben* beschränkt heißen, wenn es eine Zahl K_2 gibt, so daß stets $x_n \leq K_2$ ist. K_2 heißt dann eine *rechte Schranke* für die Glieder der Folge.

Erklärung 5.4. - Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *monoton wachsend* oder *zunehmend* heißen, wenn stets $x_n \leq x_{n+1}$ ist, dagegen *monoton fallend* oder *abnehmend*, wenn stets $x_n \geq x_{n+1}$ ist. Beide Arten werden auch kurz als monotone Folgen bezeichnet.

- Eine Zahlenfolge heißt *konstant* oder *identisch konstant*, wenn alle ihre Glieder ein und denselben Wert haben. Ist dieser gleich c, so sagt man auch, die Folge sei identisch gleich c.

Veranschaulicht man die Glieder einer Zahlenfolge $\{x_n\}$ als Punkte auf der Zahlengeraden, so sagt man von den Bildern der Elemente x_n, daß sie eine *Punktfolge* bilden. Dabei kann es eintreten, daß ein und derselbe Punkt Bild mehrerer Glieder der Folge ist, nämlich immer dann, wenn verschiedene Glieder der Folge denselben Wert haben.

Die Beschränktheit einer Folge drückt sich dann dadurch aus, daß alle Punkte x_n zwischen den Punkten $-K$ und K liegen; das monotone Anwachsen dadurch, daß ein Punkt x_n niemals links von einem solchen mit kleinerer Nummer liegt.

Erklärung 5.5. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *arithmetisch* genannt werden, wenn man durch Subtraktion eines vorangehenden Gliedes von dem nächstfolgenden stets die gleiche, aber von 0 verschiedene Differenz erhält, wenn also die Folge mit den Gliedern $\{x_{n+1} - x_n\}$ identisch konstant, aber nicht gleich Null ist.

Eine arithmetische Folge $\{x_n\}$ ist hierhach durch das Anfangsglied x_0 und die konstante Differenz $d = x_{n+1} - x_n$ vollständig bestimmt: $x_0, x_0 + d, x_0 + 2d, ..., x_0 + nd, ...$.

Es ist also stets $x_n = x_0 + nd,\ n = 0, 1, 2, ...$.

Die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der arithmetischen Folge ist gleich

$$x_0 + x_1 + ... + x_n = \frac{n+1}{2}(x_0 + x_n) = \frac{n+1}{2}(2x_0 + nd).$$

Erklärung 5.6. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$, deren Glieder sämtlich von Null verschieden sind, soll *geometrisch* genannt werden, wenn man durch Division eines späteren Gliedes durch das nächstvorangehende immer den gleichen Quotienten erhält, wenn also die Folge mit den Gliedern $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ identisch konstant ist.

Eine geometrische Folge $\{x_n\}$ ist hiernach ebenfalls durch das Anfangsglied x_0 und den konstanten Quotienten $q = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ vollständig bestimmt: $x_0, x_0q, x_0q^2, ..., x_0q^n, ...$.

Es ist also stets $x_n = x_0q^n,\ n = 0, 1, 2, 3, ...$.

Die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der geometrischen Folge ist gleich $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\, x_0$, wenn $q \neq 1$ ist, und gleich $(n + 1)x_0$, wenn $q = 1$ ist.

5.2. **Nullfolgen.** Es stellen sich als wichtig solche Eigenschaften der Zahlenfolgen heraus, die wesentlich durch die Glieder mit hohen Stellenzahlen - die **fernen** oder **weit rechts gelegenen** Glieder - bedingt werden und die also nur bei unendlichen Zahlenfolgen auftreten können.

So ist z.B. die Eigenschaft einer Folge beschränkt zu sein ganz unabhängig davon, welche Werte etwa die ersten 1000 oder 10 000 Glieder haben.

Solche Eigenschaften bezeichnet man als *infinitäre Eigenschaften* einer Zahlenfolge.

Die Wichtigste infinitäre Eigenschaft einer Folge ist diejenige, eine Nullfolge zu sein.

Beispiel 5.7. (1) Die Zahlenfolge $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ist monoton fallend. Die Glieder erreichen jeden nur irgend denkbaren Grad von Kleinigkeit, wenn n groß genug genommen wird. Sie werden beliebig klein.

Man wähle irgendeine Zahl, die man für sehr klein hält, etwa $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{1000}$, oder 10^{-10}, oder 10^{-100}, und frage, ob es möglich ist, ein Glied der Folge anzugeben, das noch kleiner ist als die gewählte Zahl und dessen nachfolgende Glieder auch sämtlich kleiner sind als diese Zahl.

Wählt man etwa 10^{-10}, so ist das Glied mit der Nummer $n = 10^{11}$ schon kleiner als diese Zahl, und ebenso sind es alle nachfolgenden Glieder.

Haben die Glieder einer Folge diese Eigenschaft, so nennt man die Folge eine *Nullfolge.*

(2) Bei der Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ haben die Beträge der Glieder dieselbe Eigenschaft. Auch diese Folge nennt man eine *Nullfolge*.

(3) Die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ oder die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\right\}$ hat gleichfalls die beschriebene Eigenschaft. Denn da $2^n \geq n+1$, also $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n+1}$ ist, und da die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ eine Nullfolge ist, so ist die betrachtete Folge auch so eine.

Erklärung 5.8. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ heißt eine *Nullfolge*, wenn nach Wahl einer jeden beliebig kleinen positiven Zahl ε sich immer eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß $|x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$.

Bemerkung 5.9. Wie klein man auch $\varepsilon > 0$ wählt, es läßt sich doch stets n_0 so angeben, daß alle Punkte x_n mit $n \geq n_0$ zwischen den Punkten $-\varepsilon$ und ε liegen.

Da der absolute Betrag einer Zahl x den Abstand des Punktes x vom Nullpunkt der Zahlengeraden angibt, so kann die Erklärung der Nullfolge auch so gefaßt werden:

Eine Folge $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge, falls bei gegebenem $\varepsilon > 0$ sich eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß für $n \geq n_0$ die Abstände der Punkte x_n vom Nullpunkt immer kleiner ε sind (oder daß für $n \geq n_0$ die Punkte x_n sämtlich in der ε-Umgebung des Nullpunktes liegen).

5.3. **Die Intervallschachtelung.**

Erklärung 5.10. Zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ bilden eine *Intervallschachtelung* (in Zeichen (a_n/b_n)) genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist monoton wachsend.
(ii) Die Zahlenfolge $\{b_n\}$ ist monoton fallend.
(iii) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leq b_n$.
(iv) Die Zahlenfolge $\{b_n - a_n\}$ ist eine Nullfolge.

Von den Intervallen I_n, die sich auf der Zahlengeraden vom Punkte a_n bis zum Punkte b_n erstrecken $(n = 0, 1, 2, ...)$, gehört jedes folgende dem vorangehenden an, und ihre Längen $l_n = b_n - a_n$ bilden eine Nullfolge.

Die geometrische Anschauung scheint gebieterisch zu verlangen, daß bei gegebener Intervallschachtelung stets ein Punkt müsse aufgezeigt werden können, der allen Intervallen angehört.

Cantor - Dedekindsches Axiom. Ist auf einer Geraden eine Intervallschachtelung gegeben, so gibt es stets einen Punkt, der allen Intervallen der Schachtelung angehört.

Man sagt, daß dieser Punkt von der Schachtelung erfaßt wird.

Satz 5.11. *Ist (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine reelle Zahl ξ mit der Eigenschaft $a_n \leq \xi \leq b_n$ für alle natürlichen Zahlen n.*

Beweis. Gäbe es neben ξ noch eine davon verschiedene Zahl ξ', für die ebenfalls bei jedem $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq \xi' \leq b_n$ ist, so setze man $|\xi' - \xi| = \varepsilon$. Es wäre dann $\varepsilon > 0$, aber aus

$a_n \leq \xi' \leq b_n$ und $-b_n \leq -\xi \leq -a_n$ folge, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ $a_n - b_n \leq \xi' - \xi \leq b_n - a_n$, d.h. $-l_n \leq \xi' - \xi \leq l_n$, oder $\varepsilon = |\xi' - \xi| \leq l_n$ wäre - entgegen der Voraussetzung, daß $\{l_n\}$ eine Nullfolge sein sollte. □

Es ist demnach ξ, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Gibt es keine rationale Zahl, die allen Intervallen einer gegebenen Schachtelung (a_n/b_n) angehört, so sagt man, diese Schachtelung definiere oder erfasse eine *irrationale Zahl*. Als ihr Bild sieht man denjenigen Punkt P an, der auf der Zahlengeraden nach dem Cantor - Dedekindschen Axiom durch die Schachtelung (a_n/b_n) erfasst wird.

Zusammengefaßt: In der Angabe der Intervallschachtelung soll die Angabe oder Festlegung der durch sie erfassten (rationalen oder irrationalen) Zahl gesehen werden.

Eine Irrationale Zahl kann man tatsächlich ziffernmäßig überhaupt nicht vollständig angeben!

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen *das System der reellen Zahlen.*

Aufgabe 5.12. Beweisen Sie, daß $\left(\dfrac{n-1}{2n}/\dfrac{n+1}{2n}\right)$ eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl wird durch diese Intervallschachtelung erfaßt?

5.4. **Beispiele von Nullfolgen.** Es sollen die nachstehenden Zahlenfolgen $\{x_n\}$ daraufhin untersucht werden, ob sie Nullfolgen sind oder nicht.

(1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$.

Lösung. Für jedes $n = 0, 1, 2, ...$ ist $|\,x_n| = \frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{n+1}$. Wählt man $\varepsilon > 0$, so ist sicher $|\,x_n| < \varepsilon$ sobald $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ ist. Das letztere bedeutet, daß $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Es genügt, für n_0 eine natürliche Zahl zu nehmen, die $\geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist, um zu erreichen, daß $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \geq n_0$. $\{x_n\}$ is eine Nullfolge.

(2) $x_n = \dfrac{5n^2 + 3n + 4}{n^3 + 1}$.

Lösung. Es ist für jedes $n = 0, 1, 2, ...$ $|\,x_n| = \frac{5n^2+3n+4}{n^3+1}$. Für $n \geq 4$ gilt

$|\,x_n| < \frac{5n^2+n.n+n}{n^3+1} < \frac{7n^2}{n_3+1} < \frac{7n^2}{n^3} = \frac{7}{n}$. Wählt man nun wieder ganz beliebig ein $\varepsilon > 0$, so ist $|\,x_n| < \varepsilon$, falls $n \geq 4$ und weiterhin n so groß genommen wird, daß $\frac{7}{n} < \varepsilon$, d.h. $n > \frac{7}{\varepsilon}$ ist. Nimmt man also für n_0 irgendeine natürliche Zahl, die ≥ 4 und $> \frac{7}{\varepsilon}$ ist, so ist man sicher, daß $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \geq n_0$. $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge.

(3) $x_n = a^n$.

Lösung. Hier ist $|\,x_n| = |\,a|^n$.

Ist $|\,a| \geq 1$, so sind alle Glieder der Folge ≥ 1. Diese ist dann sicher keine Nullfolge, denn wählt man etwa $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist der Betrag keines Gliedes der Folge $< \varepsilon$.

Ist $a = 0$, so ist die Folge identisch gleich Null und also sicher eine Nullfolge. Dann ist der Betrag jedes Gliedes $< \varepsilon$, wie auch $\varepsilon > 0$ gewählt wird.

Ist $0 < |\,a| < 1$, so ist die Entscheidung nicht ganz so einfach. In diesem Fall ist $\frac{1}{|\,a|} > 1$, so daß , wenn $\frac{1}{|\,a|} = 1 + p$ gesetzt wird, $p > 0$ ist. Daher ist

$$|\,x_n| = \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1+np+\binom{n}{2}p^2+...+p^n} < \frac{1}{np},$$

wenigstens für jedes $n \geq 1$. Es wird also $|\,x_n|$ kleiner als ein irgendwie gewähltes, positives ε ausfallen, sobald nur $\frac{1}{np} < \varepsilon$ ist. Da dies für jedes $n > \frac{1}{p\varepsilon}$ der Fall ist, so braucht man für n_0 eine natürliche Zahl $> \frac{1}{p\varepsilon}$ zu wählen, um $|\,x_n| < \varepsilon$ zu sein für jedes $n \geq n_0$.

Die Zahlenfolge $\{x_n\} = \{a^n\}$ ist also eine Nullfolge, wenn $|\,a| < 1$ ist; sie ist keine Nullfolge, wenn $|\,a| \geq 1$ ist.

Eine ganz andere Frage ist diese, wie schnell die Glieder der Folge $\{a^n\}$ klein werden.

(4) $x_n = na^n$.

Lösung. Auch hier läßt sich zeigen, daß die Folge für $|\,a| < 1$ eine Nullfolge ist. Denn setzt man wieder (für $a \neq 0$) $|\,a| = \frac{1}{p+1}$, $p > 0$, so ist für $n \geq 2$

$$|\,x_n| = \frac{n}{(1+p)^n} = \frac{n}{1+np+\binom{n}{2}p^2+...+p^n} < \frac{n}{\binom{n}{2}p^2} = \frac{2}{(n-1)p^2}.$$

Daher wird $|\,x_n|$ kleiner als ein irgendwie gewähltes, positives ε ausfallen, wenn $\frac{2}{(n-1)p^2} < \varepsilon$, d.h. $n > \frac{2}{\varepsilon p^2} + 1$ ist.

(5) $x_n = n^2a^n$.

Lösung. Ist $|\,a| = \frac{1}{1+p}$ und $p > 0$, so ist für $n \geq 3$ $|\,x_n| < \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)p^3}$. Man bemerke, daß für $n \geq 3$ sicher $1 < \frac{n}{2}$ und also $n-1 > \frac{n}{2}$ ist, so daß für $n \geq 3$ erst recht $|\,x_n| < \frac{12}{(n-2)p^3}$ sein wird. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ genügt es also, für n_0 eine natürliche Zahl $> \frac{12}{\varepsilon p^3} + 2$ zu wählen, damit $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für $n \geq n_0$.

Auch $\{n^2a^n\}$ ist eine Nullfolge, falls $|\,a| < 1$ ist.

(6) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Lösung. Diese Folge ist offenbar keine Nullfolge, denn $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, ..., x_{2k+1} = 0, x_{2k+2} = 1, ...$ und von keiner Stelle an sind die $|\,x_n|$ sämtlich $< \varepsilon$, falls man sich das $\varepsilon < 1$ gewählt denkt.

(7) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.

Lösung. Wir wissen schon, daß für $n = 2, 3, ...$ stets $4 \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist (vgl. Kapitel 4, Aufgabe (11)). Daher ist für $n = 1, 2, 3, ...$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4$ und $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{4}$. Wählt man also etwa $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist außer x_0 kein Glied der Folge seinem Betrag nach $< \varepsilon$. Sie ist daher keine Nullfolge.

(8) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+1}$.

Lösung. Da die Folge mit den Gliedern $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,...$ in Kapitel 4, Aufgabe (10), als monoton wachsend erkannt war, so ist jedes ihrer Glieder mindestens gleich dem ersten, also $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 2$). Daher ist für $n \ge 1$

$$|\,x_n| = \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} < \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Die Folge $\{\frac{1}{2^n}\}$ ist aber eine Nullfolge. Bei beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine Stelle n_0 so angeben, daß $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \ge n_0$. Für denselben n ist auch $|\,x_n| < \varepsilon$. Die Folge ist also eine Nullfolge.

5.5. **Sätze über Nullfolgen.**

Satz 5.13. *Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge, so ist auch $\{|\,x_n|\}$ eine Nullfolge und umgekehrt.*

Beweis. Sowohl die Folge $\{x_n\}$ wie die Folge $\{|\,x_n|\}$ ist dann und nur dann eine Nullfolge, wenn nach Wahl eines $\varepsilon > 0$ sich n_0 so angeben läßt, daß für $n \ge n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt.

□

Satz 5.14. *Jede Nullfolge ist eine beschränkte Zahlenfolge.*

Beweis. Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge, so entspricht etwa der Wahl $\varepsilon = 1$ eine Stelle n_0, so daß $|\,x_n| < 1$ ausfällt für jedes $n \ge n_0$. Ist dann q der größte der Werte $|\,x_1|, |\,x_2|, ..., |\,x_{n_0-1}|$, so ist, wenn $q+1 = K$ gesetzt wird, dies K eine Schranke der Zahlenfolge $\{x_n\}$, da $|\,x_n| < K$ ist für jedes n.

□

Satz 5.15. *Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge und $\{c_n\}$ irgendeine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch die Folge mit den Gliedern $x'_n = c_n x_n$, $n = 0,1,2,...$, eine Nullfolge.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $K > 0$, so daß stets $|\,c_n| < K$ ist. Wird dann ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so ist auch $\frac{\varepsilon}{K} > 0$. Wählt man diese Zahl als Kleinheitsgrad für die x_n, so entspricht ihr eine Stelle n_0, von der ab $|\,x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ ausfällt. Dan ist für $n \ge n_0$

$$|\,x'_n| = |\,c_n|\,|\,x_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Also ist auch $\{x'_n\}$ eine Nullfolge. Hiernach bilden mit $\{x_n\}$ zugleich auch die Zahlenfolgen $\{(-1)^n x_n\}$, $\{(1+(-1)^n)x_n\}$, $\{cx_n\}$, $\{a^n x_n\}$ (mit $|\,a| < 1$) Nullfolgen.

□

Satz 5.16. *Von der Folge $\{x_n\}$ sei schon bekannt, daß sie eine Nullfolge ist, und es sei $\{x'_n\}$ eine zu untersuchende Zahlenfolge. Ist dann eine Ungleichung der Form $|\,x'_n| \le K|\,x_n|$, in der K eine feste positive Zahl bedeutet, stets oder wenigstens für alle $n \ge m$ erfüllt, so ist auch $\{x'_n\}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung ein n_0 so angeben, daß $|\,x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ ausfällt für $n \ge n_0$. Wir dürfen annehmen, daß dies $n_0 > m$ ist. Dann ist aber für $n \ge n_0$ stets $|\,x'_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, also $\{x'_n\}$ eine Nullfolge.

□

Satz 5.17. *Sind $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$ zwei Nullfolgen, so sind auch die Folgen $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$, $\{z_n\}$ mit den Gliedern $y_n = x_n + x'_n$, $y'_n = x_n - x'_n$, $z_n = x_n x'_n$, $n = 0,1,2,...$ Nullfolgen.*

Beweis. Es ist stets $|\,y_n| < |\,x_n| + |\,x'_n|$. Wählt man nun ein $\varepsilon > 0$, so ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dieser Zahl entspricht nach Voraussetzung je eine Stelle n_1 bzw. n'_1, von der ab $|\,x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $|\,x'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt. Wird dann n_0 beliebig oberhalb n_1 und n'_1 gewählt, so ist für jedes $n \geq n_0$ $|\,y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

Für $\{y'_n\}$ verläuft der Beweis wörtlich ebenso, und für $\{z_n\}$ ergibt sich die Behauptung sofort aus Satz 5.11., da die Faktoren x'_n nach Satz 5.10. eine jedenfalls beschränkte Zahlenfolge bilden.

□

Bemerkung 5.18. Zwei Nullfolgen **dürfen** im allgemeinen **nicht** gliedweise durcheinander dividiert werden. (Etwa $x_n = \frac{1}{4^n}$, $x'_n = \frac{1}{2^n}$ da $\frac{x_n}{x'_n} = 2^n$ keine Nullfolge ist!)

Satz 5.19. *Sind $\{x'_n\}$ und $\{x''_n\}$ zwei gegebene Nullfolgen und ist $\{x_n\}$ eine zu untersuchende Zahlenfolge, deren Glieder für jedes n die Bedingung $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ erfüllen, so ist $\{x_n\}$ auch eine Nullfolge.*

Beweis. Wird ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung je eine Stelle n' und n'' so angeben, daß $|\,x'_n| < \varepsilon$ ist für $n \geq n'$ und $|\,x''_n| < \varepsilon$ für $n \geq n''$. Ist dann n_0 eine beliebige oberhalb n' und n'' gelegene Stelle, so ist für $n \geq n_0$ $-\varepsilon < x'_n$ und $x''_n < \varepsilon$, also wegen $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ auch $-\varepsilon < x'_n \leq x_n \leq x''_n < \varepsilon$, d.h. $|\,x_n| < \varepsilon$.

Auch die Folge $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge.

□

Ist $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ irgend eine Folge von natürlichen Zahlen, in der jede natürliche Zahl genau einmal auftritt, so nennt man die Folge $\{k_n\}$ eine *Umordnung* der Folge der natürlichen Zahlen. Ist dann $\{x_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge, so nennt man die Folge $\{y_n\}$, für die $y_n = x_{k_n}$ ist, eine *Umordnung* der Folge $\{x_n\}$.

Ist $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ eine im engeren Sinn monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so sagt man, $\{p_n\}$ sei eine *Teilfolge* der Folge der natürlichen Zahlen. Ist dann $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge, so nennt man die Folge $\{y_n\}$, für die $y_n = x_{p_n}$ ist, eine *Teilfolge* der Folge $\{x_n\}$.

Treten in der Teilfolge $\{p_n\}$ unendlich viele natürliche Zahlen nicht auf und sind $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ diese nicht in der Folge $\{p_n\}$ auftretenden positiven ganzen Zahlen, so sagt man, man habe die Folge $\{n\}$ in die beiden Teilfolgen $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ zerlegt. Z.B. $p_n = 2n$, $q_n = 2n - 1$.

Setzt man, wenn $\{x_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge ist, neben $y_n = x_{p_n}$ noch $z_n = x_{q_n}$, so sagt man, man habe die Folge $\{x_n\}$ in die beiden Teilfolgen $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ zerlegt.

Satz 5.20. (i) *Jede Umordnung einer Nullfolge ist wieder eine Nullfolge.*
(ii) *Jede Teilfolge einer Nullfolge ist wieder eine Nullfolge.*

Beweis. (*i*) Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein n_0, so daß $|\,x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n > n_0$. Unter den Nummern, die die (endlich vielen) Glieder $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$ in der Folge $y_n = x_{k_n}$, die eine Umordnung der Folge $\{x_n\}$ ist, tragen, sei n' die größte. Dann ist für $n > n'$ stets $|\,y_n| < \varepsilon$, also $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

(*ii*) Ist $\varepsilon > 0$ gegeben und n_0 wieder so bestimmt, daß für $n > n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$ ist, so ist für denselben n auch $|\,y_n| < \varepsilon$, da $y_n = x_{p_n}$ und $p_n > n > n_0$ ist.

□

Satz 5.21. *Eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ sei in die beiden Teilfolgen $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ zerlegt. Sind dann diese beiden Folgen Nullfolgen, so ist auch $\{x_n\}$ selbst eine Nullfolge.*

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung je eine Stelle n' und n'' so angeben, daß für $n \geq n'$ $|\,y_n| < \varepsilon$ bzw. für $n \geq n''$ $|\,z_n| < \varepsilon$ ausfällt. Ist nun

$\{y_n\}$ mit der Teilfolge $\{x_{p_n}\}$ und $\{z_n\}$ mit der Teilfolge $\{x_{q_n}\}$ von $\{x_n\}$ identisch und wird n_0 oberhalb der beiden Zahlen $p_{n'}$ und $q_{n''}$ gewählt, so ist für $n \geq n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

□

5.6. **Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge.**

(1) In einem Betrieb soll innerhalb eines Planjahres durch Steigerung der Arbeitsproduktivität eine monatliche Produktionserhöhung um $1,5\%$ erreicht werden. Im Monat Januar betrug die Produktion 1400 Stück.
Wie hoch ist die Jahresproduktion? (18 257,7)
Welche Produktion wird im Monat Dezember erreicht? (1649,13)

(2) **Durchschnittliches Wachstumstempo**. Aus der Definition geht hervor, daß die prozentuale Änderung der Glieder einer geometrischen Folge konstant ist. Die geometrische Folge kann daher als mathematisches Modell für ökonomische Vorgänge dienen, denen eine gleichbleibende prozentuale Entwicklung zugrunde liegt.

Wir bezeichnen die jährlich erzielten Umsätze eines Handelsbetriebes mit $a_i\,(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Bei den einzelnen statistischen Werten treten nun mit Sicherheit Abweichungen gegenüber einer gleichmäßigen prozentualen Entwicklung auf.

Der Quotient $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ entspricht daher dem durchschnittlichen Wachstumstempo im betrachteten Zeitraum.

Die Berechnung des durchschnittlichen jährlichen Wachstumstempos $\overline{WT}$ erfolgt nach $\overline{WT} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}.100\%$ oder $\overline{WT} = q.100\%,\ q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$.

Bezeichnen wir als Anfangswert einer zeitlichen Entwicklung den direkt vor der Planperiode liegenden Wert mit a_0, dann ergibt sich für $\overline{WT}$ bei n Wachstumszeiträumen $\overline{WT} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}.100\%$.

Der Einzelhandelsumsatz entwickelte sich im Zeitraum von 1973 bis 1977 wie in der Tabelle angegeben. Wie groß waren das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo und die Zuwachsrate? Mit welchem Umsatz konnte bei gleichbleibendem Wachstumstempo im Jahre 1980 gerechnet werden?

Jahr	1973	1974	1975	1976	1977
Einzelhandelsumsatz in Mill. DM	74619	79150	81905	85675	89434

Lösung. Mit den Umsätzen der Jahre 1973 und 1977 erhalten wir
$\overline{WT} = \sqrt[4]{\frac{89434}{74619}}.100\% = 1,0463.100\% = 104,63\%$.

Der 1980 erwartete Umsatz ergab sich mit dem im Basisjahr 1977 erreichten Betrag $(a_1 = 89434)$ und $q = 1,0463$ zu $a_4 = 89434.(1,0463)^3 = 102440,4$.

Das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo des Einzelhandelsumsatzes betrug im Zeitraum von 1973 bis 1977 $104,63\%$, die Zuwachsrate $4,63\%$. Im Jahre 1980 konnte bei gleichbleibender Entwicklung mit einem Umsatz von 102,44 Milliarden DM gerechnet werden.

(3) **Zinseszinsrechnung**. Bankkreditzinsen sind für eine effektive Ausnutzung von Produktions- und Zirkulationsfonds von großer Bedeutung.

Zur Herleitung der *Grundformel der Zinseszinsrechnung* nehmen wir an, daß ein Guthaben b_0 zu einem Zinssatz p verzinst wird. Die Jahreszinsen $z = b_0\frac{p}{100}$ werden diesem Grundbetrag oder Barwert b_0 zugeschrieben und im folgenden Jahr ebenfalls verzinst. In Fortsetzung dieser Überlegung erhalten wir die Guthaben nach dem ersten, zweiten, ..., n-ten Jahr $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\begin{array}{lllll} b_1 &=& b_0 + b_0.\frac{p}{100} &=& b_0\left(1+\frac{p}{100}\right) &=& b_0.q; \\ b_2 &=& b_1 + b_1.\frac{p}{100} &=& b_1\left(1+\frac{p}{100}\right) &=& b_0.q^2; \\ \dots \\ b_n &=& b_{n-1} + b_{n-1}.\frac{p}{100} &=& b_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right) &=& b_0.q^n. \end{array}$$

Wir erkennen, daß die Beträge $b_1, b_2, ..., b_n$ eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied b_0 und dem konstanten Quotienten q bilden. Mit den Bezeichnungen b_n - Endbetrag, p - Zinssatz, $\frac{p}{100}$ - Zinsrate, $(1+\frac{p}{100}) = q$ - Aufzinsungsfaktor, n - Verzinsungsdauer in Jahren, erhalten wir die Grundformel der Zinseszinsrechnung

$$b_n = b_0 q^n.$$

Die Berechnung des Endbetrages b_n bei bekanntem Grundbetrag b_0, Zinssatz p und Anzahl der Jahre n heißt *Aufzinsen*.

Zur Bestimmung des Grundbetrages b_0 bei gegebenen Endbetrag b_n, Zinssatz p und Anzahl der Jahre n stellen wir $b_n = b_0 q^n$ um und erhalten $b_0 = b_n q^{-n}$. Mit dem *Abzinsungs-* oder *Diskontierungsfaktor* $v = \frac{1}{q}$ wird $b_0 = b_n v^n$. Dieser Berechnungsvorgang heißt *Diskontierung*.

Ein nach n Jahren fälliger Betrag b_n wird zu p Prozent Zinseszins auf die Gegenwart diskontiert.

(i) Auf welchen Endbetrag wachsen 10000 DM an, die bei $3\frac{1}{4}$ % fünf Jahre auf Zinseszins stehen? (11734,11)

(ii) Diskontieren Sie einen nach 10 Jahren fälligen Betrag von 20000 DM bei 5% Zinseszins auf Gegenwart. (12278,26)

6. Grenzwerte von Zahlenfolgen

6.1. Der Begriff des Grenzwertes.

Erklärung 6.1. Wenn eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ zu einer bestimmten Zahl ξ in der Beziehung steht, daß die Folge $\{x_n - \xi\}$ eine Nullfolge ist, so sagt man, die Folge $\{x_n\}$ *konvergiere* oder sie sei konvergent; die Zahl ξ nennt man den *Grenzwert* oder den *Limes* dieser Folge und sagt auch, die Folge strebe gegen ξ oder ihre Glieder näherten sich dem Werte ξ.

Eine solche Tatsache drückt man durch die Symbole $x_n \to \xi$ (genauer: $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$) oder $\lim x_n = \xi$ (genauer: $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$) aus.

Da nun die Forderungen $\xi - \varepsilon < x_n < \xi + \varepsilon$ und $|x_n - \xi| < \varepsilon$ für beliebige Zahlen $\varepsilon > 0$ gleichbedeutend sind, kann man sagen:

Es strebt $\{x_n\}$ gegen ξ, falls nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε sich eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß alle x_n mit $n \geq n_0$ in der ε- Umgebung der Stelle ξ liegen.

Beispiel 6.2. (1) Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Nullfolge, deren Glieder sämtlich ≥ 0 sind, und ist α eine beliebige positive Zahl, so bilden auch die Zahlen $y_n = (x_n)^\alpha$ eine Nullfolge.

Lösung. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so ist auch $\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, und da $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist, muß sich n_0 so bestimmen lassen, daß für $n \geq n_0$ stets $|x_n| < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$

ausfällt. Dann ist aber für denselben n auch $|\,y_n| = y_n = x_n^\alpha < \varepsilon$. Also ist $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

(2) Ist $a > 1$ eine beliebige Grundzahl der Logarithmen, so bilden die Zahlen $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ eine Nullfolge.

Lösung. Es sei $\varepsilon > 0$. Die Forderung, daß $|\,x_n| = \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$ sein soll, bedeutet dasselbe wie diejenige, daß $\log_a n < \varepsilon n$ oder $n < a^{\varepsilon n}$, oder $n(a^{-\varepsilon})^n < 1$ sein soll. Setzt man $b := a^{-\varepsilon}$, so ist $0 < b < 1$, und es läßt sich n_0 so bestimmen, daß für $n \geq n_0$ stets $nb^n < 1$ ausfällt (vgl. mit Kapitel 5, Beispiel für Nullfolgen Nr.4). Für dieselben n ist dann auch $|\,x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

(3) Die Zahlen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1,\ n = 1, 2, ...,$ bilden eine Nullfolge.

Lösung. Für die Zahlen x_n ist $(1 + x_n)^n = n$. Denkt man sich für $n \geq 2$ die linke Seite dieser Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so erkennt man, da $x_n > 0$ ist, daß $1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} x_n^3 + ... + x_n^n = n$, oder $\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \leq n$, oder $|\,x_n| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ist. Ist also ein $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so wird hiernach $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfallen, sobald n so groß genommen wird, daß $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ ist. Es reicht hierzu aus, $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ zu nehmen. Ist n_0 eine spezielle natürliche Zahl, die dieser Forderung genügt, so ist für $n \geq n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

Lösung. $\lim_{n\to\infty}\{\frac{n+1}{n} - 1\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{4n+3} = \frac{3}{4}.$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2.$ (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3}.$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

Lösung. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \ \wedge\ \forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$

Lösung. $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ \Rightarrow$

$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \ \Rightarrow$

$|\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} < \frac{1}{2(2\sqrt{n})^2} = \frac{1}{8n} < \frac{1}{n}.$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

Lösung. $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}})}$

$\Rightarrow\ |\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}})} < \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0.$

Lösung. I. Fall. $a > 1 \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} > 1 \ \Rightarrow \exists\, \lambda_n > 0 :\ \sqrt[n]{a} = 1 + \lambda_n$

$\Rightarrow\ a = (1+\lambda_n)^n\ \Rightarrow\ a \geq 1 + n\lambda_n$ (Bernoullische Ungleichung)
$\Rightarrow\ \lambda_n \leq \frac{a-1}{n}\ \Rightarrow\ 0 < \lambda_n = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$.
Laut Satz 5.19. ist $\{\lambda_n\}$ eine Nullfolge.

II. Fall. $0 < a < 1\ \Rightarrow\ \exists\, b > 1:\ a = \frac{1}{b}\ \Rightarrow$
$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}\ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

(13) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Man bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - (a+1)a_n + a}{a_n - a}$.

(14) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Man bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n} - \sqrt{1-a_n}}{a_n}$.

(15) *Die Eulersche Zahl* e.
Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend (vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.15 (10)), die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist dagegen monoton fallend (vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.15 (11)). Da ersichtlich stets $a_1 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \leq b_1$ ist und da $b_n - a_n = \frac{1}{n}\,a_n < \frac{1}{n}\,b_1 = \frac{4}{n}$ ist und diese Differenzen somit eine Nullfolge bilden, so ist (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung. Die durch sie erfaßte Zahl pflegt man mit e zu bezeichnen. Man hat nun $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Für $n = 6$ lehrt dies, daß $2{,}52 < e < 2{,}95$ ist.
Man nennt die Zahl $e = 2{,}7182818...$ die Eulersche Zahl.

Bemerkung 6.3. Ist $\{x_n\}$ irgendeine Nullfolge, deren Glieder sämtlich > 0 sind, so ist jedesmal die Folge der Zahlen $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ konvergent und hat jedesmal den Grenzwert e.

(16) Ist $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl, so strebt die Folge $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ gegen e^α.
Beweis. Es ist nämlich $\{\frac{\alpha}{n}\}$ eine Nullfolge, so daß für $n \to \infty$
$(1+\frac{\alpha}{n})^n = [(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}]^\alpha$ gegen e^α strebt .

Die praktische Bedeutung der Eulerschen Zahl e wird durch das folgende Beispiel deutlich.

Kontinuierliche Verzinsung. Eine Größe werde mit dem nominellen Zinssatz $c > 0$ unterjährig mit n Perioden verzinst. Der Aufzinsungsfaktor beträgt $x_n = (1+\frac{c}{n})^n$. Wenn wir kontinuierliche Verzinsung mit dem nominellen Zinssatz c vornehmen wollen, müßen wir die Anzahl n der Perioden gegen Unendlich wachsen lassen. Was passiert dabei mit der Folge $\{x_n\}$ der Aufzinsungsfaktoren?
Antwort. Wird ein Kapital mit dem nominellen Zinssatz c eine Periode lang kontinuierlich verzinst, dann beträgt der Aufzinsungsfaktor $q = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n = e^c$.
Es gilt auch $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{c}{n})^n = e^{-c},\ c > 0$.

Jede Zahlenfolge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Erklärung 6.4. Wenn eine Folge $\{x_n\}$ die Eigenschaft hat, daß nach Wahl einer beliebigen (großen) positiven Zahl G sich immer eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß für alle $n \geq n_0$ stets $x_n > G$ ist, so sagt man, die Folge $\{x_n\}$ divergiere oder strebe gegen $+\infty$, oder sie sei *bestimmt divergent* mit dem Grenzwert $+\infty$, und bezeichnet dies durch die Symbolik $x_n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Ganz entsprechend erklärt man $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Wenn eine Folge $\{x_n\}$ nicht konvergiert, aber auch nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, so sagt man von ihr, sie sei *unbestimmt divergent.*

Beispiel 6.5. (1) Ist $\alpha > 0$, so strebt $n^\alpha \to \infty$.

Denn ist $G > 0$ beliebig gewählt und $n_0 > G^{\frac{1}{\alpha}}$, so ist für $n \geq n_0$ $\quad n^\alpha > (G^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = G$.

(2) Es strebt, wie auch die Grundzahl $a > 1$ gewählt sein mag, $\log_a n \to \infty$, da $\log_a n > G$ sobald $n > a^G$ ist.

(3) Ist $a > 1$, so strebt $a^n \to \infty$.

Denn setzt man $a = 1 + p$, so ist $p > 0$ und $a^n = (1 + p)^n \geq 1 + np > np$. Es ist also, wie auch $G > 0$ gewählt werden mag, $a^n > G$, sobald $n > \frac{G}{p}$ ist.

(4) Ist $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen $+\infty$ divergiert, und wird $y_n = -x_n$ gesetzt, so strebt y_n gegen $-\infty$.

(5) Strebt x_n gegen 0 und sind alle $x_n > 0$, so strebt $\dfrac{1}{x_n}$ gegen $+\infty$.

Sind dagegen alle $x_n < 0$, so strebt $\dfrac{1}{x_n}$ gegen $-\infty$.

(6) Die Folge $(-1)^n$, $n = 1, 2, 3, ...$, ist unbestimmt divergent, ebenso die Folge $1, 0, 1, 0, 1, ..., 1, 0, ...$

Denn die Konvergenz einer Folge bedeutet, daß nach Wahl eines positiven ε von einer passenden Nummer ab alle Glieder der Folge in einem gewissen Intervall der Länge 2ε liegen.

Satz 6.6. *Eine Zahlenfolge kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren.*

Eine konvergente Zahlenfolge bestimmt also ihren Grenzwert völlig eindeutig.

Satz 6.7. *Eine konvergente Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist notwendig beschränkt. Ist stets $|\,x_n| \leq K$, $K > 0$, so gilt auch für den Grenzwert ξ die Ungleichung $|\,\xi| \leq K$.*

Beweis. Da jede Nullfolge beschränkt ist, so ist die Folge $\{x_n - \xi\}$ beschränkt. Ist etwa stets $|\,x_n - \xi| \leq K_0$, so ist wegen $x_n = (x_n - \xi) + \xi$ und $|\,x_n| \leq |\,x_n - \xi| + |\,\xi|$ auch stets $|\,x_n| \leq K_0 + |\,\xi|$. Die Folge $\{x_n\}$ ist also beschränkt.

Ist nun K irgendeine Schranke der Folge, also stets $|\,x_n| < K$, so kann nicht $|\,\xi| > K$ sein. Denn unter dieser Annahme wäre $|\,\xi| - K > 0$, und es müßte für ein hinreichend großes n $\quad |\,x_n - \xi| < |\,\xi| - K$ sein. Hieraus würde aber folgen, daß $|\,\xi| - |\,x_n| \leq |\,x_n - \xi| < |\,\xi| - K$, oder $|\,x_n| > K$ wäre, was der Bedeutung von K widerspricht.

□

6.2. **Das Rechnen mit Grenzwerten.**

Satz 6.8. *Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen und strebt $x_n \to \xi$ sowie $y_n \to \eta$, so ist auch die Folge der Zahlen*

a) $\{x_n + y_n\}$ *konvergent, und* $x_n + y_n \to \xi + \eta$;

b) $\{x_n - y_n\}$ *konvergent, und* $x_n - y_n \to \xi - \eta$;

c) $\{x_n\, y_n\}$ *konvergent, und* $x_n\, y_n \to \xi\, \eta$;

d) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ *konvergent, und* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\xi}{\eta}$ *falls alle* $y_n \neq 0$ *und* $\eta \neq 0$ *sind.*

Beweis. Zum Beweis benutze man die Nullfolgen $\{x_n - \xi\}$ und $\{y_n - \eta\}$ und die Sätze über Nullfolgen.

Beweis von *c*). Es ist nämlich $x_n\, y_n - \xi\, \eta = (x_n - \xi)y_n + (y_n - \eta)\xi$. Der Ausdruck rechter Hand entsteht nun aus den Nullfolgen $\{x_n - \xi\}$ und $\{y_n - \eta\}$, indem diese gliedweis mit beschränkten Faktoren multipliziert und nachher addiert werden, und ist also selbst Glied einer Nullfolge.

□

Satz 6.9. *Sind* $\{y_n\}$ *und* $\{z_n\}$ *zwei konvergente Zahlenfolgen, die beide denselben Grenzwert* ξ *haben, ist* $\{x_n\}$ *eine zu untersuchende Zahlenfolge und erfüllen die Glieder dieser Folge für jedes* n *die Bedingung* $y_n \leq x_n \leq z_n$*, so strebt* $x_n \to \xi$*.*

Beispiel 6.10. (1) Die Zahlenfolge $\{f(n)\}$ mit $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

Lösung. Die Zahlenfolge $f(1); f(2); f(3); \ldots$, ausgeschrieben

$$\frac{1}{1.3};\ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5};\ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7}; \ldots,$$

kann auf Grund der Zerlegung

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$$

auch in der Form

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right); \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right); \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right); \ldots$$

oder, nach Zusammenfassen der Glieder, in der Gestalt

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right);\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right);\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{7}\right); \ldots$$

dargestellt werden. Allgemein gilt also für das n-te Glied

$$a_n = f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

und deshalb $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{2}$.

(2) Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Nullfolge, so daß ihre Glieder sämtlich $\neq 0$ sind, so strebt

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} \to \frac{\log_b a}{\log_b e} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Lösung. Die Zahl e bildet die Basis der *natürlichen Logarithmen*.

Da die Behauptung für $a = 1$ offenbar richtig ist, dürfen wir weiterhin $a \gtrless 1$ annehmen. Da die Zahlen $y_n = a^{x_n} - 1$ wieder eine Nullfolge bilden (Die Folge

$x_n = \frac{\log_b y_{n+1}}{\log_b a}$ ist eine Nullfolge!), deren Glieder sämtlich > -1 und $\neq 0$ sind (da $a^{x_n} > 0 \wedge a^{x_n} \neq 1$ gilt), strebt also

$$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{y_n}{\log_b y_{n+1}} \log_b a = \frac{\log_b a}{\log_b (y_{n+1})^{\frac{1}{y_n}}} \longrightarrow \frac{\log_b a}{\log_b e} = \ln a.$$

Bemerkung 6.11. Strebt $x_n \to \xi$ und sind alle Glieder x_n sowie der Grenzwert ξ positiv, so strebt $\log_b x_n \to \log_b \xi$, zu welcher Grundzahl $b > 1$ auch die Logarithmen genommen werden, da:

$$\log_b x_n - \log_b \xi = \log_b \frac{x_n}{\xi} = \log_b \left(1 + \frac{x_n - \xi}{\xi}\right) \longrightarrow \log_b 1 = 0.$$

Eine konvergente Folge mit positiven Gliedern und positivem Grenzwert "darf" also auch logarithmiert werden.

(3) $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = n(\sqrt[n]{a}-1) \longrightarrow \ln a.$

(4) $x_n = \dfrac{\ln n}{n} \wedge a = e \Rightarrow \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \dfrac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\ln n} \longrightarrow 1.$

Bemerkung 6.12. Exponentialfunktionen mit der Basis e dienen in der Ökonomie zur Modellierung von Wachstumsvorgängen:

- Exponentielles Wachstum $f(t) = a.e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, a, $k =$ konst.
- Beschränktes exponentielles Wachstum
  $f(t) = G - ae^{-kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, $k =$ konst.
- Beschränkte exponentielle Abnahme
  $f(t) = G + ae^{-kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, $k =$ konst.
- Logistisches Wachstum
  $f(t) = \dfrac{aG}{a + e^{-Gkt}}$ oder $f(t) = \dfrac{G}{1 + be^{-Gkt}}$,
  $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, b, $k =$ konst, $k > 0$.

Logarithmusfunktionen zur Basis e treten beim Logarithmieren der Wachstumsfunktionen auf und dienen zum Beispiel als statistische Elastizitätsfunktionen zur Gewinnung ökonomischer Analysen.

6.3. **Die beiden Konvergenzprobleme.** Ein erheblicher Teil aller Untersuchungen der höheren Analysis beruht auf Grenzwertbetrachtungen, die ihrerseits wieder auf die Untersuchung von Zahlenfolgen gestützt werden können. Hierbei sieht man sich vor allem zwei Fragen gegenüber, nämlich

- erstens der Frage, ob eine irgendwie vorgelegte Zahlenfolge konvergiert oder ob sie (bestimmt oder unbestimmt) divergiert; und
- zweitens der Frage, welchem Grenzwert eine als konvergent erkannte Zahlenfolge zustrebt.

Zwei Fragen, die man kurz als die Frage nach dem Konvergenzverhalten einer beliebigen bzw. als die Frage nach dem Grenzwert einer als konvergent erkannten Zahlenfolge bezeichnet.

Jeder Satz, der ein Mittel an die Hand gibt, über das Konvergenzverhalten vorgelegter Zahlenfolgen zu entscheiden, heißt ein *Konvergenzkriterium* bzw. *Divergenzkriterium*.

Satz 6.13. Das erste Hauptkriterium (für monotone Folgen) *: Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist stets konvergent. Eine monotone und nicht beschränkte Zahlenfolge ist stets bestimmt divergent, und zwar divergiert sie gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$, je nachdem die Folge wächst oder fällt.*

Beweis. I. Ist die Folge $\{x_n\}$ monoton wachsend, so ist stets $x_n \leq x_{n+1}$, die Folge also sicher nach links beschränkt.

Ist nun die Folge nicht beschränkt, so kann sie keine rechte Schranke besitzen. Wählt man also eine beliebige positive Zahl G, so gibt es stets ein Glied, etwa das Glied x_{n_0}, für das $x_{n_0} > G$ ist. Wegen des monotonen Anwachsens der Glieder ist dann erst recht auch für alle $n \geq n_0 \quad x_n > G$. Die Folge divergiert gegen $+\infty$.

Ganz entsprechend erkennt man, daß eine monoton fallende und nicht beschränkte Folge gegen $-\infty$ divergiert.

II. Ist die Folge $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt, etwa stets $x_1 \leq x_n \wedge |x_n| \leq K$, $K > 0$, so liegen alle Glieder der Folge in dem Intervall J_0, das sich von $-K$ bis $+K$ erstreckt. Auf dieses Intervall wenden wir die *Halbierungsmethode* an.

Wir bezeichnen mit J_1 die Hälfte von J_0, in der unendlich viele glieder der Folge liegen, mit J_2 die Hälfte von J_1, in der unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$ liegen, usw.

Die Intervalle der so entstandenen Schachtelung haben alle die Eigenschaft, daß : liegt in J_k z.B. der Punkt x_{n_k}, so liegen auch alle Punkte x_n mit $n \geq n_k$ in J_k, denn sie liegen nach Voraussetzung rechts von x_{n_k}, aber nach der Konstruktion von J_k nicht rechts vom rechten Endpunkt dieses Intervalls.

Durch passende Wahl der Zahlen $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$ kann man demnach erreichen, daß für $k = 1, 2, 3, ..., n, ...$ die folgende Aussage gilt:

In J_k liegen alle x_n mit $n \geq n_k$, aber rechts von J_k ist kein x_n mehr gelegen.

Ist nun ξ durch diese Intervallschachtelung bestimmt, so läßt sich zeigen, daß $x_n \to \xi$ strebt. Wird nämlich die positive Zahl ε beliebig gewählt, so bestimme man die Nummer p so, daß die Länge von J_p kleiner als ε ist. Neben ξ liegen dann auch alle x_n mit $n \geq n_p$ in J_p, so daß also für alle $n \geq n_p \quad |x_n - \xi| < \varepsilon$ ausfällt und x_n gegen ξ strebt.

Ist $\{x_n\}$ eine monoton fallende und beschränkte Zahlenfolge, so ist die Folge $\{y_n\}$ der Zahlen $y_n = -x_n$ monoton wachsend und beschränkt und also konvergent. Dann ist auch die Folge der Zahlen $-y_n = x_n$ konvergent.

□

Beispiel 6.14. Die folgenden Zahlenfolgen sind auf Konvergenz (Divergenz) zu untersuchen.

(1) Es sei $x_n = \dfrac{\ln n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Wegen $x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \ln[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}] = \frac{1}{n(n+1)} \ln[\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^n]$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718... < 3$ ist die Folge monoton fallend, da

$x_{n+1} - x_n < \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{3}{n} \leq 0$ ist, wenn $n \geq 3$ ist.

Es gilt also $0 \leq x_n = \frac{\ln n}{n} < \frac{\ln 3}{3}$, $n \geq 3$.

Die Folge ist auch begrenzt, also konvergent.

(2) Es sei $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Wegen $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ ist die Folge monoton wachsend.

Wegen $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$, $k = 1, 2, ..., n$ ist $x_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$.

Wegen $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n+n}$, $k = 1, 2, ..., n$ ist $x_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ und also $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$, d.h. $\{x_n\}$ ist beschränkt.

Also sie ist konvergent.

(3) Die Folge $x_n = \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n-1}n}{n}$ ist divergent.

I. Es sei $n = 2k \Rightarrow x_n = \frac{(-1)k}{2k} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -\frac{1}{2}$.

II. Es sei $n = 2k - 1 \Rightarrow x_n = \frac{(-1)(k-1)+2k-1}{2k-1} = \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{k}} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \frac{1}{2}$.

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ "konvergiert" also gegen zwei verschiedene Grenzwerte. Sie ist also divergent.

Erklärung 6.15. Eine reelle Zahl ξ heißt *Häufungswert* oder *Häufungspunkt* einer Menge von reellen Zahlen, wenn in jeder (noch so kleinen) Umgebung der Stelle ξ unendlich viele Elemente der Menge liegen, wenn es also nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε immer noch unendlich viele Elemente x der Menge gibt, die der Bedingung $\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$ oder $|\,x - \xi| < \varepsilon$ genügen.

Satz 6.16. *Jede beschränkte unendliche Punktmenge besitzt mindestens einen Häufungspunkt (Satz von Bolzano - Weierstraß).*

Aufgabe 6.17. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

Lösung. Man setze $b_n = \sqrt[n]{n}$ ein. Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Man setze $c_n = \sqrt[n]{2n}$ ein. Es folgt

$c_n = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \ \wedge\ 1 < \sqrt[n]{2} \leq 2 \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{2} = 1 + \lambda_n \ \wedge\ \lambda_n > 0 \ \Rightarrow$

$2 = (1 + \lambda_n)^n \geq 1 + n\lambda_n \ \Rightarrow\ \lambda_n \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \ \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} c_n = 1 \ \Rightarrow\ b_n \leq x_n = \sqrt[n]{n+1} \leq c_n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$

(2) $\{x_n\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...\} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

Lösung. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}, ..., x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, ...$

$\Rightarrow\ x_n^2 = 2 + x_{n-1}$.

I. $\{x_n\}$ ist eine beschränkte Zahlenfolge.

Man nutze die Methode der volständigen mathematischen Induktion:

(i) $x_1 = \sqrt{2} \ \Rightarrow\ 1 < x_1 < 2$;

(ii) Man setze voraus, daß $1 < x_k < 2$ ist;

(iii) $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2 \ \wedge\ x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2} > 1.$

$$\Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad 1 < x_n < 2.$$

II. $\{x_n\}$ ist eine monoton wachsende Folge.

Man nutze die Methode der vollständigen Induktion:

(i) $x_2 - x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}} > 0 \;\Rightarrow\; x_2 > x_1;$

(ii) Man setze voraus, daß $x_k > x_{k-1}$ ist;

(iii) $x_{k+1}^2 = 2 + x_k \;\wedge\; x_k^2 = 2 + x_{k-1} \;\Rightarrow\; x_{k+1}^2 - x_k^2 = x_k - x_{k-1} > 0$
$\Rightarrow\; (x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k) > 0 \;\Rightarrow\; x_{k+1} > x_k.$
$\Rightarrow\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n.$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

Da $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert ξ, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Es gilt
$x_{n+1}^2 = 2 + x_n \;\Rightarrow\; \xi^2 = 2 + \xi \;\Rightarrow\; \xi_1 = -1 \;\wedge \xi_2 = 2.$
Da aber $1 < x_n < 2,\ n = 1, 2, ...,$ ist, so ist auch $1 < \xi \leq 2 \;\Rightarrow\; \xi = 2.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1.$
Lösung. $x_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n = (1 - \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^n \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-1}.e = 1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!} = 1.$
Lösung. $(n+2)! + n! = n!\{(n+2)(n+1) + 1\} = n!\{n^2 + 3n + 3\};$
$(n+2)! - n! = n!\{(n+2)(n+1) - 1\} = n!\{n^2 + 3n + 1\}.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 1.$
Lösung.
$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \;\wedge\; \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2} < ... < \sqrt{n^2+n} \;\Rightarrow$
$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} \quad \wedge$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n!)}{n} = 0.$
Lösung. $-1 \leq \sin(n!) \leq 1 \;\Rightarrow\; |\,x_n| = \frac{1}{n}|\sin(n!)| \leq \frac{1}{n} \;\longrightarrow\; 0.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2 + n + 1)}{n - \sqrt{2}} = 0.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n}\right\} = 2.$

(9)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + ... + b_l} = \begin{cases} 0 & l > k; \\ \dfrac{a_0}{b_0} & l = k; \\ \infty & l < k. \end{cases}$$

Satz 6.18. Das zweite Hauptkriterium (für beliebige Zahlenfolgen) : *Eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist jedesmal dann, aber auch nur dann konvergent, wenn sich nach Wahl einer jeden positiven Zahl ε immer eine Stelle $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß $|\,x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ ausfällt, sobald n und n' beide $\geq n_0$ sind (Satz von Cauchy).*

Beispiel 6.19. $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$.

Die Folge $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, ...$ ist beschränkt, $0 \leq x_n \leq 1$, aber nicht monoton. Es ist nämlich

$|\, x_1 - x_0| = 1,\ |\, x_2 - x_1| = \frac{1}{2}, ..., |\, x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2}|\, x_n - x_{n-1}| = ... = \frac{1}{2^n}, ...$

und es ist sofort klar, daß der Abstand je zweier aufeinander folgender Glieder eine Nullfolge bildet. Außerdem

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 : (\frac{1}{2})^{n_0} < \varepsilon \ \wedge\ |\, x_n - x_{n'}| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \ \wedge\ \forall\, n' \geq n_0,$$

da zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern alle weiterhin folgenden liegen.

Aufgabe 6.20. (1) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen $\{x_n\}_1^\infty$:

$$x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right); \qquad x_n = \frac{n}{(n+1)^2};$$
$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \qquad x_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n;$$
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad x_n = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n}};$$
$$x_n = \frac{n}{n+1} + \sqrt{n}; \qquad x_n = \frac{4 + \sqrt{n}}{n}.$$

(2) Sind die Folgen $\{a_n\}_1^\infty$ beschränkt?

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2}; \qquad a_n = \frac{(n+2)^2}{n+1}.$$

(3) Sind die Folgen $\{a_n\}_1^\infty$ monoton?

$$a_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}; \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 + \frac{1}{3^n}\right).$$

(4) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen $\{x_n\}$:

$$x_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 3}{n^2 + 3n + 2}\right)^n; \qquad x_n = \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 5n + 6}\right)^{2n}; \qquad x_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n;$$
$$x_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n; \qquad x_n = \left(\frac{n+5}{n+4}\right)^n; \qquad x_n = \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^n;$$
$$x_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 - 2n - 3}\right)^n; \qquad x_n = \left(\frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + 6n}\right)^n; \qquad x_n = \left(\frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{n}{2}};$$
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k}, k \in \mathbb{Z}; \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nk}, k \in \mathbb{Z}.$$

7. Unendliche Zahlenreihen

Es sei $\{a_n\}$ eine unendliche Zahlenfolge.

Eine *unendliche Zahlenreihe* ist ein Ausdruck der Gestalt

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \in \mathbb{R}.$$

Die (endlichen) Summen $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, ...,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$ heißen die *Partial-* oder *Teilsummen* der Reihe.

Besitzt die Folge der Teilsummen $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ einen Grenzwert S, so nennt man die Reihe *konvergent* und S ihre *Summe*, d.h. $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n.$ Existiert dieser Grenzwert nicht, so heißt die Reihe *divergent*.

Es ist klar, daß eine unendliche Reihe dann und nur dann konvergiert, wenn eine Zahl S so gefunden werden kann, daß die Differenz $R_{n+1} := S - S_n$ eine Nullfolge bildet. Nennt man R_{n+1} den *Rest der Reihe*, so ist also die Reihe genau dann konvergent, wenn ihr Rest gegen Null strebt.

Beispiel 7.1. Man untersuche die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

auf Konvergenz und ermittle gegebenfalls ihre Summe.

Lösung. $a_n := \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Wir bilden die Teilsummen
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}.$

Aufgabe 7.2. Bestimmen Sie Konvergenz und Summe der Reihen:

(1) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} + ...$ $\qquad S = 1$

(2) $\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ...$ $\qquad S = \frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + ... + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + ...$ $\qquad S = \frac{1}{12}$

(4) $\frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.8} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+5)} + ...$ $\qquad S = \frac{77}{60}$

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$ $\qquad S = \frac{3}{4}$

Erklärung 7.3. Die geometrischen Reihen: Eine unendliche Reihe der Gestalt

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

heißt eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied a und dem Quotienten q;
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$

Für das n-te, $(n+1)$-te und $(n+2)$-te Glied einer geometrischen Reihe gilt:
$a_n := aq^{n-1}$, $a_{n+1} = aq^n$, $a_{n+2} = aq^{n+1} \Rightarrow a_n a_{n+2} = a^2 q^{2n} = a_{n+1}^2$.
Für die Teilsumme S_n einer geometrischen Reihe ergibt sich
$S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} \;\Rightarrow\; qS_n = aq + aq^2 + ... + aq^n \;\Rightarrow$
$S_n - qS_n = a - aq^n = a(1-q^n) \;\Rightarrow\; S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.
Diese Formel heißt oft auch *Summe der endlichen geometrischen Reihe.*

Berühmtheit hat die **Schachbrettaufgabe** erlangt, nach welcher sich der Erfinder des Schachspieles, Sessa, von dem indischen König Scheram als Belohnung diejenige Summe von Weizenkörnern erbeten haben soll, die sich ergibt, wenn man aufs erste der 64 Felder ein Korn und auf jedes weitere Feld die jeweils doppelte Zahl von Körnern legt. Es ergibt sich die Teilsumme S_n einer geometrischen Reihe mit $a = 1$, $q = 2$, $n = 64 :\; S_n = 2^{64} - 1 \approx 10^{19}$, also eine in Größenordnung von 10 Trillionen liegende Zahl.

Satz 7.4. *Eine geometrische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *konvergiert genau dann, wenn* $|\,q| < 1$ *ist und hat dann zur Summe* $\dfrac{a}{1-q}$.

Beweis. $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n$.
Da $\lim_{n\to\infty} q^n$ genau dann vorhanden ist, wenn $|\,q| < 1$ ist und $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ist, so bekommen wir für den gesuchten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

□

Für das Restglied der geometrischen Reihe ergibt sich
$R_{n+1} = S - S_n = \frac{a}{1-q} - a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q}$ und
$\lim R_{n+1} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad\Leftrightarrow\quad |\,q| < 1$.

Beispiel 7.5. (*Achilles und die Schildkröte*) In der Antike wurde von Philosophen das folgende Problem diskutiert: Achilles und eine Schildkröte laufen um die Wette. Achilles legt in einer Sekunde $10m$ zurück, während die (für ihresgleichen sehr flinke) Schildkröte in einer Sekunde nur $1m$ bewältigt. Dafür hat sie $10m$ Vorsprung. Wann holt Achilles die Schildkröte ein?
Die antiken Philosophen haben das Problem auf eine unendliche Reihe zurückgeführt.

- Zunächst durchläuft Achiles die $10m$ lange Strecke, die die Schildkröte Vorsprung hat, und benötigt dazu 1 Sekunde.
  In dieser Zeit legt die Schildkröte $1m$ zurück. Sie hat jetzt $1m$ Vorsprung. Es ist eine Sekunde verstrichen.
- Dann durchläuft Achilles den $1m$-Vorsprung der Schildkröte und benötigt dazu $\frac{1}{10}$ Sekunde.
  In dieser Zeit legt die Schildkröte $0,1m$ zurück. Sie hat jetzt $0,1m$ Vorsprung. Es sind $1 + \frac{1}{10}$ Sekunde verstrichen.
- Dann durchläuft Achilles den $0,1m$-Vorsprung der Schildkröte und benötigt dazu $\frac{1}{100}$ Sekunde.
  In dieser Zeit legt die Schildkröte $0,01m$ zurück. Sie hat jetzt $0,01m$ Vorsprung. Es sind $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ Sekunde verstrichen...

Diese Zerlegung des Aufholvorgangs in einzelne Perioden kann man beliebig lang fortsetzen. Nach der Periode n hat die Schildkröte immer noch $0,1^{n-1}m$ Vorsprung und es sind $S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}$ Sekunden vergangen. Daraus schlossen die antiken Philosophen, daß Achiles die Schildkröte niemals einholen kann, weil "bis dahin unendlich viele Zeitperioden mit einer positiven Dauer verstreichen müßten".

Natürlich hat Achilles die Schildkröte schließlich doch erwischt. Worin besteht aber der Fehler in der Schlußfolgerung der Antike? Die Antwort lautet: Es ist nicht richtig, daß unendlich viele Zeitperioden mit einer positiven Dauer notwendig als Summe eine unendlich lange Zeitperiode ergeben müssen!

Sehen wir uns an, wann Achilles die Schildkröte erwischt. Nach n Perioden sind $S_n = \frac{1-0,1^n}{1-0,1} = \frac{10}{9}(1-0,1^n) \leq \frac{10}{9}$ Sekunden verstrichen. Die verstrichene Zeit übersteigt nie das Ausmaß von $\frac{10}{9}$ Sekunden, gleichgültig wie viele Perioden man auch durchläuft. Schließlich, nach unendlich vielen durchlaufenen Perioden erwischt Achilles seine Schildkröte und es sind $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}(1-0,1^n) = \frac{10}{9}$ Sekunden verstrichen.

Aufgabe 7.6. (1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$ $S = 2$

(2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{n-1}}.$ $S = \frac{2}{3}$

(3) Jeder periodische unendliche Dezimalbruch kann als konvergente geometrische Reihe geschrieben werden:

a) $0,666... = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 6.10^{-n} \Rightarrow a = \frac{6}{10},\ q = \frac{1}{10} \Rightarrow$

$$S = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{3}.$$

b) $0,131313... = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 13.100^{-n} \Rightarrow S = \frac{13}{99}.$

c) $3,2777... = 3,2 + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = 3,2 + \sum_{n=2}^{\infty} 7.10^{-n} \Rightarrow S = \frac{59}{18}.$

Die Summe ist stets eine **rationale** Zahl.

(4) Folgende geometrische Reihen sind divergent:

a) $1 + 3 + 9 + 27 + ...$ $q = 3 > 1.$

b) $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ $q = -1.$

c) $0,5 + 0,55 + 0,605 + 0,6655 + ...$ $q = 1,1 > 1.$

(5) Wie groß ist der Fehler gegenüber der Summe folgender Reihe, wenn man diese nach 5 Gliedern abbricht?

$$27 - 9 + 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + ...$$

Lösung. $a = 27,\ q = -\frac{1}{3} \Rightarrow R_6 = S - S_5 = \frac{aq^5}{1-q} = -\frac{1}{12}.$

(6) *Barwert einer ewigen Rente*: Um eine vorschüssige Rente von a GE n-mal auszahlen zu können, benötigen wir ein Kapital in der Höhe des Barwerts $B_n = a\dfrac{1-v^n}{1-v}$, wobei v den Abzinsungsfaktor bezeichnet.

Wir stellen uns nun die Frage, welches Kapital B_∞ wir benötigen, um die Rente ewig auszahlen zu können.

Die Folge $\{B_n\}$ ist die Folge der Partialsummen einer geometrischen Reihe. Da $0 < v < 1$ ist, handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und

$$B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{a}{1-v}.$$

(7) *Ewige Rente*: Welches Kapital ist nötig, um beim Zinssatz von 8% eine ewige Rente (vorschüssige!) in Höhe von 1000 GE finanzieren zu können?

Es ist $v = \frac{1}{1{,}08} = 0,925$ und daher $K_\infty = \frac{1000}{1-v} = 13500$ GE.

7.1. **Konvergenzkriterien.**

7.1.1. *A. Reihen mit lauter positiven Gliedern.*

Satz 7.7. Notwendiges Konvergenzkriterium. *Notwendig (aber* **nicht** *hinreichend) für die Konvergenz einer Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist, daß* $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *bzw.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *d.h. die Glieder der Reihe müssen eine Nullfolge bilden.*

Bemerkung 7.8. Konvergiert eine Reihe, so ist das Kriterium stets erfüllt.

Aber aus dem Bestehen der Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ kann nicht auf die Konvergenz der Reihe geschlossen werden.

Ist die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht erfüllt, so ist die Reihe sicher **divergent**.

Satz 7.9. Majorantenkriterium. *Es seien* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *zwei unendliche Reihen, bei denen von einer Stelle* $n = k$ *ab jedes Glied der* a*-Reihe größer oder gleich dem entsprechenden Glied der* b*-Reihe ist, d.h.* $b_n \leq a_n$, $\forall\, n \geq k$. *Dann gilt:*

(i) *aus Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *folgt Konvergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) *aus Divergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *folgt Divergenz von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Im Falle (*i*) heißt die a-Reihe eine konvergente *Majorante* für die b-Reihe; im Falle (*ii*) die b-Reihe ist eine divergente *Minorante* für die a-Reihe.

Die Schlüsse sind **nicht umkehrbar**!

Beispiel 7.10. Es soll die *harmonische Reihe*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz untersucht werden.

Lösung. **I. Beweismethode**. Wir schreiben die Reihe in der Form
$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)+...$
und vergleichen sie klammernweise mit der Reihe
$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}\right)+...$
Die n-te Klammer $(n>1)$ der letzten Reihe hat 2^{n-1} gleiche Summanden 2^{-n}. Diese Reihe läßt sich auch in der Form
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+...$
schreiben. Sie ist also **sicher divergent**, da die Glieder keine Nullfolge bilden (notwendiges Konvergenzkriterium!). Außerdem ist jedes Glied der harmonischen Reihe größer als das entsprechende Glied der Vergleichsreihe:
$\left(1+\frac{1}{2}\right)>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right),...$
Also ist die letztere eine **divergente Minorante** für die hatmonische Reihe und folglich auch diese **divergent**!

II. Beweismethode. Wir bilden die Teilsummen $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Ist die Folge $\{S_n\}$ konvergent, so soll auch ihre Teilfolge $\{S_{2n}\}$ konvergent sein und gegen denselben Grenzwert streben. Demnach soll $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ sein. Es ist aber
$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\ \geq\ \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, d.h. $S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{2}$
und die Folge $\{S_{2n}-S_n\}$ ist keine Nullfolge.

Die harmonische Reihe ist **divergent**!

□

Aufgabe 7.11. (1) Die Reihe $2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{4}+...+\dfrac{n+1}{n}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ ist divergent.

(2) Die Reihe $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{n^2}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

Lösung. Wir nehmen die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ in Betracht. Da $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$ ist, so ist die Reihe $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und diese auch konvergent.

(3) Die Reihe $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}+...+\dfrac{2}{2n-1}+...$ ist divergent.

Lösung. $a_n:=\frac{2}{2n-1}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}>\frac{1}{n}$, und die harmonische Reihe ist divergent.

Satz 7.12. Quotientenkriterium (*Kriterium von D'Alembert*).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ \left(\text{bzw. }\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\begin{cases}<1 & \Rightarrow\ \text{Konvergenz von }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\ =1 & \Rightarrow\ \text{keine Aussage}\\ >1 & \Rightarrow\ \text{Divergenz von }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\end{cases}$$

Das Kriterium ist **hinreichend**.

Aufgabe 7.13. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz.

(1) $1+\dfrac{4}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\dfrac{10}{4!}+...+\dfrac{3n-2}{n!}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n!}$.

Lösung. $a_n = \frac{3n-2}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{3n+1}{(n+1)!}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+1}{(n+1)(3n-2)}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $0 < 1$.
Die Reihe ist konvergent.

(2) $\displaystyle \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(3) $\displaystyle \frac{5}{12} + \frac{25}{48} + \frac{125}{108} + ... + \frac{5^n}{12n^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{12n^2}$.
Lösung. $a_n = \frac{5^n}{12n^2}$, $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{12(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5n^2}{(n+1)^2}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $5 > 1$.
Die Reihe ist divergent.

Satz 7.14. Wurzelkriterium.

$$\sqrt[n]{a_n} \left(\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\right) \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{ Konvergenz von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ = 1 & \Rightarrow \text{ keine Aussage} \\ > 1 & \Rightarrow \text{ Divergenz von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{cases}$$

Das Kriterium ist **hinreichend**.

Beispiel 7.15. (1) Die Reihe

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{8}\right)^4 + ... + \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

konvergiert.
Lösung. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{2n}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $\frac{1}{2} < 1$.

(2) Die Reihe

$$\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{2}\right)^9 + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{n^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}$$

divergiert.
Lösung. $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ ∞.

(3) Die Reihe $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ konvergiert.
Lösung. $\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{n}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $0 < 1$.

Aufgabe 7.16. (1) Untersuchen Sie folgende Reihen mit dem **notwendigen** Konvergenzkriterium auf Divergenz.
a) $\displaystyle \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + ...$ *b)* $\displaystyle \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + ...$
c) $\displaystyle \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{5}\ln 5 + ...$

(2) Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz mit dem Quotientenkriterium.
a) $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + ...$ *b)* $\displaystyle \frac{3}{7} + \frac{8}{12} + \frac{13}{17} + \frac{18}{22} + ...$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n(n+1)}}$; *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$.

(3) Wenden Sie auf die folgenden Reihen das Wurzelkriterium an.

a) $1 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{12}\right)^3 + \left(\frac{12}{15}\right)^4 + ...$ *b)* $\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^3 + \left(\frac{10}{12}\right)^4 + ...$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2.3^2}} + \frac{9}{\sqrt{3.3^3}} + \frac{13}{\sqrt{4.3^4}} + ...$

Lösung. c) $a_n = \frac{4n-3}{\sqrt{n.3^n}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{4n-3}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{3^n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[n]{4n-3}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n-3} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$

d) $\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{6}\right)^9 + \left(\frac{4}{7}\right)^{16} + ...$ *e)* $1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^4 + ...$

(4) Entscheiden Sie das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten folgender Reihen durch Vergleich mit bekannten Reihen.

a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + ...$

Hinweis. $n^n \geq 2^n \quad \forall\, n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

b) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$

Hinweis. $n.n > n.(n-1) \quad \forall\, n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Hinweis. 1) $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$.

2) $\alpha \geq 2 \Rightarrow n^\alpha \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Anleitung. $n^2 + n < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

7.1.2. *Alternierende Reihen.* Eine unendliche Reihe heißt *alternierend*, wenn ihre Glieder abwechselnd verschiedenes Vorzeichen haben:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...,$

wobei $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Das **notwendige** Konvergenzkriterium gilt auch hier.

Satz 7.17. Leibnizsches Konvergenzkriterium*: Hinreichend für die Konvergenz einer alternierenden Reihe ist, daß die Gliedfolge eine monotone Nullfolge bildet.*

Bemerkung 7.18. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ eine alternierende Reihe.

- Ist die Gliedfolge $\{a_n\}$ eine monotone Nullfolge, so ist die Reihe konvergent.
- Ist die Gliedfolge $\{a_n\}$ keine Nullfolge, so ist die Reihe divergent.
- Ist die Gliedfolge eine nicht-monotone Nullfolge, d.h. die Glieder streben nicht monoton gegen Null, so ist keine Aussage über Konvergenz / Divergenz der Reihe möglich.

In vielen Fällen führt eine Betrachtung der zugehörigen Reihe der absoluten Beträge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zum Ziel. Sollte sich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als konvergent erweisen, so konvergiert auch die vorgelegte alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ und heißt dann *absolut konvergent.*

Die absolute Konvergenz schließt also die einfache Konvergenz stets ein, nicht aber umgekehrt!

Konvergiert eine alternierende Reihe ohne absolut konvergent zu sein, so sagt man, daß sie *nicht-absolut konvergiert.*

Es gilt stets

Satz 7.19. Satz von Riemann: *Eine nicht-absolut konvergente alternierende Reihe kann stets so umgeformt werden, daß die neue Reihe einen beliebig vorgegebenen Summenwert besitzt.*

Alternierende Reihen, deren Summe von der Anordnung ihrer Glieder abhängt, nennt man *bedingt konvergent.*

Ergibt sich bei jeder Anordnung der Glieder der gleiche Summenwert, so heißt die Reihe *unbedingt konvergent.*

Jede unbedingt konvergente Reihe ist zugleich absolut konvergent und umgekehrt.

Aufgabe 7.20. (1) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ist bedingt konvergent.

(2) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3n}$ ist divergent.

(3) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ ist absolut konvergent.

(4) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ ist absolut konvergent.

(5) Beweisen Sie nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{2^n}$.

(6) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{|\sin n|^n}{n^2}$ ist absolut konvergent.

(7) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ist konvergent.

(8) Untersuchen Sie folgende Reihen mit dem Leibnizschen Kriterium.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n+1}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n-1}{4n}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

(9) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}$ ist konvergent.

Anleitung: $\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right\}$.

(10) Die Reihe $1-1+1-1+1-...+1-1+...$ ist divergent.

(11) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent.

Anleitung: $S_n \geq \sqrt{n}$.

(12) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ ist divergent.

8. Komplexe Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen sind die vier Grundoperationen bis auf die Division durch Null stets ausführbar und liefern ein eindeutig bestimmtes Ergebnis. Beim Radizieren bestehen jedoch noch Einschränkungen. So ist z.B. die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert. Dies führt zum Aufbau des Bereichs der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Auf die Gleichung $x^2 - 10x + 40 = 0$ kam *Geronimo Cardano* (ein italienischer Mathematiker des 16. Jahrhunderts) bei der Aufgabe, die Zahl 10 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt 40 ergibt. G. Cardano löste die Gleichung nach dem üblichen, damals schon bekannten Verfahren und gab als Lösung an: $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5-\sqrt{-15}$. Diese für x_1 bzw. x_2 angegebenen "Werte" haben eigentlich keinen Sinn, denn die Quadratwurzel aus negativen Zahlen ist nicht erklärt. Wenn man aber so rechnet, als wäre $\sqrt{-15}$ eine ganz "normale" Zahl, dann findet man bei der Probe mit Hilfe des *Satzes von Vieta* : $x_1 + x_2 = 10 \wedge x_1x_2 = (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$. Das heißt, x_1 und x_2 "erfüllen" die in der Aufgabe gestellten Bedingungen.

Man nannte diese Zahlen (Quadratwurzel aus negativen Zahlen) *imaginär*, d.h. "eingebildet", "unwirklich".

Besondere Verdienste um das Klären des Wesens der imaginären Zahlen erwarben sich *L. Euler* im 18., *W. R. Hamilton* (ein irrischer Mathematiker) und *C. F. Gauß* im 19. Jahrhundert. Das Ergebnis war schließlich ein neuer Zahlenbereich, der Bereich der *komplexen Zahlen.* Diese als rein innermathematisch entstandene Theorie fand vielseitige Anwendungen: bei der Beschreibung von Wechselstromkreisen; bei Problemen des Strömungsverhaltens in Flüssigkeiten und Gasen; in der Quantentheorie und der Theorie der Elementarteilchen.

Aus unserem Wissen über die reellen Zahlen und über Teilbereiche derselben (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$) können bereits einige große Vorstellungen von dem neu zu schaffenden Zahlenbereich gewonnen werden:

a) Die Elemente des neuen Bereichs werden im allgemeinen aus zwei "Komponenten" bestehen - einer reellen Zahl und einem bf imaginären Teil.

b) Da beim "üblichen Rechnen" mit den Elementen des neuen Bereichs auch **reelle** Zahlen als Ergebnisse auftreten können, werden diese im neuen Bereich vermutlich als **Teilbereich** enthalten sein.

c) Wenn die reellen Zahlen im neuen Bereich als Teilbereich enthalten sein können, dann müssen die von den reellen Zahlen her bekannten Rechengesetze auch im neuen Bereich gelten.

Die “imaginären” Zahlen ließen sich dann alle als “Produkte” der Form $\sqrt{-1}\,b,\ b \in \mathbb{R}^+$, schreiben; dann könnten die Elemente des neuen Bereiches alle in der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$ geschrieben werden, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ist.

d) Die Frage nach einer **geometrischen Darstellbarkeit** der neuen Zahlen legt folgende Überlegung nahe:

Wenn jede dieser Zahlen in der Form $a + b\sqrt{-1}$ $(a - b\sqrt{-1})$, geschrieben werden kann, dann ist sie durch das geordnete Paar (a, b) von reellen Zahlen eindeutig festgesetzt. Man kann (a, b) als Koordinaten eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem auffassen und der Zahl $a + b\sqrt{-1}$ somit den Punkt mit den Koordinaten (a, b) zuordnen. So gehört zu jeder Zahl $a + b\sqrt{-1}$ genau ein Punkt und umgekehrt.

8.1. **Konstruktion des Bereiches der komplexen Zahlen.** Wir betrachten alle geordneten Paare reeller Zahlen (a, b) und wollen jedes solche Paar als eine **komplexe Zahl** auffassen. Wir müssen zeigen, wie man mit diesen Zahlen so rechnen kann, daß im Prinzip die gleichen Rechengesetze gelten wie für die reellen Zahlen.

Erklärung 8.1. *Addition* komplexer Zahlen:

$$(a, b) + (c, d) =: (a + c, b + d).$$

Die so definierte Addition ist *kommutativ* und *assoziativ.*

Die *Subtraktion* komplexer Zahlen wird als Umkehroperation zur Addition erklärt. Es ergibt sich

$$(a, b) - (c, d) =: (a - c, b - d).$$

Erklärung 8.2. *Multiplikatiom* komplexer Zahlen:

$$(a, b)(c, d) =: (ac - bd, ad + bc).$$

Die so erklärte Multiplikation ist *kommutativ* und *assoziativ.*

Die Addition und Multiplikation sind durch das *Distributivgesetz* miteinander verbunden.

Die *Division* komplexer Zahlen wird als Umkehroperation zur Multiplikation erklärt. Sie ist stets eindeutig ausführbar, sofern der Divisor nicht $(0, 0)$ ist.

Die Paare der Form $(a, 0)$ entsprechen den reellen Zahlen. Die reellen Zahlen bilden somit einen Teilbereich der komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Eine andere Teilmenge der komplexen Zahlen bilden die Paare der Form $(0, b)$. Man kann sie alle als Produkt einer reellen Zahl mit dem Paar $(0, 1)$ darstellen:

$$(b, 0).(0, 1) = (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) = (0, b).$$

Dies rechtfertigt, für das Paar $(0, 1)$ ein spezielles Symbol zu benutzen. Man verwendet dafür den Buchstaben i - die *imaginäre Einheit.*

Rechnen wir die Zahl $i^2 = i.i$ aus:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1.$$

Wir stellen fest: Im Bereich der komplexen Zahlen gibt es Elemente, **deren Quadrat eine negative reelle Zahl ist** (z.B. die Zahl i).

Nun können wir jedes Paar (a, b) in der Form $(a, 0) + (0, b)$ oder $a + i\,b$ darstellen. Man bezeichnet dabei a als *Realteil*, b als *Imaginärteil* der komplexen Zahl.

Es seien $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ z_2 = a_2 + i\,b_2$ zwei komplexe Zahlen.
Addition: $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$.
Subtraktion: $z_1 - z_2 := (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)$.
Multiplikation: $z_1\,z_2 := (a_1 + i\,b_1)(a_2 + i\,b_2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)$.
Division: $z_2 \neq 0,\quad \dfrac{z_1}{z_2} = z \quad \Leftrightarrow \quad z_2\,z = z_1$.
Es sei $z = x + i\,y$ die gesuchte komplexe Zahl $\dfrac{z_1}{z_2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_1 + i\,b_1 = \ & (a_2 + i\,b_2)(x + i\,y) &=& \ (a_2\,x - b_2\,y) + i\,(a_2\,y + b_2\,x) \\ \Leftrightarrow \ & a_1 = a_2\,x - b_2\,y &\wedge& \ b_1 = a_2\,y + b_2\,x \\ \Leftrightarrow \ & x = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} &\wedge& \ y = \frac{a_2\,b_1 - a_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Erklärung 8.3. Zwei komplexe Zahlen, $z = a + i\,b$ und $\bar{z} = a - i\,b,\ a, b \in \mathbb{R}$, die sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, heißen *konjugiert-komplexe* Zahlen.

Die rationalen Verknüpfungen von zwei konjugiert-komplexen Zahlen liefern:
(i) $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$;
(ii) $z - \bar{z} = 2\,i\,b$;
(iii) $z.\bar{z} = a^2 + b^2 =: |\,z\,|^2 \in \mathbb{R}$.
(iv) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{a + i\,b}{a - i\,b} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\,\dfrac{2ab}{a^2 + b^2},\ z \neq 0$;
(v) $\left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right| = 1,\ z \neq 0$.

Erklärung 8.4. Unter dem *Betrag einer komplexen Zahl* $z = a + i\,b$ versteht man den nichtnegativen Ausdruck $|\,z\,| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Satz 8.5.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Es seien $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ z_2 = a_2 + i\,b_2$ zwei komplexe Zahlen. Es gilt:
$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i\,(b_1 \pm b_2) \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1 \pm z_2} = (a_1 \pm a_2) - i\,(b_1 \pm b_2) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
$z_1\,z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) \Rightarrow \overline{z_1\,z_2} = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) - i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
□

8.2. **Geometrische Darstellung komplexer Zahlen.** Es sei $\mathcal{E}$ eine gegebene Ebene und Oxy ein festgelegtes kartesisches Koordinatensystem in $\mathcal{E}$. Bei der Zuordnung

$$z = a + i\,b \in \mathbb{C} \ \rightleftarrows \ P(a, b) \in \mathcal{E},$$

d.h.

$$\{\text{komplexe Zahl}\} \quad \longmapsto \quad \{\text{Punkt der Ebene } \mathcal{E}\}$$

und umgekehrt

$$\{\text{Punkt der Ebene } \mathcal{E}\} \quad \longmapsto \quad \{\text{komplexe Zahl}\}$$

spricht man von der *komplexen Zahlenebene* $\mathcal{E}$, auch *Gaußsche Ebene* genannt. Die Koordinatenachsen des kartesischen Koordinatensystems in der Ebene $\mathcal{E}$ bezeichnet man als *reelle* (Abszissen-) bzw. *imaginäre* (Ordinaten-) Achse.

Zuweilen werden komplexe Zahlen auch als Pfeile dargestellt, deren Anfangspunkt der Nullpunkt O des Koordinatensystems ist.

Die Addition zweier komplexer Zahlen kann dann geometrisch wie die Addition zweier durch die Pfeile dargestellter Vektoren realiziert werden.

Der Betrag der komplexen Zahl $z = a + i\,b$ ist der Abstand von z vom Nullpunkt O des Koordinatensystems. Nach dem Satz von Pythagoras gilt $|\,z\,| = |\,a + i\,b\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung 8.6. Da die komplexen Zahlen den Punkten einer Ebene zugeordnet sind, **unterliegen sie keiner Ordnung**!

8.3. **Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen.** Aus der geometrischen Darstellung der komplexen Zahl $z = a + i\,b$ ist unmittelbar ersichtlich, daß folgendes gilt:

$$a = |\,z|\cos\varphi, \quad b = |\,z|\sin\varphi, \quad \varphi := \angle(l^{\rightarrow}, OM^{\rightarrow}).$$

Die komplexe Zahl z läßt sich in der *trigonometrischen* Form

$$z = |\,z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

darstellen, d.h. die komplexe Zahl z ist durch ihren Betrag $|\,z|$ sowie durch den Winkel φ, den der Pfeil $\overrightarrow{OM}$ mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt, bestimmt. Man bezeichnet φ als das *Argument* von z. Dabei wird $0 \le \varphi < 2\pi$ vorausgesetzt.

Die Zahl $z = 0$ besitzt den Betrag 0. Ihr ist **kein** Argument zugeordnet.

Beispiel 8.7. (1) Gegeben ist $z = 3 + 4i$. Gesucht ist die trigonometrische Darstellung von z.

Lösung. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Aus $a = |z|\cos\varphi$ und $b = |z|\sin\varphi$ folgt $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ und $\varphi \approx 0,927 \Rightarrow\; z = 5(\cos 0,927 + i\,\sin 0,927)$.

(2) Gegeben ist $z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6})$. Gesucht ist die algebraische Darstellung von z.

Lösung. $a = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 3\sin\frac{\pi}{6} = 3\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.

Aufgabe 8.8. Wandeln Sie in die jeweils andere Darstellung um:

$$z = -3 + \frac{1}{2}\,i; \quad z = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Bei der *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung ergibt sich entsprechend der Definition dieser Rechenoperation folgendes:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \quad \Rightarrow \\ z_1\,z_2 &= r_1\,r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,r_1\,r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\ &= r_1\,r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Satz 8.9. *Bei der Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.*

Aufgabe 8.10. Berechnen Sie $z = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2$.

8.3.1. *Die geometrische Deutung der Multiplikation.* Wir haben folgende geometrische Konstruktion zur Ermittlung vom Produkt $z_1\, z_2$:

(1) Man markiert die zu den Zahlen z_1 bzw. z_2 gehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene und bezeichnet sie entsprechend mit Z_1 bzw. Z_2. Der zur Zahl $z = 1$ gehörende Punkt werde mit E bezeichnet.
(2) Man dreht den Punkt Z_2 im positiven Drehsinn um O mit dem Drehwinkel φ_1. Das Bild von Z_2 sei ${Z_2}'$.
(3) Man zeichnet den Strahl $O{Z_2}'^{\rightarrow}$.
(4) Man trägt im Punkt Z_2 den Winkel OEZ_1 so an die Strecke (OZ_2) an, daß seine Orientierung erhalten bleibt. Der freie Schenkel des angetragenen Winkels schneidet den Strahl $O{Z_2}'^{\rightarrow}$ im Punkt Z.

Behauptung: Für die zu Z gehörende Zahl z gilt $z = z_1\, z_2$.

Hinweise zum Beweis:

a) Vergleichen Sie $\triangle\, OEZ_1$ und $\triangle OZ_2Z$.
b) Wie groß ist das zu z gehörende Argument?

Wird beim Multiplizieren das Argument φ des Produktes gleich 2π oder größer, so daß man es in der Form $\varphi = \varphi_0 + k.2\pi$ (mit $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) schreiben kann ($k \in \mathbb{N}$), dann verwendet man im Ergebnis in der Regel nur den Wert φ_0, da $\sin(\varphi_0 + k.2\pi) = \sin\varphi_0$ und $\cos(\varphi_0 + k.2\pi) = \cos\varphi_0$ gilt.

Satz 8.11. *Für die Division zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung gilt*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0.$$

Falls $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ist, kann man diesen Winkel als durch **Linksdrehung** (mathematisch negativer Drehsinn) entstanden interpretieren oder ihn durch Addition von 2π in einen positiven Winkel mit gleichen Kosinus- bzw. Sinuswerten überführen.

Aufgabe 8.12. Gegeben sind $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}),\ z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3})$.

Gesucht ist $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Antwort: $\frac{z_1}{z_2} = 6(\cos\pi + i\,\sin\pi) = -6.$

Ausgehend von der Multiplikation zweier komplexer Zahlen erhalten wir für das Produkt von n komplexen Zahlen $z_s = r_s(\cos\varphi_s + i\,\sin\varphi_s),\ s = 1, 2, ..., n,$

$$z_1z_2...z_n = r_1r_2...r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)).$$

Ist $z_1 = z_2 = ... = z_n$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n,\ r_1 = r_2 = ... = r_n$, so gilt

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi)).$$

Satz 8.13. Satz von Moivre. *Das Potenzieren der komplexen Zahl* $\cos\varphi + i\,\sin\varphi$ *mit dem Exponenten* $n \in \mathbb{Q}$ *kann durch ein Multiplizieren des Winkels* φ *mit dem Faktor* n *ausgeführt werden.*

Erklärung 8.14. Unter der Wurzel $\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) verstehen wir im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen jede komplexe Zahl, deren n-te Potenz gleich z ist.

8.3.2. *Rechnerische Ermittlung der Werte* $\sqrt[n]{z}$. Die zu radizierende komplexe Zahl z wird zunächst in der trigonometrischen Form dargestellt, wobei man die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion berücksichtigt:

$$z = r(\cos(\varphi + k.2\pi) + i\,\sin(\varphi + k.2\pi)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nach dem Satz von Moivre ist dann

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + k.2\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + k.2\pi}{n}).$$

Dabei werde unter $r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$ der eindeutig bestimmte positive Wurzelwert verstanden. Setzt man für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, ..., n-1$ ein, so ist für jeden der Werte von k einen Wurzelwert von $\sqrt[n]{z}$ zu erhalten, da $k.\frac{2\pi}{n} < 2\pi$ ausfällt. Setzt man dagegen $k \geq n$, etwa $k = n + k', k' = 0, 1, 2, ...$, so wird wegen

$$\cos(\tfrac{\varphi}{n} + (n + k')\tfrac{2\pi}{n}) = \cos(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n} + 2\pi) = \cos(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n}),$$
$$\sin(\tfrac{\varphi}{n} + (n + k')\tfrac{2\pi}{n}) = \sin(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n} + 2\pi) = \sin(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n})$$

für jedes k' sich der gleiche Wurzelwert ergeben wie vorher für $k = 0, 1, ..., n-1$.

Satz 8.15. *Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ findet man mit*

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + k.2\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + k.2\pi}{n}),\ k = 0, 1, ..., n-1,$$

genau n verschiedene komplexe Werte.

Für $k = 0$ erhält man den *Hauptwert* von $\sqrt[n]{z}$, nämlich

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi}{n}).$$

Aufgabe 8.16. (1) Beweisen Sie:

$$z = 1 \ \Leftrightarrow\ z = \cos 0 + i\,\sin 0; \quad z = i \ \Leftrightarrow\ z = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}.$$

(2) Beweisen Sie:
  a) $z = 1 - i\sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$;
  b) $z = 3i \ \Leftrightarrow\ z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$;
  c) $z = -1 \ \Leftrightarrow\ z = \cos\pi + i\sin\pi$;
  d) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \ \Leftrightarrow\ z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\{\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\}$;
  e) $z = 2(\cos\frac{\pi}{6})^2 + i\sin\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow\ z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) Dividieren Sie aus: $\dfrac{3+i}{1+i}$; $\dfrac{1}{1-i}$; $\dfrac{2i-3}{1+i}$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\dfrac{(1+2i)(2-i)}{(1-i)(2-3i)}$; $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

(4) Radizieren Sie aus: $\sqrt{1}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[n]{1}$; $\sqrt[n]{-1}$.

(5) Radizieren Sie aus: $z = \sqrt{i}$; $z = \sqrt{32(-i)}$; $z = \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; $z = \sqrt[3]{i}$; $z = \sqrt[3]{1-i}$.

(6) Wann und nur wann (d.h. für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$) gilt die Gleichung $(1+i)^n = (1-i)^n$?

(7) Welche trigonometrische Darstellung haben folgende Zahlen

$$z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}; \quad z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{21}}{(1+i)^{30}}; \quad z = (1+i\sqrt{3})^3(1-i)^4; \quad z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}?$$

(8) Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} a)\ \dfrac{x-4+i(y-1)}{1+i} = 2-5i; & b)\ x^2+2x+3=0; \\ c)\ x^2-(3-2i)x+5(1-i)=0; & d)\ (3-i)x^2+(1+i)x+6i=0; \\ e)\ x^4-i=0; & f)\ x^4+16=0; \\ g)\ x^4-1=0; & h)\ x^5-1=0. \end{array}$$

Aufgabe 8.17. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 3x+y=a+2, \\ 9x^2+y^2=5a-2. \end{array} \right.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß das Produkt xy für reelle Lösungspaare (x, y) des Gleichungssystems einen minimalen Wert annimt.

9. Einführung in die lineare Algebra

9.1. **Grundbegriffe.** Vorgelegt sei das System aus zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Variablen (das (2×2)-lineare Gleichungssystem)

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{array} \right. \tag{9.1}$$

wobei die *Koeffizienten* a_{ik} und die *Absolutglieder* b_k, $i, k = 1, 2$, reelle Zahlen sind. Wir fordern noch $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ (das sogenannte *inhomogene lineare Gleichungssystem*).

Nach dem **Additionsverfahren** können wir leicht die allgemeine Lösung des Systems gewinnen. Zur Elimination von x_2 multiplizieren wir die erste Gleichung mit a_{22}, die zweite mit $-a_{12}$, addieren die neuerhaltenen Gleichungen und erhalten:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Entsprechend multiplizieren wir zur Elimination von x_1 die erste Gleichung mit $-a_{21}$, die zweite mit a_{11} und erhalten dann bei Addition

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Falls wir $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ voraussetzen, bekommen wir

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Erklärung 9.1. Die **Termdarstellung** $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} =: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ heißt *Determinante zweiten Grades* (zweireihige Determinante).

Die Elemente a_{11}, a_{22} bilden die **Hauptdiagonale**, a_{21}, a_{12} - die **Nebendiagonale** der Determinante.

Die Doppelindizes sind einzeln zu lesen (eins - eins, eins - zwei usw.) und sind so gewählt, daß der erste Index die Zeilennummer, der zweite die Spaltennummer angibt. Zeilen und Spalten heißen gemeinsam Reihen der Determinante.

Damit lassen sich die Variablen x_1 und x_2 des linearen Gleichungssystems für $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ als Quotient zweier Determinanten zweiten Grades darstellen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{9.2}$$

Die im Nenner stehende Determinante heißt *Koeffizientendeterminante* des linearen Gleichungssystems.

Nun untersuche man inwieweit drei Unbekannte x_1, x_2, x_3 durch die Forderung bestimmt sind, daß sie drei Gleichungen ersten Grades

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right. \tag{9.3}$$

genügen, in denen $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}, b_1, b_2, b_3$ bekannte Zahlen sind und $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.

Durch Multiplikation der drei Gleichungen mit geeigneten Faktoren und nachfolgende Addition, gewinnt man je eine Gleichung, die nur noch eine einzige Unbekannte enthält:

$$\left\{ a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} x_1$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$\left\{ -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} x_2$$

$$= -b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$\left\{ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right\} x_3$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Erklärung 9.2. Die **Termdarstellung**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array}$$

heißt *Determinante dritten Grades*.

Die Determinante dritten Grades ist eine algebraische Summe von $3! = 6$ Produkten von je 3 Faktoren, die jedesmal in lauter verschiedenen Zeilen und Spalten liegen. Die Gesamtheit aller dieser Produkte kann man sehr einfach dadurch bilden, daß man im Produkt $a_{11}a_{22}a_{33}$ derjenigen Elemente, welche in der Hauptdiagonale liegen, die zweiten Indizes auf allen möglichen Weisen permutiert. Es haben diejenigen Produkte das Vorzeichen "+", in welchen die Permutation der zweiten Indizes gerade ist, die andern haben das Vorzeichen " − ".

Man kann leicht nachweisen, daß:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Variablen x_1, x_2, x_3 des linearen Gleichungssystems (9.3) für $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ als Quotient zweier Determinanten dritten Grades darstellen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{9.4}$$

Die im Nenner stehende Determinante heißt *Koeffizientendeterminante* des linearen Gleichungssystems.

Man erhält die höherreihige Determinante n-ter Ordnung $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

indem man in dem Produkt $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente die zweiten Indizes auf alle möglichen Weisen permutiert und jedem der so entstehenden Produkte das Vorzeichen "+" oder "−" gibt, je nachdem die in ihm vorkommende Permutation der zweiten Indizes gerade oder ungerade ist.

Streicht man in einer Determinante n-ter Ordnung die Elemente der i-ten Zeile und der k-ten Spalte, so bildet das verbleibende quadratische Zahlenschema die *Unterdeterminante* U_{ik} $(n-1)$-ter Ordnung; weiter heißt $A_{ik} := (-1)^{i+k}U_{ik}$ die zum Element a_{ik} gehörende *Adjunkte.*

Satz 9.3. *Wenn man die Elemente irgendeiner Reihe (Zeile oder Spalte) mit ihren eigenen Adjunkten multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man die Determinante selbst:*

(i) $\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},\ 1 \le i \le n$ (**Entwicklung von Δ_n nach der i-ten Zeile**);

(ii) $\Delta_n = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{sk}A_{sk},\ 1 \le k \le n$ (**Entwicklung von Δ_n nach der k-ten Spalte**).

Für das Rechnen mit Determinanten gelten eine Reihe von Sätzen, die wir für zweireihige (bzw. dreireihige) Determinanten beweisen. Sie bleiben sämtlich sinngemäß auch für höherreihige Determinanten bestehen.

Satz 9.4. Stürzen einer Determinante. *Der Wert einer Determinante bleibt erhalten, wenn man die Elemente an der Hauptdiagonale spiegelt.*

Man beachte, daß bei dieser Spiegelung jede Zeile in die **nummerngleiche** Spalte (und umgekehrt) übergeht:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Satz 9.5. Faktorregel. *Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man die Elemente (irgend)einer Zeile oder Spalte mit ihm multipliziert. Umgekehrt kann ein Faktor, der allen Elementen einer Zeile oder Spalte gemeinsam ist, vor die Determinante gezogen werden.*

Beweis. $k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = (ka_{11})a_{22} - a_{21}(ka_{12}) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$ □

Satz 9.6. Linearkombinations-Regel. *Der Wert einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu einer Zeile (Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert.*

Beweis. $\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{21})a_{22} - a_{21}(a_{12} + ka_{22}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$ □

Zusatz 9.7. *Sind alle Elemente einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (Spalte), so ist der Wert der Determinante gleich Null.*

Beweis. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = a_{11}(ka_{12}) - (ka_{11})a_{12} = 0.$ □

Satz 9.8. Vertauschungssatz. *Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (Spalten) miteinander, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.*

Beweis. Vor dem Vertauschen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Nach dem Vertauschen:

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} \\ &-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 9.9. Zerlegungssatz. *Besteht eine Zeile (Spalte) aus einer Summe von Elementen, so kann man die Determinante wie folgt in zwei Determinanten zerlegen:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+p_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+p_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+p_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} & a_{13} \\ p_2 & a_{22} & a_{23} \\ p_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 9.10. (1) Beweisen Sie, daß:

$$\cos(x+y) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin y \\ \sin x & \cos y \end{vmatrix}.$$

(2) Beweisen Sie, daß:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{aligned} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)...(x_n-x_1). \\ (x_3-x_2)(x_4-x_2)...(x_n-x_2). \\ (x_4-x_3)...(x_n-x_3). \\ \dots\dots \\ (x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Wenden Sie für den Beweis die Methode der vollständigen mathematischen Induktion an:

(i) Es sei $n=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$

(ii) Es sei $n=3 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & (x_2-x_1)x_2 \\ 1 & x_3 & (x_3-x_1)x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 \\ 1 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 \\ x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

(3) Beweisen Sie, daß:

a) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1-x_2) & \frac{1}{2}(y_1-y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1);$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0;$$

c) $$\begin{vmatrix} (\sin\alpha)^2 & 1 & (\cos\alpha)^2 \\ (\sin\beta)^2 & 1 & (\cos\beta)^2 \\ (\sin\gamma)^2 & 1 & (\cos\gamma)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

9.2. **Lineare Gleichungssysteme (LGS). Lösungsmengen.**

- Liegt zur Bestimmung einer Unbekannten x eine Gleichung ersten Grades

$$ax = b \tag{9.5}$$

vor, in der a und b bekannte Zahlen sind ((1×1)-LGS), so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Der Fall $a \neq 0$. Die Gleichung hat genau eine Lösung $x = \dfrac{b}{a}$.

II. Der Fall $a = 0$. Die linke Seite der Gleichung ist stets $= 0$, welchen Wert wir auch für x einsetzen. Es sind weiter zwei Fälle zu untersuchen:
II. 1) $b \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Die Gleichung enthält eine unmögliche Forderung und besitzt *keine* Lösung.
II. 2) $b = 0 \;\Rightarrow\;$ Die Gleichung wird durch jeden beliebigen Wert von x erfüllt. Sie besitzt *eine einfache Schar* von Lösungen.

- Wenn zur Bestimmung von zwei Unbekannten x_1, x_2 eine Gleichung ersten Grades gegeben ist

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \tag{9.6}$$

wobei sowohl a_1, a_2, als auch b bekannte Zahlen bedeuten ((1×2)-LGS), so sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Der Fall $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, z.B. $a_1 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Die Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn man x_2 ganz beliebig wählt und $x_1 = \dfrac{1}{a_1}(b - a_2x_2)$ setzt. Man sagt, es gäbe in diesem Falle eine *einfache Schar* von Lösungen, oder *einfach-unendlich viele* Lösungen, da man die eine der Unbekannten (im Fall $a_1 \neq 0$ ist dies x_2) ganz beliebig wählen kann und sich dann für die andere genau ein Wert ergibt.

II. Der Fall $(a_1, a_2) = (0, 0) \;\Rightarrow\;$ Die linke Seite der Gleichung ist stets gleich 0, welchen Wert wir auch für x_1 und x_2 einsetzen. Es sind weiter zwei Fälle zu unterscheiden:
II. 1) $b \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Die Gleichung enthält eine unmögliche Forderung und besitzt *keine* Lösung.
II. 2) $b = 0 \;\Rightarrow\;$ Die Gleichung ist stets erfüllt, wenn man für x_1 und x_2 ganz beliebige Werte einsetzt. Man sagt, daß die Gleichung eine *zweifache Schar* von Lösungen, oder *zweifach-unendlich viele* Lösungen, besitzt.

- Wenn zur Bestimmung von zwei Unbekannten x_1, x_2 die Gleichungen (9.1) ersten Grades

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right.$$

gegeben sind, wobei $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ bekannte Zahlen bedeuten ((2×2)-LGS), so haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{9.7}$$

zu lösen. Es seien $\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

I. Der Fall $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow\;$ Das System hat genau eine Lösung (vgl. (9.2))

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

II. Der Fall $\Delta = 0$, aber wenigstens ein ihrer Elemente ist $\neq 0$. Wir unterscheiden die Fälle:

II. 1) $(\Delta_1, \Delta_2) \neq (0,0) \;\Rightarrow\;$ Das Gleichungssystem (9.7) hat keine Lösung.
Z.B. $\quad 2x_1 + 3x_2 = 10;\ 4x_1 + 6x_2 = 3.$

II. 2) $(\Delta_1, \Delta_2) = (0,0)$. Die Gleichungen (9.7) sind für beliebige Werte von x_1, x_2 erfüllt. Nicht so die Gleichungen (9.1).
Es sei etwa $a_{11} \neq 0 \;\Rightarrow$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \;\Rightarrow\; a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{12};$$
$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0 \;\Rightarrow\; b_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}\,b_1; \quad \Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \equiv 0.$$

Da $a_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{11}$ ist, erkennt man sofort, daß die zweite der Gleichungen (9.1) aus der ersten durch Multiplikation mit dem Faktor $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ folgt. Die zweite Gleichung erweist sich als *linear abhängig* von der ersten. Nur diese erste Gleichung braucht daher erfüllt zu werden, die zweite ist es dann ganz von selbst. Dies ist ein bekannter Fall (Gleichung (9.6)).

III. Der Fall $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0;\ \Delta = 0.$ Wenn dann

III. 1) $(b_1, b_2) \neq (0,0)$ ist, enthalten die Gleichungen (9.1) eine unmögliche Forderung. Das Gleichungssystem (9.1) hat *keine* Lösung.

III. 2) $b_1 = b_2 = 0$ ist, so sind die Gleichungen (9.1) stets erfüllt. Das Gleichungssystem (9.1) hat *zweifach-unendlich* viele Lösungen.

- Wenn zur Bestimmung von drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 eine Gleichung ersten Grades vorliegt ((1×3)-LGS), so kann diese stets in der Form

(9.8) $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

gegeben werden, in der a_1, a_2, a_3, b bekannte Zahlen sind.
Ist z.B. $a_1 \neq 0$, so hat die Gleichung (9.8) *zweifach-unendlich* viele Lösungen $x_1 = -\dfrac{a_2}{a_1}\,x_2 - \dfrac{a_3}{a_1}\,x_3 + \dfrac{b}{a_1}$, da die Variablen x_2, x_3 beliebig gewählt werden können.
Sind $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und $b \neq 0$, so hat die Gleichung (9.8) *keine* Lösung.
Sind $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$, so hat die Gleichung (9.8) eine *dreifache Schar* von Lösungen.

Erklärung 9.11. Wenn es aus irgendeinem Grunde zwäckmäßig ist, gewisse Zahlen c_{ij} in rechteckiger Anordnung, etwa in m Zeilen, d.h. $1 \leq i \leq m$, und n Spalten, d.h. $1 \leq j \leq n$, aufzuschreiben, so daß ein System von der Form

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

entsteht, so bezeichnet man dieses Zahlenschema als die $(m \times n)$-*Matrix* (gelesen: m-mal-n Matrix) C (geschrieben: $C \in (m \times n)$), die Zahlen c_{ij} selbst - als die Elemente der Matrix. Die beiden Indizes kennzeichnen die Position des Elementes c_{ij}. Der Zeilenindex i wird stets **vor** dem Spaltenindex j angegeben.

- Wir untersuchen inwieweit drei Unbekannte x_1, x_2, x_3 durch die Forderung bestimmt sind, daß sie zwei Gleichungen ersten Grades ((2 × 3)-LGS) genügen sollen

(9.9)
$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \end{array} \right.$$

Es sei nun $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix unseres Gleichungssystems. Von entscheidender Bedeutung für die Lösung des Systems sind die Determinanten

$$\delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_1 := \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 := \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

I. Der Fall $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \neq (0, 0, 0)$. Es sei etwa $\delta_3 \neq 0$, Wir schreiben die Gleichungen (9.9) in der Form

(9.10)
$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3. \end{array} \right.$$

Man darf x_3 ganz beliebig wählen und die beiden Unbekannten x_1, x_2 werden eindeutig bestimmt (vgl. mit (9.1)).

Ergebnis. Ist wenigstens eine der drei Determinanten $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ von Null verschieden, so hat das Gleichungssystem eine *einfache* Schar von Lösungen.

II. Der Fall $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (0, 0, 0)$, aber wenigstens einer der 6 Koeffizienten , etwa a_{11}, ist von Null verschieden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & & a_{21} &\equiv \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11}, \\ \delta_2 = a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} = 0 &\Rightarrow & a_{23} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}, \\ \delta_3 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 &\Rightarrow & a_{22} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}, \\ &\Rightarrow & \delta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen (9.9) sind proportional mit dem Proportionalitätsfaktor $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$.

Ist $b_2 \neq \dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1$, so hat das Gleichungssystem *keine* Lösung.

Ist $b_2 = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\, b_1$, so sind die beiden Gleichungen (9.9) linear abhängig. Dies ist ein bekannter Fall (Gleichung (9.8)).

III. Der Fall $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ und alle Koeffizienten der Koeffizientenmatrix sind sämtlich gleich Null.
Ist $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, so hat das System *keine* Lösung.
Ist $(b_1, b_2) = (0,0)$, so hat das System *eine dreifache* Schar von Lösungen.

- Liegen zur Bestimmung von drei Unbekannten die drei Gleichungen (9.3) ersten Grades ((3 × 3)-LGS) vor

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{array} \right.$$

so sind vier Fälle zu unterscheiden. Es seien

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

I. Der Fall $\Delta \neq 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ (vgl. (9.4)).

II. Der Fall $\Delta = 0$, aber wenigstens eine der Adjunkten $A_{ik},\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq k \leq 3$, etwa $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ist von Null verschieden.

II. 1) $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \neq (0,0,0) \;\Rightarrow$ Das Gleichungssystem (9.3) hat *keine* Lösung.

II. 2) $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = (0,0,0)$. Die Gleichungen $\Delta x_1 = \Delta_1,\ \Delta x_2 = \Delta_2,\ \Delta x_3 = \Delta_3$ sind für beliebige Werte von x_1, x_2, x_3 erfüllt. Nicht so die Gleichungen (9.3).

Da $A_{33} \neq 0$ angenommen wurde, lassen sich die ersten beiden Gleichungen (9.3) in der Form

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3 \end{array} \right.$$

schreiben. Die dritte Gleichung ist von den ersten beiden linear abhängig! Dies zeigt, daß man x_3 ganz beliebig wählen kann und dann x_1 und x_2 nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß die Gleichungen (9.3) befriedigt werden.

Das System (9.3) hat eine *einfache* Schar von Lösungen.

III. Der Fall $\Delta = 0,\ A_{ik} = 0,\ i,k = 1,2,3$, aber wenigstens eins der Elemente a_{ik} der Determinante Δ, etwa a_{11}, ist von Null verschieden.

Durch Multiplikation mit $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ liefert die erste Gleichung in (9.3)

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}\, b_1,$$

und durch Multiplikation mit $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}\, b_1,$$

da, wegen $A_{ik} = 0$, $\quad a_{22} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$ und $a_{23} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}$, $\ a_{32} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{12}$, $\ a_{33} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}$ ist.

III. 1) $(b_2, b_3) \neq (\dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1, \dfrac{a_{31}}{a_{11}} b_1)$ $\Rightarrow$ Das System (9.3) hat *keine* Lösung.

III. 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ Die zweite und die dritte Gleichung sind von der ersten linear abhängig. Man hat dann nur die Gleichung

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3$$

zu lösen.

Das System (9.3) hat *zweifach-unendlich* viele Lösungen.

IV. Der Fall $a_{ik} = 0, \ i, k = 1, 2, 3$.

IV. 1) $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ Das System (9.3) hat *keine* Lösung.

IV. 2) $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$ $\Rightarrow$ Das System (9.3) hat *dreifach-unendlich* viele Lösungen.

9.2.1. *Auflösung eines Systems von m Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten.* Es sei das $(m \times n)$-LGS

$$\text{(9.11)} \qquad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

gegeben.

Die *Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

des Systems hat, im Gegensatz zu einer Determinante, **keinen Zahlenwert**; sie ist als eine in bestimmter Weise geordnete Zusammenstellung jener m-mal-n Zahlen anzusehen.

Ist $m = n$, so spricht man von einer *quadratischen Matrix*, sonst von einer *rechteckigen Matrix*.

Streicht man aus einer Martix so viele Zeilen und Spalten, daß eine quadratische Matrix, etwa von k Zeilen und Spalten, übrig bleibt, so bezeichnet man die Determinante, deren Elemente diese Matrix bilden, als eine *Unterdeterminante k-ten Grades* der gegebenen Matrix.

Der Grad k kann natürlich nicht größer als m und auch nicht größer als n sein.

Wenn nun **alle** Unterdeterminanten k-ten Grades einer Matrix gleich Null sind, so ist klar, daß auch alle ihre Unterdeterminanten höheren Grades (wofern solche vorhanden sind) gleich 0 sein müssen: Denn entwickelt man etwa eine Unterdeterminante $(k+1)$-ten Grades nach den Elementen einer ihrer Reihen, so ergibt sich, da die Adjunkten dieser Elemente als Unterdeterminanten k-ten Grades gleich 0 sind, auch für sie der Wert 0.

Erklärung 9.12. Als *Rang* einer Matrix bezeichnet man den **höchsten Grad**, den eine von Null verschiedene unter ihren Unterdeterminanten haben kann.

Die Aufgabe, eine Matrix A habe den Rang r $(\in \mathbb{N})$, bedeutet hiernach also, daß A eine Unterdeterminante r-ten Grades besitzt, die von 0 verschieden ist, daß aber **alle** Unterdeterminanten $(r+1)$-ten und also auch höheren Grades, falls solche vorhanden sind, gleich 0 sind.

Sind alle Elemente der Matrix einzeln 0, so sagt man, daß auch ihr Rang gleich 0 sei, da schon alle ihre Unterdeterminanten ersten Grades gleich 0 sind.

Satz 9.13. *Das Gleichungssystem* (9.11) *besitzt dann und nur dann eine Lösung, wenn der Rang der beiden Matrizen* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *und*

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ *derselbe ist. ($\overline{A}$ heißt erweiterte Matrix des Gleichungssystems.)*

Ist r der gemeinsame Rang beider Matrizen, so hat, wenn $r = n$ ist, das System genau eine Lösung, wenn aber $r < n$ ist, $(n-r)$-fach-unendlich viele Lösungen, indem $n-r$ unter den Unbekannten ganz willkürlich gewählt werden können, die anderen r dann aber völlig eindeutig bestimmt sind.

Bemerkung 9.14. Da jede Unterdeterminante von A auch eine Unterdeterminante von $\overline{A}$ ist, so hat $\overline{A}$ mindestens denselben Rang wie A.

Im Fall $m = n$ und

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Delta_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots \qquad \Delta_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

ist der Rang der Matrix A gleich n und das System hat **nur** die Lösung

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Dies ist die sogenannte *Cramersche Regel* zur Lösung solcher Gleichungssysteme.

9.3. **Der Gauß-Algorithmus zur Lösung von LGS.** Das Verfahren zur Umformung eines linearen Gleichungssystems in **dreieckige Form** geht zurück auf *Carl Friedrich Gauß* (1777-1855) und wird daher als der *Gauß-Algorithmus* bezeichnet. Die Idee des Verfahrens lautet grob:

Man addiert geschickt gewählte Vielfache einzelner Gleichungen zu anderen und erzeugt so schrittweise die "dreieckige Form", die die leichte Berechnung der Variablen erlaubt.

Addition und Multiplikation der Zeilen des LGS werden meistens so durchgeführt, daß zunächst die erste Variable (x_1) aus der zweiten und allen weiteren Gleichungen eliminiert wird.

Entsprechend arbeitet man mit der zweiten und den folgenden Gleichungen weiter und erhält Zeilen im LGS, die schon zwei Variablen nicht enthalten, dann Zeilen, die drei Variablen nicht enthalten, usw. bis die "dreieckige Form" erreicht ist.

Beispiel 9.15. Zu lösen ist das LGS:

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 & I \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 3 & II \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & III \\ 10x_1 + 25x_2 + 35x_3 + 5x_4 = 15 & IV \end{array}\right.$$

Lösung. Die folgenden Umformungen zeigen die Rechenschritte für das Beispiel. Die Gleichungen werden dabei mit römischen Zahlen numeriert, um sie leichter benennen zu können.

Die vierte Gleichung wird durch 5 dividiert.

Die Variable x_1 soll **nur** in der ersten Gleichung stehen. Zur zweiten, dritten und vierten Gleichung werden daher passende Vielfache der ersten Gleichung addiert. Die erste Gleichung selbst bleibt unverändert.

Rechts von den Gleichungen sind die geplanten Umformungen aufzuschreiben:

$$\left|\begin{array}{llllll} x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 4 & I \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +x_4 & = 3 & II + (-2)I \\ 4x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 2 & III + (-4)I \\ 2x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +x_4 & = 3 & IV + (-2)I \end{array}\right.$$

Die Rechnungen sind auszuführen. Es ergibt sich die erste umgeformte Version des LGS mit nur noch drei Variablen in den letzten drei Gleichungen:

$$\left|\begin{array}{llllll} x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 4 & I \\ & -9x_2 & +2x_3 & -x_4 & = -5 & II \\ & -23x_2 & -9x_3 & -3x_4 & = -14 & III + IV \\ & -9x_2 & +x_3 & -x_4 & = -5 & IV + (-1)II \end{array}\right.$$

Die veränderten Gleichungen numerieren wir wieder mit I, II, III, und IV, um die Planung für die nächsten Rechnungen ohne neue Bezeichnungen notieren zu können. Die zweite, dritte und vierte Gleichung enthalten jetzt nur noch drei Variablen. Die drei Gleichungen werden analog behandelt wie das Ausgangssystem mit dem Ziel, in den letzten beiden Gleichungen nur noch zwei Variable zu haben.

Nach der Rechnung ergibt sich das System:

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +7x_2 & +3x_3+x_4 & =4 & I \\ & -9x_2 & +2x_3-x_4 & =-5 & II \\ & -32x_2 & -8x_3-4x_4 & =-19 & (9)III+(-32)II+(-136)IV \\ & & -x_3 & =0 & IV \end{array}\right.$$

Das Ziel der Rechnung ist damit fast erreicht:

$$\left|\begin{array}{llllll} x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =4 & I \\ & -9x_2 & +2x_3 & -x_4 & =-5 & II \\ & & & -4x_4 & =-11 & III \\ & & -x_3 & & =0 & IV \end{array}\right.$$

Nun verändern wir die Reihenfolge der Gleichungen, schreiben die vierte als dritte und die dritte als vierte auf und erhalten ein "dreieckiges" LGS:

$$\left|\begin{array}{llllll} x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =4 & I \\ & -9x_2 & +2x_3 & -x_4 & =-5 & II \\ & & -x_3 & & =0 & III \\ & & & -4x_4 & =-11 & IV \end{array}\right.$$

Die Lösung für x_1, x_2, x_3 und x_4 kann jetzt schrittweise berechnet werden:

$$x_4 = \frac{11}{4},\ x_3 = 0,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Die Bezeichnungen der Variablen sind ohne Bedeutung bei der Lösung von LGS. Ob es x_1, x_2, x_3, x_4 oder a, b, c, d oder r, s, t, u sind, hat auf den Rechengang keinen Einfluß. Die Umformungen werden nur mit den Koeffizienten bei den Variablen und den Koeffizienten rechts vom Gleichheitszeichen durchgeführt.

Man kann also mit der erweiterten Koeffizientenmatrix des LGS atbeiten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -23 & -9 & -3 & -14 \\ 0 & -9 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -32 & -8 & -4 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -11 \end{array}\right).$$

Aus dem letzten ("dreieckigen") Schema kann die Lösung berechnet werden, da $r_A = r_{\overline{A}} = 4$ ist.

Beim Gauß-Algorithmus ist es zweckmäßig, nur mit der erweiterten Koeffizientenmatrix und nicht mit den einzelnen Gleichungen und den Variablen zu arbeiten.

Bei den Umformungen des Gauß-Algorithmus wurde an keiner Stelle vorausgesetzt, daß die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt.

Die Frage, warum die Lösung des nach dem Gauß-Algoruthmus umgeformten LGS mit der des Ausgangssystems übereinstimmt, ist noch zu klären.

Aufgabe 9.16. Lösen Sie die Gleichungssysteme:

a) $\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3+3x_4=3, \\ 2x_1-5x_2+4x_3-x_4=1, \\ 4x_1-x_2+2x_3+5x_4=4. \end{array}\right.$

Antwort: $r_A=2,\ r_{\overline{A}}=3\ \Rightarrow$ keine Lösung

b) $\left|\begin{array}{l} 3x_1-2x_2-2x_3=2, \\ x_1+3x_2+4x_3=11, \\ 2x_1-4x_2-x_3=5, \\ 6x_1-7x_2-6x_3=1. \end{array}\right.$

Antwort: $r_A=r_{\overline{A}}=3;\ x_3=3,\ x_2=-1,\ x_1=2$

c) $\left|\begin{array}{l} 2x_1+x_2-4x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+x_3=7, \\ x_1+x_2+5x_3=2. \end{array}\right.$

Antwort: $r_A=r_{\overline{A}}=2<3;\ x_3=\lambda,\ x_2=-1-14\lambda,\ x_1=3+9\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Erklärung 9.17. $(m\times n)$-LGS, deren rechten Seiten nur aus Nullen bestehen, werden als *homogene lineare Gleichungssysteme* bezeichnet.

Satz 9.18. *Jedes homogene LGS ist lösbar. Es existiert mindestens die* **triviale** *Lösung, d.h. die Lösung $x_1=x_2=...=x_n=0$. Es gibt homogene LGS, die nur diese Lösung haben.*

Nun untersuchen wir das *homogene* $(n\times n)$-LGS

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=0. \end{array}\right.$$

Es ist wichtig zu wissen, daß folgendes gilt:

(i) Es ist stets $r_A=r_{\overline{A}}$. Das System hat **immer eine triviale** Lösung $x_1=x_2=...=x_n=0$.

(ii) Ist $\Delta\neq 0$, so hat das System außer der trivialen Lösung **keine andere** Lösung. Dann ist auch $r=n$.

Ist dagegen $\Delta=0$, so hat das System unendlich ($(n-r)$-fach) viele verschiedene Lösungen $(x_1,x_2,...,x_n)\neq(0,0,...,0)$.

(iii) Wenn das System wenn auch nur eine nicht triviale Lösung besitzt, so ist $\Delta=0$.

Aufgabe 9.19. Lösen Sie das LGS:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0. \end{array}\right.$$

Aufgabe 9.20. Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{l} x_1-x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+5x_3-3x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+14x_3-13x_4=0. \end{array}\right.$$

Antwort: $r = 3;\ x_1 = \frac{16}{9}\varrho,\ x_2 = 5\varrho,\ x_3 = -\frac{10}{9}\varrho,\ x_4 = \varrho;\ \varrho \in \mathbb{R}$

Begründung des Gauß-Algorithmus.

Im Gauß-Algorithmus wurde stets davon ausgegangen, daß durch die Umformungen zwar die Gestalt des LGS, nicht aber seine Lösungsmenge verändert wird, daß es sich also um **Äquivalenzumformungen** handelt.

Wir haben drei Arten von Umformungen durchgeführt:

(1) Änderung der Reihenfolge von Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.
(3) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

Es kommt darauf an, für jeden dieser Rechenschritte zu prüfen, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt.

Die Änderung der Reihenfolge der Zeilen ist natürlich ohne Bedeutung für die Lösung eines LGS, da ohnehin alle Gleichungen erfüllt werden müssen. Diese Umformung ist also ohne Einfluß auf die Lösungsmenge.

Die Multiplikation einer der drei Gleichungen mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ ändert nichts daran, daß die x_i eine Lösung bilden. Jede Lösung des Ausgangssystems ist auch eine Lösung des veränderten LGS und umgekehrt sind alle Lösungen des neuen LGS auch Lösungen der Ausgangsaufgabe, denn die Umformung kann durch eine weitere Multiplikation wieder rückgängig gemacht werden.

Als letztes bleibt die dritte Art Umformung zu prüfen. Diese kann zerlegt werden in die Multiplikation und die Addition. Die Multiplikation ist geklärt. Es ist also nur noch die Addition zweier Gleichungen zu untersuchen. Da die Lösung des LGS je eine Lösung der beiden Gleichungen ist, so ist sie auch Lösung ihrer Summe.

Damit ist gezeigt:

Satz 9.21. *Die Rechenoperationen des Gauß-Algorithmus ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht. Es sind Äquivalenzumformungen.*

9.4. **Matrixverknüpfungen.**

Erklärung 9.22. *Gleichheit von Matrizen.* Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ vom Typ $(m \times n)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, und $B = (b_{ks})$ vom Typ $(p \times q)$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq s \leq q$, heißen *gleich*, wenn sie vom gleichen Typ sind, d.h. $m = p$ und $n = q$, und in allen positionsgleichen Elementen übereinstimmen, d.h. $a_{ik} = b_{ik}, 1 \leq i \leq m;\ 1 \leq k \leq n$.

Erklärung 9.23. *Addition von Matrizen.* Zwei typengleiche Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, werden addiert, indem man die positionsgleichen Elemente addiert, d.h. $(c_{ik}) =: C = A+B$ ist vom selben Typ $(m \times n)$ und $c_{ik} := a_{ik} + b_{ik}$.

Satz 9.24. *Die Matrizenaddition ist kommutativ und assoziativ:*

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad A, B, C \in (m \times n).$$

Die Addition von Matrizen wird auf die Addition ihrer Elemente (Zahlen), zurückgeführt.

Erklärung 9.25. *Multiplikation mit einem Skalar.* Eine Matrix $A = (a_{ik}) \in (m \times n)$ wird mit einem Faktor (Skalar) $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\lambda \in \mathbb{C}$) multipliziert, indem man jedes Element der Matrix mit der Zahl λ multipliziert:

$$\lambda A = (\lambda\, a_{ik}) \in (m \times n).$$

Bemerkung 9.26. Bei den Determinanten werden **die Elemente nur einer** Reihe (bzw. Spalte), bei den Matrizen hingegen wird **jedes Element** der Matrix mit λ multipliziert!

Satz 9.27. *Für die äußere Verknüpfung "Skalar mal Matrix" gelten folgende Regeln:*

(i) $A = A, \quad A \in (m \times n);$

(ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ A \in (m \times n);$

(iii) $\nu(A + B) = \nu A + \nu B, \quad \nu \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ A, B \in (m \times n);$

(iv) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ A \in (m \times n).$

Erklärung 9.28. *Matrizenmultiplikation*. Als Produkt AB zweier Matrizen $A \in (m \times n)$ und $B \in (n \times p)$ erklären wir die Matrix

$$C = (c_{ik}), \quad c_{ik} := \sum_{\sigma=1}^{n} a_{i\sigma} b_{\sigma k},$$

d.h. die Elemente c_{ik} der Produktmatrix C sind jeweils eine Summe der skalaren Produkte der Elemente der i-ten Zeile von A mit den Elementen der k-ten Spalte von B, wobei $i \in (1, 2, ..., m)$, $k \in (1, 2, ..., p)$ gilt. Die Produktmatrix wird damit vom Typ $(m \times p)$.

Beachten Sie! Das Produkt BA existiert **nicht**, wenn $m \neq p$ ist.

Beispiel 9.29. $A = (a\ b\ c\ d)$, $D = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \\ c & d \\ d & a \end{pmatrix} \Rightarrow$

$AB = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \in (1 \times 1); \quad AC = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad ab + bc + cd + da) \in (1 \times 2);$

$$DC = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & ab + bc + cd + da \\ ab + bc + cd + da & b^2 + c^2 + d^2 + a^2 \end{pmatrix} \in (2 \times 2);$$

$$DB = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ ab + bc + cd + da \end{pmatrix} \in (2 \times 1); \quad BA = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 & cd \\ da & db & dc & d^2 \end{pmatrix} \in (4 \times 4).$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

läßt sich als Matrizengleichung $AX = B$ schreiben, wenn man $A = (a_{ik})$ für die Koeffizientenmatrix, X für die Spaltenmatrix der Variablen und B für die Spaltenmatrix der Absolutglieder setzt.

Satz 9.30. *Die Matrizenmultiplikation ist associativ, jedoch nicht kommutativ:*

$$A(BC) = (AB)C; \quad AB \neq BA.$$

Satz 9.31. 1. *Die Matrizenmultiplikation ist beiderseitig distributiv über die Matrizenaddition:* $A(B+C) = AB + AC; \quad (A+B)C = AC + BC$.

2. *Die Einheitsmatrix* $E = (\delta_{ik}) \in (n \times n)$, $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$, *ist Neutralelement bezüglich der Multiplikation für alle Matrizen* $A \in (n \times n) : \; EA = AE = A$.

Erklärung 9.32. 1. Ist $A \in (n \times n)$ eine quadratische Matrix und ist $\det A$ ihre Determinante, so heißt
A *regulär* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$,
A *singulär* $\Leftrightarrow \det A = 0$.

2. Ist $A \in (n \times n)$ eine reguläre quadratische Matrix, so heißt die Matrix

$$A^{-1} := \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

die zu A *inverse Matrix* (Kehrmatrix). Dabei sind die A_{ik} die Adjunkten der Elemente a_{ik} der Matrix $A = (a_{ik})$.

Zusatz 9.33. *Für alle* $A \in (n \times n)$ *mit* $\det A \neq 0$ *gilt*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Erklärung 9.34. Vertauscht man in einer Matrix $A \in (m \times n)$ alle Zeilen mit den **nummerngleichen** Spalten, so heißt das entstandene Zahlenschema $A^t \in (n \times m)$ die zu A *transponierte* Matrix:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{11} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Satz 9.35. $(A+B)^t = A^t + B^t, \quad (AB)^t = B^t A^t, \quad (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Erklärung 9.36. Bleibt eine quadratische Matrix $A \in (n \times n)$ beim transponieren unverändert, so heißt sie *symmetrisch*; ändert sie beim Transponieren nur ihr Vorzeichen, so nennt man sie *schiefsymmetrisch*.
$A^t = A \Leftrightarrow a_{ki} = a_{ik} \; \forall \, i,k = 1,2,...n \Leftrightarrow A$ ist symmetrisch,
$A^t = -A \Leftrightarrow a_{ki} = -a_{ik} \; \forall \, i,k = 1,2,...,n \; (\Rightarrow a_{ii} = 0) \Leftrightarrow A$ ist schiefsymmetrisch.

Satz 9.37. *Jede quadratische Matrix* $A \in (n \times n)$ *läßt sich als Summe einer Symmetrischen Matrix* A_1 *und einer schiefsymmetrischen Matrix* A_2 *darstellen.*

Beweis.

$$A_1 := \frac{1}{2}(A + A^t), \quad A_2 := \frac{1}{2}(A - A^t) \quad \Rightarrow \quad A = A_1 + A_2,$$

da $A_1^t = A_1$ und $A_2^t = -A_2$ ist.

□

Beispiel 9.38. Bestimmen Sie den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Anteil der gegebenen Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 9.39. *Sind* $A \in (n \times n)$ *und* $B \in (n \times n)$ *zwei reguläre quadratische Matrizen, so ist*

$$\det(AB) = \det A. \det B.$$

Zusatz 9.40. *Ist* $A \in (n \times n)$ *eine reguläre quadratische Matrix, so gilt*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Erklärung 9.41. Ist das Produkt einer Matrix $A \in (n \times n)$ mit ihrer Transponierten gleich der Einheitsmatrix $E \in (n \times n)$ $(AA^t = E)$, so heißt A *orthogonal.*

Beispiel 9.42. Bestimmen Sie die Kehrmatrix der gegebenen Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A^t.$$

Zusatz 9.43. *Es sei* A *eine orthogonale Matrix. Es gilt:*

1. $(AA^t)^t = AA^t$,
2. $AA^t = E \Rightarrow \det(AA^t) = \det A. \det A^t = (\det A)^2 \wedge \det(AA^t) = \det E = 1$
$$\Rightarrow \quad (\det A)^2 = 1.$$
3. $AA^t = E \Rightarrow A^{-1}(AA^t) = (A^{-1}A)A^t = EA^t = A^t \wedge A^{-1}(AA^t) = A^{-1}E = A^{-1}$
$$\Rightarrow \quad A^t = A^{-1}.$$

Aufgabe 9.44. Lösen Sie die Matrizengleichung $AX = B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 9.45. (1) Rechnen Sie aus:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = ?$

b) $A = (2\ 4\ 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = ? \quad BA = ?$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = ? \quad BA = ?$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = ?$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^3 = ?$

(2) Welchen Rang haben folgende Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Bestimmen Sie je die Kehrmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Lösen Sie die Gleichungen:

a) $X.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$

(5) Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\left|\begin{array}{l} 2x - y + z = 3, \\ 3x + y - z = 2, \\ x + 2y + z = -4; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 10, \\ 2x + 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 22; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2, \\ x - y + z = 0, \\ x + 3y - z = -2, \\ 3x + 4y + 3z = 0; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 2y - z + t = 4, \\ 2x + y - z + t = 3, \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12, \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 3x + y + z + t = 0, \\ x + 3y + z + t = 0, \\ x + y + 3z + t = 0, \\ x + y + z + 3t = 0; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 3x + 5y + 2z = 0, \\ 4x + 7y + 5z = 0, \\ x + y - 4z = 0, \\ 2x + 9y + 6z = 0; \end{array}\right.$$

(6) Für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ haben folgende Gleichungssysteme genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung?

Geben sie jeweils die Lösungsmenge an.

$$\left|\begin{array}{l} x+\lambda y+4z=0,\\ 2x+3y+5z=0,\\ (\lambda+1)x+5y+(4\lambda+1)z=0; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \lambda x+y+2z=3,\\ x-y-3z=\lambda,\\ x+y+z=0; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \lambda x+y+z=1,\\ x+\lambda y+z=1,\\ x+y+\lambda z=1; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} (\lambda+1)x+y+z=\lambda^2+3\lambda,\\ x+(\lambda+1)y+z=\lambda^3+3\lambda^2,\\ x+y+(\lambda+1)z=\lambda^4+3\lambda^3; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \lambda x+3y+z=0,\\ (\lambda+1)x-z=0,\\ (\lambda-1)x+2y+4z=0; \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} 2x+3y+\lambda^2 z=0,\\ x-y+\lambda z=0,\\ 4x+y=0. \end{array}\right.$$

Aufgabe 9.46. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} x+2y-8z=1\\ 2x+3y-15z=3\\ -x+ay+a^2z=5 \end{array}\right.$$

(a) Lösen sie das LGS für $a=1$.

(b) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a das LGS eindeutig lösbar ist, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat.

Aufgabe 9.47. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} x-3y+az=4\\ 3x+(a-10)y+3z=-5\\ -4x+16y+az=5a+16 \end{array}\right.$$

(a) Lösen sie das LGS für $a=-1$.

(b) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a das LGS eindeutig lösbar ist, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung hat.

Aufgabe 9.48. Für welche Werte des Parameters $t\in\mathbb{R}$ hat $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ mit

$$A:=\begin{pmatrix} 1 & t & -2\\ 2 & -1 & t-1\\ -1 & t+1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -3 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung?

10. Grundlagen der analytischen Geometrie

Der Grundgedanke der Analytischen Geometrie besteht darin, daß geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Mitteln geführt werden. Geometrische Objekte werden dabei durch Gleichungen beschrieben und mit algebraischen Methoden untersucht.

Der französische Philosoph und Mathematiker *René Descartes* (1596-1650) ist Mitbegründer der Analytischen Geometrie. Durch Einführung eines Koordinatensystems gelang es ihm, Punkte in der Ebene durch Zahlenpaare, Punkte im dreidimensionalen Raum durch Zahlentripel darzustellen. Geometrische Aussagen werden dann durch Übergang zu den Koordinaten in algebraische Aussagen übersetzt. Aus diesen werden durch Rechnungen Resultate gewonnen, die wieder in geometrische Aussagen rückübersetzt werden.

Unser Ziel ist es, geometrische Gebilde im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum, wie z.B. Pfeile, Geraden, Ebenen, algebraisch zu beschreiben.

10.1. **Koordinatenfreie Geometrie - Grundbegriffe.** Eine Hauptaufgabe der Geometrie ist es, die Eigenschaften von Figuren festzustellen. Alle Figuren fassen wir als Mengen von Punkten auf. Alle Strecken sind Teilmengen von Geraden. Alle quadratischen, rechteckigen, dreieckigen Flächen sind Teilmengen von Ebenen. Man sagt daher: *Punkte, Geraden und Ebenen sind Grundelemente der Geometrie*.

Manche Eigenschaften der Figuren sind anschaulich deutlich. Eine Reihe solcher Eigenschaften begründet man nicht weiter, sondern drückt sie in Grundsätzen aus und legt diese dem Aufbau der Geometrie zugrunde.

Erklärung 10.1. Wird auf einer Gerade g ein *Durchlaufsinn* festgelegt, so wird aus g eine *gerichtete Gerade*, der *Speer* g^+.

Erklärung 10.2. Ist $A \in g$, so wird g durch A in zwei *Teilgeraden* g_1 und g_2 zerlegt. Man nennt diese die *Halbgeraden* g_1 und g_2.

Der Punkt A soll selbst zu beiden Halbgeraden gehören.
Gibt man der Halbgerade g_1 einen Durchlaufsinn, so erhält man den *Strahl* $g_1^{\rightarrow}$.

Erklärung 10.3. Sind A und B zwei Punkte, so versteht man unter der *Strecke* (AB) die Punktmenge, die A und B enthält und außerdem alle Punkte der Gerade AB, die zwischen A und B liegen. A und B heißen *Endpunkte*, die übrigen Punkte *innere Punkte* der Strecke (AB).

Zwei Punkte, die übereinstimmen, definieren eine *Nullstrecke*. Sie besitzt keine innere Punkte.

Erklärung 10.4. Ist auf der Strecke (AB) der Durchlaufsinn so gewählt, daß A vor B liegt, so heißt die Strecke (AB) samt Durchlaufsinn der *Pfeil* $\overrightarrow{AB}$. A ist der Anfangspunkt, B der Endpunkt oder die *Spitze* des Pfeiles $\overrightarrow{AB}$.

Man sagt auch: *Ist* (A, B) *ein geordnetes Punktepaar, so bestimmt es den Pfeil* $\overrightarrow{AB}$.

Erklärung 10.5. Ist g eine Gerade der Ebene E, so wird E durch g in zwei Teilmengen E_1 und E_2 zerlegt. Man nennt diese die *Halbebenen* E_1 und E_2.

Die Gerade g soll zu E_1 und zu E_2 gehören.
Die Punkte von g nennt man *Randpunkte* von E_1 und auch von E_2. Alle übrigen Punkte von E_1 bzw. E_2 heißen *innere Punkte* von E_1 bzw. E_2.

Grundsatz 10.6. *Gehören die nicht auf g liegenden Punkte P und Q zu verschiedenen Halbebenen, so liegt auf der Strecke (PQ) genau ein Punkt S von g.*

Gehören die nicht auf g liegenden Punkte T und U zu derselben Halbebene, so liegt kein Punkt der Strecke (TU) auf g.

Um die Länge einer Strecke angeben zu können, wählt man eine beliebige Strecke e ($e = (OE) \neq 0$) als *Einheitsstrecke*, trägt sie dann auf dem Strahl $OE^{\rightarrow}$ wiederholt ab und schreibt die Marken $0, 1, 2, 3, ...$ an. So erhält man einen *Zahlenstrahl* (einen Maßstab). Trägt man nun die gewünschte Strecke (AB) von O aus auf dem Zahlenstrahl ab bis P, so nennt man die zu P gehörige Zahl p des Zahlenstrahls den *Zahlenwert* der Länge von (OP) und also auch von (AB). Es ist stets $p \geq 0$. Zu (OE) gehört der Zahlenwert 1; man nennt daher die Länge von (OE) die *Längeneinheit*. Die Nullstrecke hat dann die Länge 0.

10.1.1. *Gleichsinnig und gegensinnig parallele Speere.* Man **darf** die Durchlaufrichtungen von zwei Geraden **nur** dann vergleichen, wenn die Geraden zueinander **parallel** sind oder übereinstimmen!

Es sei der Speer g^+ zum Speer h^+ parallel und es seien A, B bzw. C, D je zwei verschiedene Punkte auf g^+ bzw. h^+, so daß A vor B und C vor D liegt. Da zwei parallele Geraden genau eine Ebene bestimmen, so liegt die Gerade AC in dieser Ebene und zerlegt sie in zwei Halbebenen. Liegen dann die Strahlen $AB^{\rightarrow}$ und $CD^{\rightarrow}$ in ein und derselben Halbebene, so sind die Speere g^+ und h^+ *gleichgerichtet*, oder auch *gleichsinnig parallel* ($g^+ \uparrow\uparrow h^+$) (Fig. 10.1); liegen $AB^{\rightarrow}$ und $CD^{\rightarrow}$ in zueinander komplementären Halbebenen, so heißen die Speere g^+ und h^+ *entgegengesetzt gerichtet*, oder auch *gegensinnig parallel* ($g^+ \uparrow\downarrow h^+$) (Fig.10.2).

Liegen die Speere g^+ und h^+ auf ein und derselben Gerade und sind A, B bzw. C, D je zwei verschiedene Punkte auf g^+ bzw. h^+, so daß A vor B und C vor D liegt, so wählen wir einen Speer l^+, der zum g^+ (also auch zum h^+) parallel ist, und zwei Punkte K, L auf l^+, so daß K vor L liegt. Nun können wir die Laufrichtungen von g^+ und l^+ bzw. von h^+ und l^+, wie schon oben beschrieben, vergleichen (Fig. 10.3.). Es sind folgende Fälle möglich:

$$g^+ \uparrow\uparrow l^+ \wedge h^+ \uparrow\uparrow l^+ \Rightarrow g^+ \uparrow\uparrow h^+; \quad g^+ \uparrow\downarrow l^+ \wedge h^+ \uparrow\downarrow l^+ \Rightarrow g^+ \uparrow\uparrow h^+;$$

$$g^+ \uparrow\uparrow l^+ \wedge h^+ \uparrow\downarrow l^+ \Rightarrow g^+ \uparrow\downarrow h^+; \quad g^+ \uparrow\downarrow l^+ \wedge h^+ \uparrow\uparrow l^+ \Rightarrow g^+ \uparrow\downarrow h^+.$$

10.1.2. *Die Vektoren.*

Erklärung 10.7. Pfeile, die gleichsinnig parallel und gleichlang sind, bilden eine *Klasse*, die man *Vektor* nennt.

Jeder Pfeil einer Klasse legt schon die Klasse fest, er ist ein *Element* (Repräsentant, Vertreter) des betreffenden Vektors.

Ein Vektor läßt sich im Raum (und auch in der Ebene) durch zwei Bestimmungsstücke festlegen: durch seinen *Betrag* (Länge) - die Länge eines beliebigen seiner Elemente, und durch seine *Laufrichtung* (Richtung samt Durchlaufsinn) - die Laufrichtung eines beliebigen seiner Elemente.

Beachten Sie! Ein Pfeil als Element eines Vektors ist durch die Länge, die Laufrichtung und den Anfangspunkt bestimmt.

Vektoren kann man nicht zeichnen, sondern nur die zugehörigen Pfeile.

Da man den Pfeil in jedem Punkt des Raumes antragen kann, kann man sich immer einen passenden Repräsentanten des Vektors auswählen.

Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, unterscheiden wir in der Schreib- und Sprechweise nicht immer zwischen dem Vektor $\overrightarrow{a}$ und dem diesen Vektor repräsentierenden Pfeil $\overrightarrow{AB}$. Wir sprechen also auch vom Vektor $\overrightarrow{AB}$. Wenn wir sagen, "zeichnen Sie einen Vektor", so meinen wir, "zeichnen Sie einen passenden Repräsentanten des Vektors".

Ein Pfeil bzw. ein Vektor von der Länge Null heißt *Nullpfeil* bzw. *Nullvektor* (Bezeichnung: $\overrightarrow{0}$).

Jede echte Strecke (AB) "trägt" genau zwei Pfeile - $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$, die gleichlang, aber entgegengesetzt orientiert sind. Den Pfeil $\overrightarrow{BA}$ nennt man *Gegenpfeil* des Pfeiles $\overrightarrow{AB}$.

Beachten Sie! Für eine Strecke und eine Gerade gibt es je zwei Möglichkeiten, eine Laufrichtung festzulegen. Ein Pfeil, ein Vektor, ein Strahl, ein Speer hat **nur eine** Laufrichtung.

10.1.3. *Der Begriff des elementar-geometrischen Winkels.* Es seien g und h zwei einander schneidende Geraden in der Ebene E, es sei $S \in g \cap h$ und $g_1 \subset g$, $h_1 \subset h$ seien zwei Halbgeraden, welche von S ausgehen. Es seien E_1 bzw. E_2 die Halbebenen mit Randgeraden g bzw. h, für welche gilt: $h_1 \in E_1 \ \wedge \ g_1 \in E_2$.

Die Halbgeraden g_1 und h_1 bilden **zwei** Winkel φ und ψ (Fig. 10.4). S heißt der *Scheitel* dieser Winkel, g_1 und h_1 nennt man deren *Schenkel*.

Die zum Scheitel S und den Schenkeln g_1 und h_1 gehörigen zwei Winkel unterscheiden sich durch ihre *Winkelfelder*.

Es seien $W_1 = E_1 \cap E_2$ bzw. $W_2 = \overline{E_1 \cap E_2} = E \setminus W_1$ die Winkelfelder der Winkel φ bzw. ψ.

I. Fall: $g \neq h$. Bei W_1 spricht man von einem *stumpfen*, *geraden* oder von einem *spitzen* Winkel φ, bei W_2 spricht man von einem *überstumpfen* Winkel ψ.

II. Fall: $g \equiv h$. In diesem Fall gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Die beiden Schenkel fallen zusammen, d.h. $g_1 \equiv h_1$. Das Winkelfeld W_1 besteht **nur** aus g_1 (h_1). (Fig. 10.5) Man hat einen *Nullwinkel* φ. Das andere Winkelfeld W_2 umfaßt die ganze Ebene E. Der zugehörige Winkel ψ heißt *Vollwinkel.*

b) Die beiden Schenkel geben zusammen eine Gerade, d.h. $h_1 = \overline{g_1}$ (und auch $g_1 = \overline{h_1}$). Dann ist $W_1 = E_1$ und $W_2 = \overline{E_1}$. (Fig. 10.6) Die zugehörigen Winkel φ und ψ heißen *gestreckte Winkel.*

Erklärung 10.8. Unter einem *elementar-geometrischen Winkel* versteht man den Winkel mit dem Scheitel S, mit den Schenkeln g_1 und h_1 und mit dem Winkelfeld W_1.

Ein solcher Winkel ist stets größer als oder gleich dem Nullwinkel und kleiner als oder gleich dem gestreckten Winkel.

Die Punkte des Winkelfeldes W_1 nennt man *Innenpunkte* des elementar-geometrischen Winkels, und alle Punkte der Ebene E, die nicht zu W_1 gehören, d.h. die Punkte des Winkelfeldes $E \setminus W_1 = W_2$, nennt man *Außenpunkte* dieses elementar-geometrischen Winkels.

Bemerkung 10.9. Unter Winkel werden wir in Zukunft einen elementar-geometrischen Winkel verstehen.

Zwei Geraden, die sich schneiden, erzeugen vier Winkel, je zwei benachbarte heißen *Nebenwinkel*, je zwei gegenüberliegende *Scheitelwinkel.*

Ein *rechter Winkel* (Rechter) ist so groß wie sein Nebenwinkel.

Erklärung 10.10. Es sei O ein beliebiger Punkt im Raum, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ und $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ seien zwei Vektoren, $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$ seien ihre Repräsentanten. Unter Winkel zwischen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ verstehen wir den elementar-geometrischen Winkel $\vartheta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ mit Scheitel O und mit Schenkeln die Strahlen $OA^{\rightarrow}$ und $OB^{\rightarrow}$.

Es gilt stets

$$\textit{Nullwinkel} \leqq \vartheta \leqq \textit{gestreckter Winkel.}$$

Der Winkel zwischen einem beliebigen Vektor $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ und dem Nullvektor ist eine **unbestimmte Größe**.

10.1.4. *Orientierte Länge eines Pfeiles bezüglich eines Speeres.*

Erklärung 10.11. Sind A und B irgend zwei Punkte eines Speeres g^+, so bedeutet $\overline{AB}$ immer diejenige positive oder negative Zahl, deren absoluter Betrag die Länge der Strecke

(AB) angibt, und deren Vorzeichen "$+$" oder "$-$" ist, je nachdem die Durchlaufrichtung von A zu B mit der Durchlaufrichtung des Speeres übereinstimmt oder nicht:

$$A \in g^+,\ B \in g^+ \ \Rightarrow\ \overline{AB} = \begin{cases} +|AB| & \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow g^+, \\ -|AB| & \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow g^+. \end{cases}$$

Die reelle Zahl $\overline{AB}$ nennt man *orientierte Länge* (algebraische Länge) des Pfeiles $\overrightarrow{AB}$ bezüglich des Speeres g^+.

Bei dieser Festsetzung gelten folgende Regeln:

(1) Sind A und B irgend zwei Punkte eines Speeres, so gilt stets

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

(2) Sind A, B, C irgend drei Punkte eines Speeres, so ist ausnahmslos

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

oder

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Beweis. Auf dem Speer g^+, z.B. mit der positiven Laufrichtung von B zu A, sind 6 Permutationen der Punkte A, B, C möglich, nämlich:

$$(A, B, C),\ (B, C, A),\ (C, A, B),\ (A, C, B),\ (C, B, A),\ (B, A, C).$$

Man soll zeigen, daß jedesmal $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ gilt.

Wir beweisen die Gültigkeit der Gleichung im ersten Fall:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow g^+ \ \Rightarrow\ \overline{AB} = -|AB|, \quad \overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow g^+ \ \Rightarrow\ \overline{BC} = -|BC|, \\ &\overrightarrow{CA} \uparrow\uparrow g^+ \ \Rightarrow\ \overline{CA} = |CA| = |AC| \ \Rightarrow \\ &\overline{AB} + \overline{BC} = -\{|AB| + |BC|\} = -|AC| = -\overline{CA} = \overline{AC}. \end{aligned}$$

Ändert man die Laufrichtung von g, so gelten die Gleichungen $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ und $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ genauso gut.

(3) Werden zwei gleichsinnig parallele Speere g^+ und h^+ von zwei anderen parallelen Geraden oder von zwei parallelen Ebenen geschnitten, und zwar von der einen in den Punkten A, A' und von der anderen in den Punkten B, B', so ist immer $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Aufgabe 10.12. Sind $P_1, P_2, ..., P_n,\ n \in \mathbb{N},\ n$ Punkte eines Speeres g^+, so ist immer

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_{n-1}P_n} + \overline{P_nP_1} = 0.$$

Beweis. Wir wenden die Methode der vollständigen Induktion an:

n=1: $\overline{P_1P_1} = 0$ *wahr*

n=2: $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_1} = 0$ *wahr*

n=3: $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_1} = 0$ *wahr* (bewiesen)

Nun nehmen wir an, daß für $n = k$ $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_{k-1}P_k} + \overline{P_kP_1} = 0$ gilt.
Es sei P_{k+1} ein Punkt des Speeres g^+. Wir rechnen aus:

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_{k-1}P_k} + \overline{P_kP_{k+1}} + \overline{P_{k+1}P_1} =$$
$$\{\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + ... + \overline{P_{k-1}P_k}\} + \{\overline{P_kP_{k+1}} + \overline{P_{k+1}P_1}\} =$$
$$-\overline{P_kP_1} + \{\overline{P_kP_{k+1}} + \overline{P_{k+1}P_1}\} = -\overline{P_kP_1} + \overline{P_kP_1} = 0.$$

□

Erklärung 10.13. Sind auf einem Speer g^+ in bestimmter Reihenfolge zwei voneinander verschiedene Punkte A, B gegeben und ist C ein dritter, von B verschiedener Punkt des Speeres g^+, so nennt man den Quotienten $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \lambda$ das *Abstandsverhältnis* (Teilverhältnis) des Punktes C in Bezug auf die Grundpunkte A und B.

Man sagt noch "der Punkt C teile die Strecke (AB) im Teilverhältnis λ", wobei

$$\lambda < 0 \Leftrightarrow C \in (AB) \asymp \lambda > 0 \Leftrightarrow C \notin (AB).$$

Je nachdem C innerhalb oder außerhalb der Strecke (AB) liegt, ist C ein **innerer** oder **äußerer Teilpunkt** von (AB).

Dieses Abstandsverhältnis erfährt keine Änderung, wenn die Laufrichtung des Speeres g^+ umgekehrt wird, weil hierbei Zähler und Nenner des Abstandsverhältnisses **gleichzeitig** das Vorzeichen wechseln.

Der *Mittelpunkt* einer Strecke hat in Bezug auf deren Endpunkte als Grundpunkte immer das Abstandsverhältnis $\lambda = -1$.

Satz 10.14. *Sind A und B irgend zwei verschiedene Punkte eines Speeres g^+ und ist $\lambda \neq 1$ eine reelle Zahl, so gibt es genau einen Punkt M auf g^+, so daß $\overline{MA} = \lambda\overline{MB}$ ist.*

Beweis. **Eindeutigkeit**. Es sei $M \in g^+$ und $\overline{MA} = \lambda\overline{MB}$. Wir haben:

$$A, B, M \in g^+ \Rightarrow \overline{MA} + \overline{AB} = \overline{MB},$$

und

$$\overline{MA} = \lambda\overline{MB} \Rightarrow (1-\lambda)\overline{MA} = \lambda\overline{AB} \Rightarrow \overline{MA} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{AB}.$$

Es sei nun

$$N \in g^+ \wedge \overline{NA} = \lambda\overline{NB} \Rightarrow \overline{NA} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{AB} \Rightarrow \overline{NA} = \overline{MA} \Rightarrow N \equiv M.$$

Existenz. Es sei

$$M \in g^+ \wedge \overline{MA} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{AB} \Rightarrow (1-\lambda)\overline{MA} = \lambda\overline{AB} \Rightarrow \overline{MA} = \lambda(\overline{MA} + \overline{AB}) = \lambda\overline{MB}.$$

1) $\lambda < 0 \Rightarrow \dfrac{\lambda}{1-\lambda} < 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow M \in (AB)$;

2) $\lambda > 0$:

a) $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} < 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow M \in AB^{\rightarrow} \wedge M \notin (AB)$;

b) $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} > 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB} \Rightarrow M \in \overline{AB^{\rightarrow}}$;

3) $\lambda = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} = 0 \Leftrightarrow M \equiv A$.

□

Zusatz 10.15. *Ist irgend eine Gerade AB gegeben, so gibt es stets zwei Punkte M und M' auf AB, welche die Strecke (AB) in einem vorgegebenen Abstandsverhältnis $\dfrac{|MA|}{|MB|} = \lambda > 0$ teilen, sofern $\lambda \neq 1$ ist. Davon ist der eine innerer, der andere äußerer Teilpunkt von (AB).*

Man sagt, die beiden Teilpunkte M und M' teilen (AB) *harmonisch*.

Satz 10.16. *Sind irgend zwei Speere g^+ und h^+ gegeben und auf g^+ zwei voneinander verschiedene Grundpunkte A, B und irgend ein dritter von B verschiedener Punkt C nach Belieben angenommen, und sind A', B', C' die senkrechten oder schiefen Projektionen der Punkte A, B, C auf den Speer h^+, so ist, falls die projizierenden Geraden oder Ebenen zu keinem der gegebenen Speere parallel sind, das Abstandsverhältnis der Projektionen immer ebenso groß wie das Abstandsverhältnis der ursprünglich gegebenen Punkte.*

(Fig)

Aufgabe 10.17. Es sei ABC ein Dreieck und CL $(L \in (AB))$ die Winkelhalbierende des Innenwinkels ACB des Dreiecks. Beweisen Sie, daß $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}} = -\dfrac{|CA|}{|CB|}$ gilt.

Aufgabe 10.18. Sind M der Mittelpunkt der Strecke (AB) und P ein beliebiger Punkt der Geraden AB, so gilt stets

$$\overline{PA}\,\overline{PB} = \overline{PM}^2 - \overline{MA}^2.$$

Aufgabe 10.19. Es seien M der Mittelpunkt der Strecke (AB) und C, D zwei Punkte der Geraden AB, so daß $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ gilt. Beweisen Sie, daß $\overline{MB}^2 = \overline{MC}\,\overline{MD}$ gilt.

Aufgabe 10.20. Es seien A, B, C, D vier Punkte eines Speeres g^+. Es gilt ausnahmslos:

$$\overline{DA}\,\overline{BC} + \overline{DB}\,\overline{CA} + \overline{DC}\,\overline{AB} = 0,$$

$$\overline{DA}^2\,\overline{BC} + \overline{DB}^2\,\overline{CA} + \overline{DC}^2\,\overline{AB} + \overline{BC}\,\overline{CA}\,\overline{AB} = 0.$$

10.2. **Die Vektorrechnung.** Man nennt zwei Vektoren *gleich*, wenn sie gleichsinnig parallele und gleichlange Repräsentanten haben. Zwei gleiche Vektoren haben also dieselben Repräsentanten.

Erklärung 10.21. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und ist $\overrightarrow{a}$ ein beliebiger Vektor, so versteht man unter $\lambda\overrightarrow{a}$ den Vektor $\overrightarrow{b}$ mit dem Betrag $|\overrightarrow{b}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$ und der Laufrichtung von

(a) $\overrightarrow{a}$, falls $\lambda > 0$ ist (d.h. $\overrightarrow{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$),

(b) $-\overrightarrow{a}$, falls $\lambda < 0$ ist (d.h. $\overrightarrow{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{a}$).

Erklärung 10.22. Ist $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ ein Vektor, dann heißt $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$ der *Einheitsvektor* in der Richtung von $\overrightarrow{a}$.

Bemerkung 10.23. Die den Betrachtungen zugrundeliegende Längeneinheit ist festgelegt.

Bemerkung 10.24. Sehr viele physikalische Größen, wie Kräfte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Momente, Feldstärken usw. lassen sich durch gerichtete Strecken (Pfeile) veranschaulichen.

Man sagt darum kurz, sie seien *Vektoren*, wenn der Anfangspunkt keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielt, dagegen *Ortsvektoren*, wenn auch auf den Anfangspunkt zu achten ist.

Erklärung 10.25. Es seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Vektoren, O sei ein beliebiger Punkt im Raum, $\overrightarrow{OA}$ sei ein Repräsentant von $\overrightarrow{a}$, und $\overrightarrow{AB}$ ein Repräsentant von $\overrightarrow{b}$. Den Vektor $\overrightarrow{c}$, dessen Repräsentant $\overrightarrow{OB}$ ist, nennt man *Summe* von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ (Bezeichnung: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$).

Diese Verknüpfung von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ nennt man eine *Vektoraddition* oder eine *geometrische Addition.*

Dieser Name findet seine Berechtigung darin, daß diese Addition von Vektoren den Grundgesetzen II (1 bis 4) in §4 gehorcht, also, von dem hier nicht in Betracht kommenden Monotoniegesetz abgesehen, sämtlichen Grundgesetzen der Addition von Zahlen.

Diese Konstruktion ist nicht die einzigste, die den Vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ eindeutig bestimmt.

Es seien $\overrightarrow{OM}$ bzw. $\overrightarrow{ON}$ Repräsentanten von $\overrightarrow{a}$ bzw. $\overrightarrow{b}$. Die Diagonale $\overrightarrow{OP}$ des Parallelograms $OMPN$ ist dann ein Repräsentant desselben Vektors $\overrightarrow{c}$.

10.2.1. *Linearer Raum (Vektorraum).* Es sei $\mathcal{V} = \{a, b, c, ...\}$ eine nicht-leere Menge. Für die Elemente von $\mathcal{V}$ seien die Operationen **Summe** von je zwei Elementen

$$a \in \mathcal{V},\ b \in \mathcal{V} \ \mapsto \ (a+b) \in \mathcal{V}$$

und **Produkt** eines beliebigen Elementes mit einer reellen Zahl

$$a \in \mathcal{V},\ \lambda \in \mathbb{R} \ \mapsto \ (\lambda a) \in \mathcal{V}$$

definiert.

Wenn diese Operationen den folgenden Gesetzen genügen, so wird die Menge $\mathcal{V}$ *linearer Raum* (Vektorraum) genannt

(1) $a + b = b + a \quad \forall\, a, b \in \mathcal{V}$;

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\, a, b, c \in \mathcal{V}$;

(3) $\exists\, \emptyset \in \mathcal{V}:\ a + \emptyset = a \quad \forall\, a \in \mathcal{V}$;

(4) $\forall\, a \in \mathcal{V} \quad \exists\, (-a) \in \mathcal{V}:\ a + (-a) = \emptyset$;

(5) $1.a = a \quad \forall\, a \in \mathcal{V}$;

(6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \quad \forall\, a \in \mathcal{V},\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(7) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \quad \forall\, a \in \mathcal{V},\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(8) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \forall\, a, b \in \mathcal{V},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Diese Gesetze nennt man *Vektorraum-Axiome.*

Die Elemente eines Vektorraums nennt man *Vektoren.*

Bemerkung 10.26. Für einen Vektorraum sind immer zwei Verknüpfungen anzugeben, eine **innere** (die Summe) und eine **äußere** (das Produkt mit einer reellen Zahl).

- Die Menge der geometrischen Vektoren (der Klassen gleichlangen und gleichsinnig parallelen Pfeilen) ist ein linearer Raum.
- Die Menge aller geordneten n-tupel ($n \in \mathbb{N}$)
$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, ..., a_n),\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ..., n\}$$
mit den Operationen
(i) $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$;
(ii) $\lambda(a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n),\ \lambda \in \mathbb{R}$
ist ein linearer Raum (ein Vektorraum).
- Die Menge aller Nullfolgen bildet mit der Addition als innerer Verknüpfung einen Vektorraum. Hier sind die Elemente des Vektorraums, also die Vektoren, Nullfolgen.
- Bildet die Menge aller Pfeile im Raum mit dem Anfangspunkt O einen Vektorraum?

Es gibt Teilmengen von Vektorräumen, die ihrerseits wieder Vektorräume sind. Man nennt sie *Untervektorräume.*

Der folgende Satz stellt ein **notwendiges und hinreichendes Kriterium** zur Überprüfung auf Untervektorraumeigenschaft bereit.

Satz 10.27. *Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ eines Vektorraumes $\mathcal{V}$ ist genau dann Untervektorraum von $\mathcal{V}$, wenn gilt:*
(a) $\mathcal{U} \neq \emptyset$;
(b) $\forall\, x, y \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ x + y \in \mathcal{U}$;
(c) $\forall\, x \in \mathcal{U} \ \wedge\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lambda x \in \mathcal{U}$.

Aufgabe 10.28. Sei $\mathcal{U}$ ein Untervektorraum eines Vektorraums $\mathcal{V}$. Untersuchen Sie, ob $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$ ist.

10.2.2. *Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren.* Ist $\{\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, ..., \ \overrightarrow{a_n}\}$ eine endliche Teilmenge eines Vektorraums $\mathcal{V}$ und sind $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$ beliebige reelle Zahlen, so heißt der Vektor
$$\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$$
Linearkombination von $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ mit Koeffizienten $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Satz 10.29. *Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und M eine endliche, nichtleere Teilmenge von $\mathcal{V}$. Dann ist die Menge $L(M)$ aller Linearkombinationen von M ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$.*

Die Menge $L(M)$ nennt man auch *lineare Hülle von M.*

Elemente des *Beweises*. Es sei
$$M = \{\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\} \ \subseteq \mathcal{V} \ \wedge\ M \neq \emptyset.$$
Man beweise:
(a) $L(M) \neq \emptyset \ \wedge M \subseteq L(M)$.
(b) Seien $\overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n} \in L(M)$ und $\overrightarrow{y} = \mu_1\overrightarrow{a_1} + \mu_2\overrightarrow{a_2} + ... + \mu_n\overrightarrow{a_n} \in L(M)$ ($\lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$), so ergibt sich $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in L(M)$.
(c) Aus $\overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n} \in L(M)$ und $k \in \mathbb{R}$ ergibt sich $k\overrightarrow{x} \in L(M)$.

Aus $(a), (b)$ und (c) folgt, daß $L(M)$ Untervektorraum von $\mathcal{V}$ ist.

Erklärung 10.30. Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum und $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,...,$\overrightarrow{a_n}$ seien Elemente aus $\mathcal{V}$. Wenn die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren gleich $\mathcal{V}$ ist, dann nennt man $\{\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$,...,$\overrightarrow{a_n}\}$ ein *Erzeugendensystem* von $\mathcal{V}$.

Gilt also $L(\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\}) = \mathcal{V}$, so nennt man $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$.

Erklärung 10.31. Man sagt, die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ seien *linear abhängig*, wenn sich ein n-tupel reeller Zahlen $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ so angeben läßt, daß die lineare Kombination $\overrightarrow{u}$ von $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ mit Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dem Nullvektor gleich ist.

Falls dagegen die lineare Kombination $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$ dem Nullvektor **nur dann** gleich ist, wenn die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alle einzeln gleich Null sind, so sagt man, die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ seien *linear unabhängig*.

Ganz ähnlich sagt man, daß ein Vektor $\overrightarrow{a}$ von den Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ *linear abhängig* sei, wenn sich die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ so angeben lassen, daß $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$ gilt.

Dagegen wird $\overrightarrow{a}$ *linear unabhängig* von $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ genannt, wenn eine solche Darstellung von $\overrightarrow{a}$ nicht möglich ist.

Man sagt, zwei Vektoren seien *kollinear*, wenn sie zueinander parallele Repräsentanten haben.

Der Nullvektor ist **zu jedem** Vektor kollinear.

Man sagt, drei Vektoren seien *komplanar*, wenn sie Repräsentanten haben, die in ein und derselben Ebene liegen.

Satz 10.32. *Ein Vektor ist dann und nur dann linear abhängig, wenn er der Nullvektor selbst ist.*

Beweis. $\exists\, \lambda \neq 0 : \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

□

Satz 10.33. *Zwei Vektoren sind dann und nur dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind.*

Beweis.

1) $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind linear abhängig $\;\Rightarrow\;$ $\exists\,(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, z.B. $\mu \neq 0$, so daß

$$\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{a} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \;\Rightarrow$$

$\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind kollinear.

2) $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \;\wedge\; \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{a} = \varepsilon\dfrac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}$, wobei

$$\varepsilon = +1 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b} \;\asymp\; \varepsilon = -1 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$$

$$\Rightarrow\; |\overrightarrow{b}|\,\overrightarrow{a} - \varepsilon|\overrightarrow{a}|\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \;\wedge\; (|\overrightarrow{b}|, -\varepsilon|\overrightarrow{a}|) \neq (0, 0) \;\Rightarrow$$

$\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind linear abhängig.

□

Satz 10.34. *Drei Vektoren sind dann und nur dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind.*

Beweis.

1) $\exists\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ sind komplanar (laut der Summenregel). (Fig. 10.7)

2) $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ sind komplanar $\Rightarrow$ die Repräsentanten $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ von $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}$ liegen in einer Ebene. Es sei U die schiefe Projektion von A auf OC und V die schiefe Projektion von A auf OB. Es seien $\overrightarrow{OV}$ und $\overrightarrow{OU}$ die Repräsentanten von $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{u}$ $\Rightarrow\ \exists\,\lambda \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{b}\ \wedge\ \exists\,\mu \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{u} = \mu\overrightarrow{c}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}\ \Rightarrow$ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sind linear abhängig. (Fig. 10.8)

□

Satz 10.35. *Jede vier Vektoren im Raum sind linear abhängig.*

Beweis. Es seien $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ vier Vektoren im Raum und $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OC_0}, \overrightarrow{OD}$ ihre Repräsentanten. Es sei M die schiefe Projektion von D auf die Ebene (OAB), A bzw. B seien die schiefen Projektionen von M auf OA_0 bzw. OB_0, und C sei die schiefe Projektion von D auf OC_0. Es gilt dann (Fig. 10.9):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ \wedge\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Da $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OA_0}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OB_0}$ kollinear sind, so

$\exists\,\lambda \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OA_0}$ bzw. $\exists\,\mu \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OB_0} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}.$

Da auch $\overrightarrow{OC}$ und $\overrightarrow{OC_0}$ kollinear sind, so

$\exists\,\nu \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{OC} = \nu\overrightarrow{OC_0}$, d.h. $\overrightarrow{OC} = \nu\overrightarrow{c}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{d} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} + \nu\overrightarrow{c}\ \Rightarrow$

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ sind linear abhängig.

□

Wir können nun Erzeugendensysteme auszeichnen, die nicht nur den Aufbau eines Vektorraumes gestatten, sondern auch noch möglichst wenige Vektoren enthalten. Der letzte Satz zeigt, daß z.B. für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ Erzeugendensysteme mit 4 oder 5 Vektoren angegeben werden können, daß aber auch 3 Vektoren dafür ausreichen. Von Interesse sind also **minimale** Erzeugendensysteme. Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen spielt die lineare Unabhängigkeit eine wesentliche Rolle.

Erklärung 10.36. Ein Erzeugendensystem eines Vektorraums, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht, heißt *Basis* des Vektorraums.

Aus den obigen Sätzen folgt:

- Jeder Vektorraum $\mathcal{V}$ mit einem endlichen Erzeugendensystem besitzt eine Basis, sofern $\mathcal{V}$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht.
- Jedes Element eines Vektorraums $\mathcal{V}$ mit endlichem Erzeugendensystem läßt sich bezüglich einer Basis eindeutig darstellen.
- Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum mit der Basis $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$. Dann sind mehr als n Vektoren aus $\mathcal{V}$ stets linear abhängig.
- Alle Basen eines Vektorraums $\mathcal{V}$ mit endlichem Erzeugendensystem haben gleich viele Elemente.

Erklärung 10.37. Die Anzahl der Elemente einer Basis eines Vektorraums $\mathcal{V}$ nennt man die *Dimension* des Vektorraums (Bezeichnung: $\dim\mathcal{V}$).

Bemerkung 10.38. Wir Ordnen dem Vektorraum $\{\overrightarrow{0}\}$, welcher Untervektorraum jedes Vektorraums ist, die Dimension 0 zu.

Aufgabe 10.39. (1) Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum mit $\dim \mathcal{V} = p$ $(p \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie:

1) Jede linear unabhängige Teilmenge von $\mathcal{V}$ mit genau p Elementen ist eine Basis von $\mathcal{V}$.
2) Jede Teilmenge von $\mathcal{V}$ mit mehr als p Elementen ist linear abhängig.

(2) Es seien A und B zwei verschiedene Punkte und O ein beliebiger Punkt im Raum. Der Punkt M liegt auf der Geraden AB dann und nur dann, wenn es zwei reelle Zahlen α, β derart gibt, daß $\alpha + \beta = 1$ und $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ gilt.

Beweis.

a) $M \in AB \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow$

$\overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$.

Wir bezeichnen $\alpha := 1 - k,\ \beta := k$ und erhalten

$\alpha + \beta = 1 \wedge \quad \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

α und β sind **eindeutig bestimmt** und hängen nicht von der Wahl des Punktes O ab.

b) $\alpha+\beta = 1 \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB} \Rightarrow \beta = 1-\alpha \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BA} \Rightarrow M \in AB$.

□

(3) Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte und O sei ein beliebiger Punkt im Raum. Der Punkt M liegt in der Ebene $E\{\ni A, \ni B, \ni C\}$ dann und nur dann, wenn es drei reelle Zahlen α, β, γ derart gibt, daß die Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$$

erfüllt sind.

Beweis.

a) $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC} \wedge M \in E \Rightarrow \exists\, k, l \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1-k-l)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + l\overrightarrow{OC}$.

Wir bezeichnen $\alpha := 1 - k - l,\ \beta := k,\ \gamma := l \Rightarrow$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

α, β, γ sind **eindeutig bestimmt** und hängen nicht von der Wahl des Punktes O ab.

b) $\alpha + \beta + \gamma = 1 \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \Rightarrow$

$\gamma = 1 - \alpha - \beta \wedge \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ sind komplanar, $\overrightarrow{CA} \nparallel \overrightarrow{CB} \Rightarrow M \in E$.

□

Erklärung 10.40. Ein *Massenpunkt* $A(m)$ wird als mathematischer Punkt A angesehen, welcher eine **endliche** Masse m besitzt.

Es sei $A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_k(m_k)$ eine Menge Massenpunkte. Man nennt den Punkt $G(m)$ mit der Eigenschaft

$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + ... + m_k\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$$

Schwerpunkt dieser Menge.

Besitzen die Massenpunkte gleiche Massen, so wird der Schwerpunkt G des Systems auch *Zentroide* (*Mittelpunkt*) genannt. In diesem Fall gilt

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + ... + \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}.$$

Aufgabe 10.41. (1) Es soll bewiesen werden, daß der Massenpunkt $G(m)$ dann und nur dann ein Schwerpunkt der Menge $A_1(m_1), A_2(m_2), ..., A_k(m_k)$ aus Massenpunkten ist, wenn für jeden beliebig gewählten Punkt O im Raum

$$(m_1 + m_2 + ... + m_k)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + ... + m_k\overrightarrow{OA_k}$$

gilt. Dabei ist $m = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

(2) Es sei M der Mittelpunkt der Strecke (AB) und O sei ein beliebiger Punkt. Es gilt stets

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

M ist die Zentroide der Strecke (AB).

(3) Es soll bewiesen werden, daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC in einem Punkt S schneiden, daß S jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2 : 1$ teilt, und daß $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0}$ gilt.

S ist der *Mittelpunkt* (auch die Zentroide) des Dreiecks (ABC).

(4) Liegen die vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene E, dann sind sie Eckpunkte eines Vierecks. Es gibt genau einen Punkt S in E, so daß $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{0}$ gilt.

S ist bekanntlich die *Zentroide* des Vierecks $(ABCD)$.

Welche geometrische Eigenschaften hat der Punkt S?

(5) Liegen die vier Punkte A, B, C, D nicht in einer Ebene, dann sind sie Eckpunkte einer Pyramide. Eine Gerade durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite nennt man eine *Schwerlinie* der Pyramide.

a) S_D, S_A, S_B und S_C seien die Mittelpunkte der Seiten ABC, BCD, CDA bzw. DAB. Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AS_A}$, $\overrightarrow{BS_B}$, $\overrightarrow{CS_C}$ und $\overrightarrow{DS_D}$ als Linearkombinationen der linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{DC}$ dar.

b)) Begründen Sie: Der Punkt S mit $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ liegt auf jeder der vier Schwerlinien.

S ist der Mittelpunkt (die Zentroide) der Pyramide.

c) Begründen Sie: S teilt die Strecke von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite im Verhältnis $3 : 1$.

d) Ist O ein beliebig gewählter Punkt, dann seien $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{r}$ die Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ bzw. $\overrightarrow{OD}$. Begründen Sie: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{r})$.

(6) Es seien $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ ein Trapez, $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{DC}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{b}$. Stellen Sie die Pfeile $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ als lineare Kombinationen von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ dar.

10.3. **Koordinatensysteme und Koordinaten.** Das Wort *Koordinatensystem* bezeichnet eine Zusammenstellung von Verabredungen, die man trifft, um die Lage eines Punktes gegen eine Grundfigur, die man sich in verschiedenen Fällen in verschiedener Weise gegeben denkt, durch die Angabe von zwei oder (im Raum) drei in bestimmter Reihenfolge geordneten Zahlen, den sogenannten Koordinaten des Punktes, kennzeichnen zu können.

10.3.1. *Koordinatensysteme auf einer geraden Linie.* Es werden nur die Punkte einer bestimmten Geraden g ins Auge gefaßt.

Man wählt einen Punkt O als Anfangspunkt und nennt ihn *Ursprung* des Koordinatensystems; die eine der beiden Laufrichtungen von g wird als *positiv* festgelegt und der soentstandene Speer g^+ wird *Koordinatenachse* genannt; eine Strecke e wird als Längeneinheit (Maßstab) bestimmt. (Fig. 10.10)

Es sei $E \in g^+$ ein solcher Punkt, daß $\overline{OE} = 1$ ist.

Ist $\overrightarrow{a}$ ein Vektor, der zu g kollinear ist, dann ist $\overline{a} := |\overrightarrow{a}|$ bzw. $\overline{a} := -|\overrightarrow{a}|$ je nachdem $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow g^+$ bzw. $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow g^+$ gilt. Es ist $\overrightarrow{a} = \overline{a}\,.\overrightarrow{OE}$.

Die eindeutig bestimmte Zahl $\overline{a}$ (die algebraische Länge des Vektors $\overrightarrow{a}$ bezüglich g^+) nennt man *Koordinate* von $\overrightarrow{a}$ bezüglich des gewählten Koordinatensystems.

Ist $M \in g$ ein beliebiger Punkt, so ist $\overrightarrow{OM} = \overline{OM}\,.\overrightarrow{OE}$. Die eindeutig bestimmte Zahl $x := \overline{OM}$ (die algebraische Länge der Strecke (OM) bezüglich g^+) nennt man Koordinate von M bezüglich des Koordinatensystems.

Die Gerade ist ein **eindimensionaler Vektorraum**.

10.3.2. *Ebene Koordinatensysteme.* In einer Ebene denke man sich zwei einander schneidende Speere g^+ und h^+ gegeben und zwischen ihnen eine bestimmte Reihenfolge festgesetzt, so daß der eine als erster (die *Abszissenachse*, die x-Achse) und der andere als zweiter (die *Ordinatenachse*, die y-Achse) gilt. Den Schnittpunkt von g^+ und h^+ bezeichne man mit O und nennt ihn *Ursprung* des Koordinatensystems.

Ferner denke man sich, nach Annahme einer bestimmten Strecke e_1 auf g^+ bzw. e_2 auf h^+ als Längeneinheit (Maßstab), einen Punkt E_1 auf g^+ und einen Punkt E_2 auf h^+ so bestimmt, daß $\overline{OE_1} = 1$ (bezüglich des Maßstabes e_1) und $\overline{OE_2} = 1$ (bezüglich des Maßstabes e_2) gilt. (Fig. 10.11)

Nun kann man jedem Punkt P der betrachteten Ebene zwei in bestimmter Reihenfolge stehende Zahlen zuordnen, indem man die Geraden $PP_x \parallel OE_2$ und $PP_y \parallel OE_1$ in Betracht nimmt, ihre Schnittpunkte mit OE_1 bzw. OE_2 mit P_x bzw. P_y bezeichnet, und die Zahlen $x := \overline{OP_x}$, $y := \overline{OP_y}$ als *Abszisse* bzw. *Ordinate* von P annimmt. Der Punkt P hat also Koordinaten (x, y) bezüglich des eingeführten Koordinatensystems Oxy und

$$\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{OE_1} + y.\overrightarrow{OE_2}.$$

Bei diesen Einsetzungen entspricht nicht nur jedem Punkt der betrachteten Ebene ein bestimmtes geordnetes Paar (x, y) reeller Zahlen, sondern es gehört auch umgekehrt zu jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) ein und nur ein Punkt der Ebene, für welchen x die Abszisse und y die Ordinate ist.

Denkt man sich einen Vektor $\overrightarrow{a}$, der zu der gegebenen Ebene komplanar ist, und nimmt man seinen eindeutig bestimmten Repräsentanten $\overrightarrow{OP}$ in Betracht, so nennt man die Koordinaten (a_1, a_2) des Punktes P Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{a}$ bezüglich des gegebenen Koordinatensystems. Es gilt dann

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{OE_1} + a_2\overrightarrow{OE_2},$$

d.h. $\overrightarrow{a}$ ist lineare Kombination von $\overrightarrow{OE_1}$ und $\overrightarrow{OE_2}$ mit Koeffizienten a_1 und a_2.

Es sei λ eine beliebige reelle Zahl und es seien (a_1, a_2) die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{a}$ bezüglich Oxy. Der Vektor $\lambda\overrightarrow{a}$ hat die Koordinaten $(\lambda a_1, \lambda a_2)$ bezüglich Oxy.

Es seien $\overrightarrow{a}(a_1, a_2)$ und $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ zwei Vektoren, die durch ihre Koordinaten bezüglich Oxy bestimmt sind. Der Vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ hat dann die Koordinaten $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Sind die Speere g^+ und h^+ senkrecht bzw. nicht senkrecht zueinander, so nennt man das Koordinatensystem *rechtwinklig* bzw. *schiefwinklig*.

Sind die gewählten Längeneinheiten e_1, e_2 auf den beiden Koordinatenachsen gleich, so nennt man das rechtwinklige Koordinatensystem *kartesisch*.

"Kartesisch" kommt von *Cartesius*, dem latainischen Namen des französischen Philosophen und Mathematikers *René Descartes*.

Die Ebene ist ein **zweidimensionaler Vektorraum**.

Satz 10.42. *Es sei Oxy ein schiefwinkliges ebenes Koordinatensystem und $\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1)$, $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2)$, ..., $\overrightarrow{a_n}(\lambda_n, \mu_n)$ seien n $(n \in \mathbb{N})$ Vektoren, die durch ihre Koordinaten bezüglich Oxy bestimmt sind. Ist $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ein n-tupel reelle Zahlen, so ist*

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$$

dann und nur dann, wenn gilt

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + ... + \alpha_n\lambda_n = 0, \\ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n = 0. \end{array}\right.$$

Beweis. Der Vektor $\overrightarrow{a_k}$, $k = 1, 2, ..., n$, hat die Koordinaten (λ_k, μ_k), d.h.

$$\overrightarrow{a_k} = \lambda_k\overrightarrow{OE_1} + \mu_k\overrightarrow{OE_2}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} &\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \\ &= \alpha_1\{\lambda_1\overrightarrow{OE_1} + \mu_1\overrightarrow{OE_2}\} + \alpha_2\{\lambda_2\overrightarrow{OE_1} + \mu_2\overrightarrow{OE_2}\} + ... + \alpha_n\{\lambda_n\overrightarrow{OE_1} + \mu_n\overrightarrow{OE_2}\} \\ &= \{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + ... + \alpha_n\lambda_n\}\overrightarrow{OE_1} + \{\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n\}\overrightarrow{OE_2}. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, dessen Repräsentanten $\overrightarrow{OE_1}$ bzw. $\overrightarrow{OE_2}$ sind, linear unabhängig sind, so gilt

$$\begin{aligned} &\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow\ \{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + ... + \alpha_n\lambda_n\}\overrightarrow{OE_1} + \{\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n\}\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + ... + \alpha_n\lambda_n = 0\ \wedge\ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n = 0. \end{aligned}$$

$\square$

$\overrightarrow{a_1}(\lambda_1, \mu_1)$, $\overrightarrow{a_2}(\lambda_2, \mu_2)$, ..., $\overrightarrow{a_n}(\lambda_n, \mu_n)$ seien n ($n \in \mathbb{N}$) Vektoren, die durch ihre Koordinaten bezüglich Oxy bestimmt sind. Der Vektor

$$\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n}$$

hat bezüglich Oxy die Koordinaten

$$(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + ... + \alpha_n \lambda_n,\ \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + ... + \alpha_n \mu_n).$$

Aufgabe 10.43. (1) Sind die Punkte $A(5, -2)$, $B(-1, 3)$, $C(1, 2)$ kollinear?

(2) Gegeben sind der Vektor $\overrightarrow{a}(-3, 4)$ und der Punkt $A(-1, 1)$. Bestimmen Sie den Punkt $M(x, y)$ so, daß $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{a}$.

(3) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\overrightarrow{a}(4, \lambda)$ und $\overrightarrow{b}(-8, 2)$ nicht kollinear?

(4) $A(1, 3)$, $B(4, 7)$, $C(2, 8)$ sind Eckpunkte des Parallelogramms $ABCD$. Bestimmen Sie:
   a) die Koordinaten des Eckpunktes D;
   b) die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes von $ABCD$.

(5) Gegeben sind die Punkte $A(2, 6)$ und $M(6, 2)$. Bestimmen Sie so den Punkt B, daß M der Mittelpunkt der Strecke (AB) sei.

(6) Gegeben sind die Punkte $A(2, 6)$, $B(0, 3)$, $M(2, -1)$. Bestimmen Sie so den Punkt C, daß M der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC sei.

10.3.3. *Räumliche Koordinatensysteme.* Im Raum denke man sich in bestimmter Reihenfolge drei Speere f^+, g^+ und h^+ gegeben, welche den gemeinsamen Punkt O haben und nicht in ein-und-derselben Ebene liegen. Nach Annahme bestimmter Strecken e_1, e_2, e_3 als Längeneinheiten, bestimmt man den Punkt E_1 auf der Abszissenachse (x-Achse) f^+, so daß $\overline{OE_1} = |e_1| = 1$ ist, den Punkt E_2 auf der Ordinatenachse (y-Achse) g^+, so daß $\overline{OE_2} = |e_2| = 1$ ist, und den Punkt E_3 auf der Applikatenachse (z-Achse) h^+, so daß $\overline{OE_3} = |e_3| = 1$ ist.

Die Vektoren $\overrightarrow{e_1} \ni \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{e_2} \ni \overrightarrow{OE_2}$ und $\overrightarrow{e_3} \ni \overrightarrow{OE_3}$ sind linear unabhängig und werden *Koordinatenvektoren* genannt.

Man kann jedem Punkt P des Raums ein geordnetes Tripel reeller Zahlen zuordnen, indem man den Punkt P parallel zu der $\{g^+, h^+\}$-Ebene auf f^+, parallel zu der $\{h^+, f^+\}$-Ebene auf g^+ und parallel zu der $\{f^+, g^+\}$-Ebene auf h^+ projektiert. Die entsprechenden Projektionen werden mit P_x, P_y, P_z bezeichnet. Es gilt dann (Fig. 10.12):

$$\exists\ \lambda = \overline{OP_x},\ \mu = \overline{OP_y},\ \nu = \overline{OP_z}:\ \overrightarrow{OP_x} = \overline{OP_x}\,\overrightarrow{e_1}, \quad \overrightarrow{OP_y} = \overline{OP_y}\,\overrightarrow{e_2}, \quad \overrightarrow{OP_z} = \overline{OP_z}\,\overrightarrow{e_3};$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{e_1} + \mu \overrightarrow{e_2} + \nu \overrightarrow{e_3}.$$

Die drei, dem Punkt P eindeutig zugeordnete , reelle Zahlen (λ, μ, ν) nennt man Koordinaten des Punktes P bezüglich $Oxyz$.

Als räumliche Koordinaten eines Vektors gelten die Koordinaten des Endpunktes seines Repräsentanten mit dem Anfangspunkt O.

Stehen die Koordinatenachsen sämtlich senkrecht zueinander, so nennt man das Koordinatensystem *rechtwinklig*, sonst - *schiefwinklig*.

Sind die gewählten Längeneinheiten e_1, e_2, e_3 auf den drei Koordinatenachsen gleich, so heißt das rechtwinklige Koordinatensystem *kartesisch*.

Der Raum ist ein **dreidimensionaler Vektorraum**.

10.3.4. *Drehungsrichtungen in der Ebene und im Raum.* **I. Drehungsrichtungen in der Ebene**. Es seien $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ zwei Paare Koordinatenvektoren (jedes Paar besteht aus linear unabhängigen Vektoren), d.h. zwei Vektorbasen, in der Ebene. Da je drei Vektoren in der Ebene linear abhängig sind, kann man $\overrightarrow{f_1}$ und $\overrightarrow{f_2}$ eindeutig als lineare Kombination von $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ darstellen:

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{f_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{f_2} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}, \end{array}\right.$$

wobei, wegen der linearen Unabhängigkeit von $\overrightarrow{f_1}$ und $\overrightarrow{f_2}$, gilt

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Man sagt, die Vektorpaare $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ seien *gleichsinnig* bzw. *gegensinnig orientiert*, falls $\Delta > 0$ bzw. $\Delta < 0$ ist.

Da es für die reelle Zahl $\Delta \neq 0$ nur diese beiden Möglichkeiten gibt, so ist es klar, daß in der Ebene zwei Vektorpaare **entweder** gleichsinnig **oder** gegensinnig orientiert sind.

Die Vektorpaare $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$ sind **gegensinnig** orientiert:

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} = 0.\overrightarrow{e_1} + 1.\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} = 1.\overrightarrow{e_1} + 0.\overrightarrow{e_2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Jedes dritte Vektorpaar in der Ebene ist entweder mit $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ oder mit $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$ gleichsinnig orientiert.

In der Ebene gibt es demnach **genau zwei Klassen** von Vektorpaaren bezüglich ihrer Orientierung. Zur ersten Klasse gehören alle Vektorpaare, die mit $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ gleichsinnig orientiert sind; zur zweiten - die mit $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$ gleichsinnig orientierten Vektorpaare. Jede dieser Klassen bestimmt eine *Drehungsrichtung* in der Ebene.

Die Drehungsrichtung "im Uhrzeigersinn" pflegt man *negativ* zu nennen, diese "gegen den Uhrzeigersinn" dann *positiv*.

II. Drehungsrichtungen im Raum. Ähnlicherweise stellt man fest, daß es im Raum **nur zwei** Drehungsrichtungen gibt, da die linear unabhängigen Vektortripel (Vektorbasen) $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ und $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_3}$ gegensinnig orientiert sind:

$$\left|\begin{array}{l} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_2} = 0.\overrightarrow{e_1} + 1.\overrightarrow{e_2} + 0.\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} = 1.\overrightarrow{e_1} + 0.\overrightarrow{e_2} + 0.\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_3} = 0.\overrightarrow{e_1} + 0.\overrightarrow{e_2} + 1.\overrightarrow{e_3} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Zur Unterscheidung der beiden Richtungen dient die sogenannte **Rechte-Hand-Regel**:

Werden Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand so gespreizt, daß sie der Reihenfolge nach in die Richtungen von $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, und $\overrightarrow{e_3}$ zeigen, so pflegt man diese Vektoren *positiv* (rechts-) orientiert zu nennen. Sie bestimmen die *positive Drehungsrichtung* (positive Orientierung) des Raums.

Würde man in gleicher Weise mit der linken Hand verfahren, bekäme man ein *negativ* (links-) orientiertes Vektortripel $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Dieses bestimmt die *negative Drehungsrichtung* des Raums.

10.3.5. *Polarkoordinatensystem der Ebene.* Ein Polarkoordinatensystem der Ebene ist bestimmt durch einen festen Punkt, den *Pol* O, und einer von ihm ausgehenden fest gewälten Achse, der *Polarachse*, auf der wie bei einem Zahlenstrahl eine Orientiering und ein Maßstab festgelegt sind.

Ein beliebiger Punkt $P \neq O$ der Ebene läßt sich dann durch seine *Polarkoordinaten* beschreiben:

$P(\varrho, \varphi)$, wobei ϱ der Abstand des Punktes P vom Pol O ist und φ der Winkel, den der Strahl vom Pol O durch den Punkt P mit der Polarachse bildet.

Dabei wird der Winkel φ in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) gemessen. Dieser Winkel φ ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Man nennt φ auch *Polarwinkel* des Punktes P. (Fig. 10.13)

Es ist stets $\varrho > 0$, falls $P \neq O$ ist.

Für den Pol O selbst ist $\varrho = 0$ zu setzen, während φ völlig unbestimmt ist, kann also beliebig gewählt werden.

Ein beliebiges geometrisches Objekt kann in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben werden, z.B. in einem kartesischen und in einem Polarkoordinatensystem. Für dieselben geometrischen Eigenschaften findet man dann zwei Gleichungen $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(\varrho, \varphi) = 0$. Durch Transformation (Überführung) des einen Koordinatensystems in das andere geht die eine Gleichung des geometrischen Objekts in die andere über.

Die Transformationsgleichungen für den Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt ergeben sich mit Hilfe der trigonometrischen und der Arkusfunktionen. Zur Vereinfachung wird dabei vorausgesetzt, daß der Pol des Polarkoordinatensystems mit dem Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems und die Polarachse mit der x-Achse (Abszisse) zusammenfallen und beide Koordinatensysteme dieselben Längenmaßeinheit und Drehungsrichtung haben.

Zwischen den kartesischen (x, y) und den Polarkoordinaten (ϱ, φ) ein und desselben Punktes $P \neq O$ in der Ebene bestehen ausnahmslos die Gleichungen:

$$x = \varrho \cos \varphi, \ y = \varrho \sin \varphi;$$
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

10.3.6. *Zylinderkoordinatensystem des Raums.* Jede Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume.

In der Ebene E wird ein (ebenes) Polarkoordinatensystem mit dem Pol O vorgegeben. h sei die zu E senkrechte Gerade durch den Pol O. Auf h sei eine positive Laufrichtung festgesetzt.

Ein beliebiger Punkt P des Raums kann dann durch seine Zylinderkoordinaten beschrieben werden: $P(\varrho, \varphi, z)$ mit den Koordinaten ϱ und φ als ebene Polarkoordinaten des Punktes P' ((OP') ist die senkrechte Projektion der Strecke (OP) auf die Ebene E) und z als mit Vorzeichen versehenem Abstand des Punktes P von der Ebene E. Die Koordinate z ist positiv, wenn P im positiven Halbraum bezüglich h^+ liegt, ansonsten negativ (Fig).

Ist ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Koordunatenursprung O gegeben, so daß die x- und die y-Achse in der Ebene E liegen, die positive z-Achse im positiven Halbraum liegt und außerdem die Polarachse des ebenen Polarkoordinatensystems mit der x-Achse zusammenfällt, dann gelten die folgenden Umrechnungsformeln zwischen den Koordinaten eines Punktes P im kartesischen Koordinatensystem und im Zylinderkoordinatensystem:

$$x = \varrho \cos\varphi,\ y = \varrho \sin\varphi,\ z = z;$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z = z.$$

10.3.7. *Geometrische Abbildungen.* **I. Verschiebungen.** Vektoren sind ein geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung von Verschiebungen. Man kann von einem beliebigen ebenen oder räumlichen Koordinatensystem zu jedem andern derartigen System übergehen, dessen Achsenkreuz aus dem des ursprünglichen Systems durch eine *Parallelverschiebung in der Richtung eines Vektors* $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ erhalten wird.

Ist $K = Oxyz$ das ursprüngliche bzw. $K' = O'x'y'z'$ das verschobene Koordinatensystem, so ist

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{v}, \quad Ox \ \uparrow\uparrow\ O'x'; \quad Oy \ \uparrow\uparrow\ O'y'; \quad Oz \ \uparrow\uparrow\ O'z'.$$

Ist $\overrightarrow{v}(a, b, c)$ bezüglich K gegeben, so bestehen zwischen den Koordinaten (x, y, z) bzw. (x', y', z') eines beliebigen Punktes M bezüglich K bzw. K' folgende Gleichungen:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{O'M} \ \Rightarrow\ x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z'.$$

Es sind drei verschiedene Fälle möglich.

(1) Parallelverschiebung in der Richtung der x-Achse (Fig. 10.14).

$$a \neq 0 \ \wedge\ b = c = 0 :\ x = a + x',\ y = y',\ z = z'.$$

(2) Parallelverschiebung in der Richting der y-Achse (Fig. 10.15).

$$b \neq 0 \ \wedge\ a = c = 0 :\ x = x',\ y = b + y',\ z = z'.$$

(3) Parallelverschiebung in der Richtung der z-Achse (Fig. 10.16).

$$c \neq 0 \ \wedge\ a = b = 0 :\ x = x',\ y = y',\ z = c + z'.$$

II. Drehungen in der Ebene. In der Ebene E seien zwei rechtwinklige Koordinatensysteme $K = Oxy$ und $K' = Ox'y'$ mit dem selben Ursprung und der gleichen Längeneinheit so angenommen, daß ihre positiven Drehungsrichtungen übereinstimmen. Der Drehungswinkel (positiv oder negativ) sei mit ϑ bezeichnet.

Satz 10.44. *Zwischen den Koordinaten* (x, y) *bzw.* (x', y') *bezüglich* K *bzw.* K' *eines beliebigen Punktes* P *der Ebene* E *bestehen ausnahmslos die Gleichungen*

$$\left|\begin{array}{l} x = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \\ y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta, \\ y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta. \end{array}\right.$$

Beweis. Sind P_1, P_1' die senkrechten Projektionen des Punktes P auf die Achsen Ox bzw. Ox' und P_2, P_2' auf die Achsen Oy bzw. Oy' (Fig. 10.17), so gilt

$$x = \overline{OP_1} \ \wedge\ x' = \overline{OP_1'}; \quad y = \overline{OP_2}, \wedge\ y' = \overline{OP_2'}.$$

Ist $\alpha = \angle(OP^{\rightarrow}, Ox)$, so folgt aus dem Dreieck OP_1P: $x = |OP|\cos\alpha,\ y = |OP|\sin\alpha.$

Aus dem Dreieck $OP_1'P$ entnehmen wir $x' = |OP|\cos(\alpha - \vartheta),\ y = |OP|\sin(\alpha - \vartheta).$

Aus den Formeln für die trigonometrischen Funktionen von Winkelsummen und Winkeldifferenzen folgt der Beweis des Satzes.

□

Im Fall $\vartheta = \pi$ haben wir eine Punktspiegelung des Koordinatensystems am Punkt O. Dann ist

$$x = -x', \quad y = -y'.$$

Die Komposition einer Drehung des Koordinatenkreuzes um den Winkel ϑ und einer Parallelverschiebung in der Richtung des Vektors $\overrightarrow{v}$ läßt sich in der Form

$$D(\overrightarrow{X}) = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{v}$$

darstellen. Dabei sind

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \; D(\overrightarrow{X}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Eine **Achsenspiegelung** S an der x-Achse läßt sich in der Form $S(\overrightarrow{X}) = B\overrightarrow{X} + \overrightarrow{v}$ darstellen. Dabei ist B eine Matrix vom Typ

$$B = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

10.4. **Skalarprodukt von Vektoren.** Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl, also ein Skalar.

Es seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei gegebene Vektoren, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ der von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ bestimmte elementar-geometrische Winkel, $|\overrightarrow{a}|$ und $|\overrightarrow{b}|$ die Beträge der beiden Vektoren bezüglich einer festgelegten Längeneinheit.

Unter $Pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ versteht man die algebraische Länge bezüglich $\overrightarrow{a}$ der *senkrechten Projektion des Vektors* $\overrightarrow{b}$ *auf* $\overrightarrow{a}$ (Fig. 10.18).

Erklärung 10.45. Unter *skalares* oder *inneres Produkt* von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ versteht man die Zahl Null, falls $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \;\vee\; \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ist, und die Zahl

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\,Pr_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\,Pr_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a},$$

falls $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \;\wedge\; \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ ist.

10.4.1. *Eigenschaften des Skalarproduktes.*

(1) Falls $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \;\wedge\; \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ gilt, so ist

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{2}.$$

Erklärung 10.46. Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ gleich Null ist.

Der Nullvektor ist demnach **zu jedem** Vektor orthogonal.

(2) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$ für beliebige Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ (das *Kommutativgesetz*).

(3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ für beliebige Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ (das *Distributivgesetz*).

Beweis. Es sei $\overline{OB_0} = Pr_{\overrightarrow{c}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, $\overline{OA_0} = Pr_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a}$, $\overline{A_0B_0} = Pr_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{b}$ (Fig. 10.19)

Da $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{c}(\vec{a}+\vec{b})$ gilt, haben wir

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = |\vec{c}|\,Pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|(Pr_{\vec{c}}\vec{a} + Pr_{\vec{c}}\vec{b}) = \vec{c}\,\vec{a} + \vec{c}\,\vec{b}.$$

(4) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a}(\lambda\vec{b})$ für beliebege Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(5) $\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, d.h. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$ für jeden Vektor $\vec{a}$ $\Rightarrow$

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0.$$

(6) Falls $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$ zwei beliebige Vektoren sind, so ist

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

(7) Falls $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$ zwei beliebige Vektoren sind, so gilt

$$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1-\cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\,\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Hieraus folgt

$$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}^2\vec{b}^2 = (\vec{a}\,\vec{b})^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}| = |\vec{a}\,\vec{b}|.$$

Satz 10.47. *Ist $K = Oxyz$ ein kartesisches Koordinatensystem im Raum und sind $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ zwei beliebige Vektoren, die durch ihre Koordinaten bezüglich K gegeben sind, so ist*

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes dieser Vektoren.

Beweis. Es seien $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ die Koordinatenvektoren von K. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \;\wedge\; \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} \;\Rightarrow \\
\vec{a}\,\vec{b} &= (a_1b_1)(\vec{e_1}^2) + (a_2b_2)(\vec{e_2}^2) + (a_3b_3)(\vec{e_3}^2) \\
&\quad +(a_1b_2 + a_2b_1)(\vec{e_1}\vec{e_2}) + (a_2b_3 + a_3b_2)(\vec{e_2}\vec{e_3}) + (a_3b_1 + a_1b_3)(\vec{e_3}\vec{e_1}) \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,
\end{aligned}$$

da $\vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = \vec{e_3}^2 = 1$ und $\vec{e_1}\vec{e_2} = \vec{e_2}\vec{e_3} = \vec{e_3}\vec{e_1} = 0$ ist.

□

Bemerkung 10.48. In der Physik unterscheidet man bei Größen *Skalare* und *Vektoren.* Ein *Skalar* ist durch die Angabe von Maßzahl und Einheit vollständig bestimmt (z.B. Länge, Masse, Temperatur, Ladungsmenge), während bei einem *Vektor* zusätzlich die Angabe einer Richtung erforderlich ist (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke).

Entsprechend verwendet man in der Mathematik gelegentlich die Bezeichnung *Skalar* für eine reelle Zahl, wenn die Unterscheidung gegenüber Vektoren deutlich werden soll.

Mit *Skalarprodukt* wird hier ausgedrückt, daß bei dieser Verknüpfung zweier Vektoren das Ergebnis eine reelle Zahl, also ein Skalar ist.

Der Wert des Skalarproduktes zweier Vektoren ist **von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig**.

Sind $M_1(x_1, y_1, z_1)$ und $M_2(x_2, y_2, z_2)$ zwei verschiedene Punkte, so ist

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ein Pfeil, dessen Länge bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K folgende Zahl ist:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ist für einen Vektorraum $\mathcal{V}$ ein Skalarprodukt definiert, so heißt $\mathcal{V}$ *euklidischer Vektorraum.*

Aufgabe 10.49. Die Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}; \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$ sind folgendermaßen definiert:

$$|\overrightarrow{a}| = 1,\ |\overrightarrow{b}| = 2,\ |\overrightarrow{c}| = \sqrt{2};\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \tfrac{\pi}{2},\ (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \tfrac{\pi}{2},\ (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = \tfrac{\pi}{4};$$

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie:

(a) die Längen von $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$;

(b) das Skalarprodukt von $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$;

(c) den Winkel $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$;

(d) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{r}) = \frac{\pi}{2}$ ist;

(e) $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $|\overrightarrow{r}| = \sqrt{5}$ ist.

Aufgabe 10.50. Es sei $K = Oxyz$ ein kartesisches Koordinatensystem in $\mathbb{R}^3$ und es seien $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ drei Vektoren, welche durch ihre Koordinaten bezüglich K bestimmt sind.

(1) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die zu $\overrightarrow{a}(1, 2, 3)$ orthogonal sind.

(2) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die zu $\overrightarrow{a}(1, 1, -1)$ und zu $\overrightarrow{b}(2, 1, 0)$ orthogonal sind.

(3) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{a}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b}(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{c}(1, 1, -2)$ des $\mathbb{R}^3$.

(a) Begründen Sie die drei folgenden Aussagen:

1) $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ sind zu $\overrightarrow{a}$ orthogonal.

2) Jede Linearkombination von $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ ist zu $\overrightarrow{a}$ orthogonal.

3) Ist ein Vektor zu $\overrightarrow{a}$ orthogonal, dann läßt er sich als Linearkombination von $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ darstellen.

(b) Es sei $\overrightarrow{d} = r\overrightarrow{b} + s\overrightarrow{c}$. Bestimmen Sie $r \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ so, daß $\overrightarrow{d}$ zu $\overrightarrow{b}$ orthogonal ist.

(4) $K = Oxy$ ist ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene E,

$$A(0, 2),\ B(1, 0),\ C(-4, 2)$$

sind die Ecken eines Dreiecks, welche durch ihre Koordinaten bezüglich K gegeben sind.

Bestimmen Sie:

(a) den Umfang des Dreiecks ABC;

(b) den Winkel $\angle ACB$;

(c) die Koordinaten der senkrechten Projektion H des Punktes C auf die Gerade AB.

(5) Sei $\mathcal{V}$ ein euklidischer Vektorraum und $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}$, mit $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Beweisen Sie: Die Menge aller Vektoren, die zu $\overrightarrow{a}$ orthogonal sind, ist ein Untervektorraum von $\mathcal{V}$.

(6) Gegeben sind $\overrightarrow{a_1}(3,0,4)$, $\overrightarrow{a_2}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{a_3}(1,2,1)$.

a) Begründen Sie: $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Stellen Sie die folgenden Vektoren als Linearkombinationen von $\mathbf{B}$ dar.

$$\overrightarrow{a_1}(1,0,0),\ \overrightarrow{a_2}(0,1,0),\ \overrightarrow{a_3}(0,0,1).$$

c) Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Lösung aus b) die folgenden Vektoren als Linearkombinationen von Vektoren aus $\mathbf{B}$ dar.

$$\overrightarrow{b_1}(1,2,3),\ \overrightarrow{b_2}(4,5,6),\ \overrightarrow{b_3}(x,y,z),\ x,y,z \in \mathbb{R}.$$

10.4.2. *Flächeninhalt eines Dreiecks.*

Satz 10.51. *In der Ebene eines kartesischen Koordinatensystems K sind drei nicht kollineare Punkte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ in bestimmter Reihenfolge durch ihre Koordinaten gegeben. Der Flächeninhalt (Inhalt) S des Dreiecks ABC ist*

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Beweis. Wir bezeichnen $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ (Fig. 10.20).
Da $\overrightarrow{a}(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1)$, $\overrightarrow{b}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, so gilt

$$\overrightarrow{a}^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2, \quad \overrightarrow{b}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2 = \{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)\}^2.$$

Dann ist

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

□

Die Zahl $\sigma_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ wird *orientierter Dreieckinhalt* genannt.

Dabei ist σ_{ABC} positiv oder negativ, je nachdem die Laufrichtung $A \to B \to C \to A$ mit der positiven bzw. negativen Drehungsrichtung des ebenen Koordinatensystems K übereinstimmt.

Aufgabe 10.52. $A(-1,-2)$, $B(-4,2)$, $C(5,6)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K. Berechnen Sie:

(a) den Inhalt des Dreiecks ABC;

(b) die Länge der Seitenhalbierenden (CM), $M \in (AB)$ durch die Ecke C;

(c) die Länge der Lote (CH), $H \in AB$ durch die Ecke C;

(d) die Länge der Winkelhalbierenden (AL), $L \in (BC)$ des Winkels BAC.

Hinweis. (Fig. 10.21)

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}), \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{AB}, \ \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0,$$

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = -\frac{|AB|}{|AC|} = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{LB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LC} \ \Rightarrow \ L\left(-1, \frac{10}{3}\right) \ \Rightarrow \ |AL| = \frac{16}{3}.$$

10.5. **Vektorprodukt von Vektoren.** Einige geometrische Aufgabenstellungen wie z.B. die Abstandsbestimmung im dreidimensionalen Raum führen zu dem Problem, zu zwei gegebenen Vektoren einen orthogonalen Vektor zu bestimmen. Dieses Problem soll nun unabhängig von einer konkreten Aufgabe allgemein gelöst werden, d.h.: Es soll zu zwei beliebigen Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ des Raums $\mathbb{R}^3$ ein Vektor $\overrightarrow{n}$ bestimmt werden, für den gilt $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{n} = 0 \ \wedge \ \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{n} = 0$.

Erklärung 10.53. Das *äußere Produkt* oder *Vektorprodukt* zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist der Vektor $\overrightarrow{n}$, für den gilt:

(i) $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$ falls $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \ \vee \ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$;

(ii) Sind $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge \ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, so ist

$$|\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b});$$

(iii) Sind außerdem $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ nicht kollinear, d.h. $\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \neq 0$, so steht $\overrightarrow{n}$ senkrecht auf $\overrightarrow{a}$ und auf $\overrightarrow{b}$. Dabei ist die Richtung von $\overrightarrow{n}$ so bestimmt, daß das geordnete Vektortripel $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{n})$ zu der positiven Drehungsrichtung des Raums gehört, d.h. ein positives Vektortripel laut der Rechte-Hand-Regel ist.

Das Vektorprodukt wird symbolisch so dargestellt: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

10.5.1. *Eigenschaften des Vektorproduktes.* Es seien $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ drei beliebige Vektoren des Raums.

(1) Falls $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge \ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ gilt, so ist

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{a} \ \| \ \overrightarrow{b}.$$

(2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, d.h. kehrt man die Reihenfolge der beiden gegebenen Vektoren um, so tritt an der Stelle ihres Vektorproduktes der **gleichlange**, aber **gegensinnig gerichtete** Vektor auf.

(3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$.

(4) $(\lambda\overrightarrow{a}) \times (\mu\overrightarrow{b}) = (\lambda\mu)(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(5) Ist $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, so ist $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ gleich dem Inhalt des Parallelogramms, dessen benachbarten Seiten Repräsentanten von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind.

(6) Falls $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge \ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ gilt, so ist

$$\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

(7) Ist der positive Windungssinn im Raum durch die Annahme eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems festgelegt, und sind in diesem System (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{a}$ bzw. $\overrightarrow{b}$, so erhält man die Koordinaten $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ihres Vektorproduktes durch die Gleichungen:

$$\alpha'' = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}, \quad \beta'' = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}, \quad \gamma'' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}.$$

Das Vektorprodukt von zwei Vektoren ist **von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig**. Die Koordinaten dieses Produktes hängen dagegen vom Koordinatensystem ab.

Aufgabe 10.54. Beweisen Sie, daß folgendes stets gilt:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2 \overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2.$$

Beweis. Falls $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \ \vee \ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, so ist die Gleichung erfüllt.
Sind $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \ \wedge \ \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, so gilt

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 &= |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2 = \{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})\}^2 \\ &= |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1-\cos^2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) = \overrightarrow{a}^2 \overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.55. Beweisen Sie:

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Es seien $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ Repräsentanten von $\overrightarrow{a}$ bzw. $\overrightarrow{b}$, und $ABCD$ der von A, B, D eindeutig bestimmte Parallelogram. Dann ist $\overrightarrow{DB} \in (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$, $\overrightarrow{AC} \in (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
Die geometrische Deutung der obigen Gleichung ist (Fig. 10.22):

$$|(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})| = 2S_{ABCD} = 2|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

Satz 10.56. *Es gilt stets:*

(i) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a})\overrightarrow{a}$;

(ii) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{a}$;

(iii) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$.

10.6. **Spatprodukt von Vektoren. Rauminhalt eines Tetraeders.**

Erklärung 10.57. Sind $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ drei Vektoren, so heißt der Skalar

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$

Spatprodukt dieser Vektoren.

Aus der geometrischen Interpretation des Skalarprodukts folgt, daß $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$ gleich dem Produkt aus der Länge von $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ und der algebraischen Länge der Projektion von $\overrightarrow{c}$ auf $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ ist. Da $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ gleich dem Flächeninhalt des von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ gespannten Parallelogramms ist, stellt $|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}|$ das Volumen des von den Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ aufgespannten Spates dar (Fig. 10.23).

Spat ist ein anderer Name für *Parallelepiped* oder *Parallelfach*.

Das Spatprodukt dreier Vektoren, eine Kombination von Kreuzprodukt und Skalarprodukt, ist die Größe des *orientierten Volumens* des Spats, der durch die drei Vektoren aufgespannt wird. Unter orientiertem Rauminhalt versteht man dabei das Volumen multipliziert mit dem Faktor $+1$, falls die Vektoren ein rechtshändiges Tripel bilden, und multipliziert mit -1, falls sie ein linkshändiges Tripel bilden.

Satz 10.58. *Das Spatprodukt ergibt genau dann Null, wenn die Vektoren in einer Ebene liegen, also komplanar beziehungsweise linear abhangig sind. In diesem Fall hat auch der Volumeninhalt des aufgespannten Spates den Wert Null.*

Das Spatprodukt von drei Vektoren ist **vom Koordinatensystem unabhängig**.

Ein *Tetraeder* (v. griech.: tetraedron = Vierflächner) ist ein Korper mit vier Seitenflachen, eine dreiseitige Pyramide.

Während man in der elementaren Stereometrie den Rauminhalt (das Volumen) eines Tetraeders als eine stets positive Größe ansieht, empfielt es sich in der analytischen Geometrie vielfach Tetraeder von positivem und negativem Rauminhalt zu unterscheiden.

Man legt zunächst den positiven Windungssinn im Raum fest und trifft folgende Festsetzungen:

(1) Ein Tetraeder soll erst dann als völlig bestimmt gelten, wenn nicht nur seine Ecken selbst gegeben sind, sondern zwischen ihnen auch eine bestimmte Reihenfolge vorgeschrieben ist.

(2) Sind A, B, C, D der Reihe nach die Ecken eines völlig bestimmten Tetraeders, so soll als *orientierter Rauminhalt* dieses Tetraeders diejenige positive oder negative Zahl bezeichnet werden, deren absoluter Wert den Rauminhalt im Sinne der elementaren Stereometrie (d.h. $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.h$) angibt und deren Vorzeichen " + " oder " − " ist, je nachdem die drei Richtungen $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ im positiven oder negativen Sinne aufeinander folgen.

Ändert man die Reihenfolge der Ecken des Tetraeders, so bleibt der Inhalt ungeändert oder verwandelt sich in den entgegengesetzten Wert, je nachdem die neue Anordnung der Ecken eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen bezüglich der ursprünglichen Anordnung darbietet.

Für den *orientierten Rauminhalt* des Tetraeders $DABC$ mit

$$\overrightarrow{DA} \in \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{DB} \in \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{DC} \in \overrightarrow{c}$$

gilt die Formel

$$V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})\overrightarrow{b}.$$

Satz 10.59. *Der orientierte Rauminhalt des Tetraeders $DABC$, dessen Ecken $D(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ im kartesischen Koordinatensystem $K = Oxyz$ gegeben sind, wird durch die folgenden Determinanten gegeben:*

$$V_{DABC} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 10.60. (1) Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\{(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})\} = \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

(2) Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K sind die Punkte $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$ gegeben. Welche Länge hat das Lot des Tetraeders, welches durch die Ecke D läuft?

(3) Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K sind die Punkte $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 1, 0)$, $D(1, 1, 1)$ gegeben. Liegen sie in einer Ebene?

(4) Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K sind die Punkte $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ gegeben. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC?

(5) Beweisen sie folgende Gleichungen:
  (a) $\frac{1}{2}\{(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$;
  (b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$;
  (c) $\overrightarrow{a}\{\overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d})\} = (\overrightarrow{a}\overrightarrow{c})(\overrightarrow{b}\overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a}\overrightarrow{d})(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})$.

(6) Die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ sind folgendermaßen erklärt:

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1, \quad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{3}.$$

Es seien

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

Beweisen Sie, daß $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ linear unabhängig sind.
Rechnen Sie das Spatprodukt $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})\overrightarrow{OC}$ aus.

11. Geraden

Jede Gerade ist ein geometrisches Grundobjekt.

Je zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Die Gerade AB, welche durch zwei verschiedene Punkte A und B eindeutig bestimmt ist, ist die Menge aller Punkte M mit $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die geometrische Bedeutung der Zahl λ ist

$$\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}. \tag{11.1}$$

Es sind folgende Fälle möglich:

(a) Liegt M zwischen A und B, so ist $\lambda \in (0, 1)$ (Fig. 11.1).

(b) Liegt B zwischen A und M, so ist $\lambda > 1$ (Fig. 11.2).

(c) Liegt A zwischen M und B, so ist $\lambda < 0$ (Fig. 11.3).

Es sei O ein beliebiger Punkt im Raum. Wir betrachten die Gerade $g = AB$ durch die verschiedenen Punkte A und B und stellen die Frage: Wie kann man zu einem beliebigen Punkt M der Geraden g den Ortsvektor bezüglich O bestimmen?

Es gilt:

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ – Vektoraddition
  und
- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$ – Gerade g, gegeben durch $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bezeichnet man mit $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{r_a} = \overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{r_b} = \overrightarrow{OB}$ die Ortsvektoren des beliebigen Punktes M und der verschiedenen Punkte A und B, dann hat die Gerade AB die Gleichung

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_a} + \lambda(\overrightarrow{r_b} - \overrightarrow{r_a}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{r_a} + \lambda \overrightarrow{r_b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11.2}$$

Diese Parameterdarstellung heißt *Zwei-Punkt-Form* der Geradengleichung.

Setzt man $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r_0}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, so erhält man

$$g: \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11.3}$$

Den zum Punkt A führenden Ortsvektor $\overrightarrow{r_0}$ nennt man auch *Stützvektor* der Geraden g. Der Ortsvektor jedes Punktes der Geraden g kann als Stützvektor dienen.

Durch $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ wird die Richtung der Geraden g bestimmt. $\overrightarrow{v}$ heißt daher *Richtungsvektor* der Geraden. Jeder von $\overrightarrow{0}$ verschiedene und zu g kollineare Vektor kann als Richtungsvektor gewählt werden.

Man nennt die reelle Zahl λ in (11.2) bzw. (11.3) *Parameter*. Die Darstellung (11.3) heißt *Parameterdarstellung der Geraden* oder *Punkt-Richtungs-Form* der Geradengleichung.

Wenn λ alle reellen Zahlen durchläuft, dann erhält man alle Punkte der Geraden mit den Ortsvektoren $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{v}$. Zu jedem Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört genau ein Punkt M der Geraden, und umgekehrt gehört zu jedem Punkt M der Geraden genau eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es gibt also eine **ein-eindeutige Abbildung** von der Menge aller Punkte einer Geraden auf der Zahlengerade.

Die Gerade ist eine **einparametrige Punktmenge**.

Sind die Richtungsvektoren von zwei Geraden kollinear, so sind die Geraden entweder parallel oder gleich.

Ist in der Gleichung (11.3) der Stützvektor $\overrightarrow{r_0}$ der Nullvektor, so erhalten wir die Gleichung einer Geraden durch den festgelegten Punkt O.

Die Menge aller Punkte M, deren Ortsvektoren der Gleichung $\overrightarrow{r} = \lambda \overrightarrow{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ genügen, ist die Gerade durch O und B mit $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Ist O speziell der Ursprung eines Koordinatensystems, so beschreibt diese Gleichung die **Ursprungsgerade** durch B.

11.1. **Geraden in einer Koordinatenebene.** Für diesen Abschnitt sei ein für allemal vereinbart, daß bei allen Betrachtungen, die sich auf die in einer bestimmten Ebene E liegenden Punkte und Geraden beziehen, in dieser Ebene ein System $K = Oxy$ von Parallelkoordinaten eingeführt sei. Dieses System darf im allgemeinen schiefwinklig sein; nur wenn es ausdrücklich hervorgehoben wird, muß es rechtwinklig, sogar kartesisch, sein.

Es sei in der Ebene E die Gerade g durch die Gleichung (11.3) gegeben, und es seien (x,y), (x_0,y_0) bzw. (α,β) die Koordinaten von $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{r_0}$ bzw. $\overrightarrow{v}$ bezüglich K. Die Vektorgleichung (11.3) ist gleichbedeutend mit dem System der *Koordinatengleichungen*

$$\left|\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\,\alpha, \\ y = y_0 + \lambda\,\beta,\ \lambda \in \mathbb{R},\ (\alpha,\beta) \neq (0,0). \end{array}\right. \tag{11.4}$$

Durch Multiplikation mit den Faktoren β bzw. $-\alpha$ und nachfolgende Addition kann man aus diesen Gleichungen eine Gleichung

$$\beta\,x - \alpha\,y - (\beta\,x_0 - \alpha\,y_0) = 0 \tag{11.5}$$

gewinnen, welche nur noch die Koordinaten (x,y) eines **beweglichen** (laufenden) Punktes der Geraden g, aber nicht mehr den Parameter λ enthält.

Bezeichnet man

$$\beta =: a, \quad \alpha =: -b, \quad \beta\,x_0 - \alpha\,y_0 =: -c,$$

so schreibt man die Gleichung (11.5) in der Form

$$ax + by + c = 0,\ a = const,\ b = const,\ c = const,\ (a,b) \neq (0,0). \tag{11.6}$$

Satz 11.1. *Wenn in einer Ebene eine Gerade g gegeben ist, so ist es immer möglich, eine lineare Gleichung* (11.6) *zwischen x und y von solcher Beschaffenheit anzugeben, daß die Koordinaten eines jeden auf g liegenden Punktes diese Gleichung erfüllen, und auch umgekehrt, jeder Punkt, dessen Koordinaten (x,y) die lineare Gleichung* (11.6) *befriedigen, liegt auf g.*

Beweis. Ist g durch den Punkt $M_0(x_0,y_0)$ und den Vektor $\overrightarrow{p}(\alpha,\beta) \neq \overrightarrow{0}$ bestimmt, so gelten für die Koordinaten (x,y) eines beliebigen Punktes auf g die Gleichungen (11.4). Daraus gewinnt man die Gleichung (11.5), und also (11.6).

Ist jetzt die lineare Gleichung (11.6) gegeben und ist z.B. $b \neq 0$, so nehmen wir den Punkt $P\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ und den Vektor $\overrightarrow{v}(-b,a)$ in Betracht. Die Koordinaten von P sind eine konkrete Lösung von (11.6). Die Gerade h, die eindeutig mittels P und $\overrightarrow{v}$ bestimmt ist, hat die Gleichung (11.6). Da aber $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{p}(\alpha,\beta)$ ist und $P \in g$ (falls $\lambda = -\dfrac{x_0}{\alpha}$ ist), so ist $h \equiv g$.

□

Wir fassen zusammen:

(1) Jede in einer Ebene liegende Gerade läßt sich durch eine Gleichung ersten Grades zwischen den Koordinaten eines beweglichen Punktes auf dieser Geraden darstellen.

(2) Jede Gleichung ersten Grades zwischen den Koordinaten (x,y) eines in einer Ebene liegenden Punktes stellt eine gerade Linie dar.

Die Geradengleichung (11.6) heißt *allgemeine Geradengleichung* oder *parameterfreie Geradengleichung.*

Satz 11.2. *Hat man ein und dieselbe in einer Ebene E liegende Gerade g durch zwei verschiedene Gleichungen ersten Grades zwischen den Koordinaten (x,y) eines beweglichen*

Punktes dargestellt

$$(i) \quad ax+by+c=0 \quad \wedge \quad (ii) \quad a'x+b'y+c'=0,$$

so geht jede dieser Gleichungen aus der anderen durch Multiplikation mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor hervor.

Beweis. Da $(a,b) \neq (0,0)$ ist, so sei etwa $a \neq 0$. Man kann die Gleichung (i) nach x auflösen:

$$(iii) \qquad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a},$$

d.h. zu jedem beliebigen Wert von y gehört ein auf g liegender Punkt $M(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}, y)$, dessen Abszisse durch die Gleichung (iii) gegeben wird.

Da (ii) ebengfalls die Gerade g darstellen soll, so muß sie befriedigt werden, wenn man für x und y die Koordinaten von M einsetzt. Es muß also

$$a'(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}) + b'y + c' = 0$$

oder

$$(b' - \frac{a'}{a}b)y + (c' - \frac{a'}{a}c) = 0$$

sein für **jeden beliebigen** Wert von y. Dies ist aber **nur dann** möglich, wenn $b' = \dfrac{a'}{a}b$ und $c' = \dfrac{a'}{a}c$ gilt. Reiht man noch die selbstverständliche Gleichung $a' = \dfrac{a'}{a}a$ dazu an, so sieht man, daß die Gleichung (ii) aus der Gleichung (i) durch Multiplikation mit $\dfrac{a'}{a}$ hervorgeht.

$\dfrac{a'}{a} \neq 0$, da sonst $a' = b' = c' = 0$ gilt, was der Voraussetzung widerspräche.

□

Die Koeffizienten $a, b, c \quad ((a,b) \neq (0,0))$ in der allgemeinen Geradengleichung legen die Gerade fest.

11.2. **Arten von Geradengleichungen.** Für eine Gerade gibt es verschiedene Gleichungsformen.

(1) Für $a = 0$ ist die Gerade mit der allgemeinen Gleichung $by + c = 0 \;\; (y + \dfrac{c}{b} = 0)$ eine Parallele zur x-Achse.

(2) Für $b = 0$ ist die Gerade mit der allgemeinen Gleichung $ax + c = 0 \;\; (x + \dfrac{c}{a} = 0)$ eine Parallele zur y-Achse.

(3) Für $c = 0$ verläuft die Gerade mit der allgemeinen Gleichung $ax + by = 0$ durch den Koordinatenursprung (Nullpunkt).

(4) Die x- bzw. y-Achse hat die Gleichung $y = 0$ bzw. $x = 0$.

(5) Die *Halbierungslinie* des Winkels zwischen den positiven Laufrichtungen der Koordinatenachsen (und seines Scheitelwinkels) hat die Gleichung $x - y = 0$.

(6) Es sei g eine in einer Ebene E liegende Gerade, die zur y-Achse nicht parallel ist und es sei $ax + by + c = 0$ ihre allgemeine Gleichung. Da $b \neq 0$ ist ($g \nparallel Oy$), so kann man

die Geradengleichung durch b dividieren und es ergibt sich mit $k = -\dfrac{a}{b} \,\wedge\, m = -\dfrac{c}{b}$ die *Hauptform*

(11.7) $$y = kx + m$$

der Geradengleichung bezüglich des **schiefwinkligen** Koordinatensystems K.

Die Strecke m in (11.7) wird von der Geraden g auf der y-Achse abgeschnitten, deshalb heißt m auch *Achsenabschnitt* oder genauer *y-Achsenabschnitt*.

Geraden, die Parallelen zur y-Achse sind, besitzen also **keine** Hauptform.

(7) Ist K ein **kartesisches Koordinatensystem**, so ist der Koeffizient k in (11.7) der *Richtungskoeffizient* oder die *Steigung* der Geraden g.

Es gilt (Fig. 11.4):
- Ist $S = g \cap Oy$, so hat S die Koordinaten $(0, m)$.
- Die Gerade $g_0 \{\ni S, \parallel Ox\}$ hat die Gleichung $y - m = 0$.
- Sind $P(x_0, kx_0 + m)$ ein beliebiger Punkt auf g, $P_x(x_0, 0)$ die senkrechte Projektion von P auf Ox, und $Q(x_0, m) = g_0 \cap PP_x$, so entzieht man aus dem rechtwinkligen Dreieck SPQ

$$\tan\vartheta = \frac{\overline{QP}}{\overline{SQ}} = \frac{kx_0}{x_0} = k.$$

Die Steigung k ist also gleich dem Tangens des Winkels ϑ, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt.

Der Achsenabschnitt kann ebenso wie die Steigung je nach Lage unterschiedliches Vorzeichen besitzen.

Die Gleichung

(11.8) $$y = \tan\vartheta . x + m$$

ist als *kartesische Hauptform* der Geradengleichung bezüglich des **kartesischen** Koordinatensystems K bekannt.

(8) Hat eine Gerade den Achsenabschnitt x_0 auf der x-Achse und den Achsenabschnitt y_0 auf der y-Achse, d.h. die Gerade geht durch die Punkte $A(x_0, 0)$ und $B(0, y_0)$ mit $x_0 \neq 0 \,\wedge\, y_0 \neq 0$, dann lautet die *Achsenabschnittform* der Geradengleichung (Fig. 11.5)

(11.9) $$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1.$$

Aus der allgemeinen Geradengleichung $ax + by + c = 0$ ergibt sich die Achsenabschnittform durch Division durch $-c \neq 0$.

Satz 11.3. *Ist das Koordinatensystem $K = Oxy$ kartesisch und ist die Gerade g durch ihre allgemeine Gleichung*

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

bezüglich K gegeben, so ist der Vektor $\overrightarrow{n}(a, b)$ zu g senkrecht.

Beweis. Es seien $M_1(x_1, y_1)$ und $M_2(x_2, y_2)$ zwei verschiedene Punkte der Geraden g. Es gelten die Gleichungen

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \;\; (M_1 \in g) \;\wedge\; ax_2 + by_2 + c = 0 \;\; (M_2 \in g).$$

Nach Subtraktion bekommt man, daß stets

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \tag{i}$$

gilt (auch bezüglich eines schiefwinkligen Koordinatensystems).

Da $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ und $\overrightarrow{n}(a, b)$ bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K ein Skalarprodukt $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)$ haben, so bedeutet die Gleichung (i), daß $\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{n}$ senkrecht zueinander sind, d.h. $\overrightarrow{n}$ ist senkrecht zu g.

□

Zusatz 11.4. *Ist das gegebene Koordinatensystem K kartesisch und sind $g_1 : y = k_1x + m_1$ und $g_2 : y = k_2x + m_2$ zwei verschiedene Geraden, so sind sie genau dann senkrecht zu einander, wenn $k_1k_2 = -1$ gilt.*

Beweis.

$$g_1 :\ y = k_1x + m_1 \ \Rightarrow\ k_1x - y + m_1 = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_1}(k_1, -1) \perp g_1;$$
$$g_2 :\ y = k_2x + m_2 \ \Rightarrow\ k_2x - y + m_2 = 0 \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_2}(k_2, -1) \perp g_2;$$
$$g_1 \perp g_2 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 0 \ \Leftrightarrow\ k_1k_2 + 1 = 0.$$

□

Zusatz 11.5. *Es seien $K = Oxy$ ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene E und $g_1 :\ y = k_1x + m_1,\ g_2 :\ y = k_2x + m_2$ zwei sich schneidende Geraden mit $k_1k_2 \neq -1$. Ist ϑ der spitze Winkel zwischen g_1 und g_2, so ist*

$$\tan\vartheta = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_1k_2|}. \tag{11.10}$$

Beweis. Es sei $\theta = \angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$. Dan ist $\theta = \vartheta \asymp \theta = \pi - \vartheta$ und $\tan\vartheta = |\tan\theta|$. Es gilt

$$\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = k_1k_2 + 1, \quad \overrightarrow{n_1}^2\overrightarrow{n_2}^2 - (\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2})^2 = (k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1) - (k_1k_2 + 1)^2 = (k_2 - k_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad |\tan\theta| = \left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \frac{\sqrt{\overrightarrow{n_1}^2\overrightarrow{n_2}^2 - (\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2})^2}}{|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_1k_2|}.$$

□

Aufgabe 11.6. Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $K = Oxy$ in der Ebene E seien folgende Geraden und Punkte gegeben:

$$a :\ 3x + 4y + 2 = 0, \quad b :\ 5x - 12y + 1 = 0, \quad A(1, -2), \quad B(0, -1).$$

Bestimmen Sie:

(1) eine analytische Darstellung der Geraden AB.

Lösung.

I. $AB\,\{\ni A \wedge \parallel \overrightarrow{AB}(-1, 1)\} \Rightarrow$

$$AB : \left|\begin{array}{l} x = 1 - s, \\ y = -2 + s,\ s \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

II. (Fig. 11.6) $AB:\ ux+vy+r=0 \ \wedge\ (u,v)\neq(0,0) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{n}(u,v)\ \perp\ AB\ \wedge\ \overrightarrow{p}(-v,u)\ \|\ AB \Rightarrow\ \exists\, k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ \overrightarrow{p}=k\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ u=k\ \wedge\ v=k\ \Rightarrow$ $AB:\ kx+ky+r=0$.
Der Punkt A liegt auf der Geraden AB, d.h. die Koordinaten von A sind eine Lösung der Geradengleichung: $k.1+k.(-1)+r=0\ \Rightarrow\ r=k\ \Rightarrow$

$$AB:\ x+y+1=0.$$

III. $\overrightarrow{AB}(-1,1)\ \|\ AB\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n}(1,1)\ \perp\ AB\ \Rightarrow\ AB:\ x+y+r=0.$
Der Punkt A liegt auf der Geraden AB, es gilt $r=1$.

IV. $\overrightarrow{AB}(-1,1)\ \|\ AB$. Es sei $M(x,y)$ ein beliebiger Punkt der Geraden AB. Es gilt: $\overrightarrow{AM}(x-1,y+2)\ \|\ AB\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AM}\ \|\ \overrightarrow{AB}\ \Rightarrow\ \exists\,\lambda\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}\ \Rightarrow$

$$AB:\ \begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ AB:\ x+y+1=0.$$

(2) eine analytische Darstellung der Geraden $l\ \{\ni A,\ \|\ a\}$.
Lösung. $A\notin a\ \Rightarrow\ l\neq a$ ist eindeutig bestimmt (Fig. 11.7).

I. $l\ \|\ a\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_a}\ \|\ \overrightarrow{n_l}\ \Leftrightarrow\ \exists\, k\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{n_l}=k\overrightarrow{n_a}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_a}(3,4)\ \perp\ l\ \Rightarrow$

$$l:\ 3x+4y+5=0.$$

II. $a\ \|\ \overrightarrow{a}(-4,3)\ \Rightarrow\ l\ \|\ \overrightarrow{a}\ \wedge\ l\ni A\ \Rightarrow$

$$AB:\ \left|\ \begin{array}{l} x=1-4\lambda, \\ y=-2+3\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

(3) eine analytische Darstellung der Geraden $m\ \{\ni B,\ \perp\ b\}$ (Fig. 11.8).
Lösung. Es seien die Geraden $b:\ ux+vy+r=0$ und $m:\ u'x+v'y+r'=0$ gegeben. Dann gilt: $m\ \perp\ b\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_m}(u',v')\ \perp\ \overrightarrow{n_b}(u,v)\ \Leftrightarrow\ u'u+v'v=0.$

I. $\overrightarrow{n_b}(5,-12)\ \perp\ b\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_b}\ \|\ m\ \Rightarrow\ m\ \{\ni B,\ \|\ \overrightarrow{n_b}\}\ \Rightarrow$

$$m:\ \left|\ \begin{array}{l} x=0+5\lambda, \\ y=-1-12\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

II. $\overrightarrow{b}(12,5)\ \|\ b\ \Rightarrow\ m\ \perp\ \overrightarrow{b}\ \wedge\ m\ni B\ \Rightarrow$

$$m:\ 12x+5y+5=0.$$

(4) die Koordinaten des Bildes B' von B bei der Spiegelung an der Geraden a.
Lösung. (Fig. 11.9) $h\ \{\ni B,\ \perp a\}:\ 4x-3y-3=0,\quad h\ \cap\ a=B_0(\frac{6}{25},-\frac{17}{25})$, $\overrightarrow{OB_0}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'})\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB_0}-\overrightarrow{OB}\ \Rightarrow\ B'(\frac{12}{25},-\frac{9}{25})$.

(5) analytische Darstellung der Geraden $q\ \{\ni B,\ \ni a\ \cap\ b\}$.
Anleitung. $a\ \cap\ b=P\ \Rightarrow\ q=BP$.

(6) die Achsenabschnittform der Geradengleichungen von a und b.

(7) die kartesischen Hauptformen der Geradengleichungen von a und b.

(8) die Winkel α und β, welche die Geraden a bzw. b mit den Koordinatenachsen schließen.

Antwort: $\tan\alpha = k_a = -\frac{3}{4}$, $\tan\beta = k_b = \frac{5}{12}$

(9) den Winkel zwischen a und b.

Lösung. I) $k_a = -\dfrac{3}{4} \ \wedge\ k_b = \dfrac{5}{12} \ \Rightarrow\ \tan(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{|k_a - k_b|}{|k_a k_b + 1|} = \dfrac{56}{33}.$

II) $\overrightarrow{a}(-4,3) \ \|\ a \ \wedge\ \overrightarrow{b}(12,5) \ \|\ b \ \Rightarrow\ \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})_e = \dfrac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = -\dfrac{33}{65}.$

(10) die Winkel, welche die Gerade AB mit der x- bzw. y-Achse schließt.

Aufgabe 11.7. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $K = Oxy$ seien die Geraden $b:\ 5x+4y-13=0$, $c:\ x+2y-5=0$ und der Punkt $H(14,15)$ gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ABC, so daß b und c die Seiten AC bzw. AB des Dreiecks, und H sein Höhenschnittpunkt seien.

Lösung. (Fig. 11.10)

$$\begin{aligned}
&h_c\{\ni H,\ \perp\ c\}:\ 2x - y - 13 = 0, && h_c \cap b = C(5,-3);\\
&h_b\{\ni H,\ \perp\ b\}:\ 4x - 5y + 19 = 0, && h_b \cap c = B(-1,3)\\
&\Rightarrow\ b \cap c = A(1,2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.8. Die Geraden $b:\ 5x+4y-13=0$, $c:\ x+2y-5=0$ sind Seiten eines Dreiecks, der Punkt $M(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ ist der Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks.

Lösung.

$$\begin{aligned}
&b \cap c = A(1,2).\\
&B(x_1,y_1) \in c\ \Rightarrow\ x_1 + 2y_1 - 5 = 0;\\
&C(x_2,y_2) \in b\ \Rightarrow\ 5x_2 + 4y_2 - 13 = 0.\\
&\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\\
&\Rightarrow\ x_1 + x_2 = 4\ \wedge\ y_1 + y_2 = 0\ \Rightarrow\ B(-1,3)\ \wedge\ C(5,-3).
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.9. Die Punkte $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(5,3)$ sind Eckpunkte des Dreiecks ABC bezüglich des kartesischen KS's $K = Oxy$. Bestimmen Sie analytisch:

a) die Winkelhalbierende l_A des Winkels CAB;

b) die Seitenhalbierende m_A der Seite (BC);

c) das Lot h_A des Dreiecks ABC.

Lösung. (Fig. 11.11)

a) $\overrightarrow{AC}(3,4) \;\Rightarrow\; |AC| = 5, \quad \overrightarrow{AB}(0,1) \;\Rightarrow\; |AB| = 1.$

$$\overrightarrow{f}\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) =: \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|} \;\wedge\; \overrightarrow{g}(0,1) =: \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} \;\Rightarrow\; |\overrightarrow{f}| = |\overrightarrow{g}| = 1$$

$$\Rightarrow\; (\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5}\overrightarrow{l}(1,2) \;\parallel\; l_A.$$

$$l_A\,\{\ni A,\; \parallel\; \overrightarrow{l}\,\}:\; 2x - y - 2 = 0.$$

b) $M \in (BC) \;\wedge\; \overrightarrow{AM}(2,2) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$

$$m_A\,\{\ni A,\; \parallel\; \overrightarrow{AM}\}:\; x - y - 1 = 0.$$

c) $h_A \;\perp\; \overrightarrow{BC}(4,2) \;\wedge\; h_A \ni A \;\Rightarrow\; h_A:\; 2x + y - 2 = 0.$

Aufgabe 11.10. Bezüglich des kartesischen KS's K sind die Geraden $a:\; 2x - y - 5 = 0$ und $b:\; 3x - y - 1 = 0$ gegeben. Bestimmen Sie das Bild a' von a bei der Spiegelung S_b an der Geraden b (Fig. 11.12).

Lösung. $P = a \cap b \;\wedge A\,(\neq P) \in a \;\Rightarrow\; S_b(P) = P' = P \;\wedge\; S_b(A) = A' \neq A \;\Rightarrow$

$$a' = PA':\; 11x - 2y + 18 = 0.$$

Aufgabe 11.11. Die Geraden $p:\; x - 1 = 0,\; q:\; x - 2y + 1 = 0$ sind Seiten eines Dreiecks, die Gerade $r:\; x - y - 1 = 0$ ist eine seiner Seitenhalbierenden. Bestimmen Sie die Eckpunkte und den Flächeninhalt des Dreiecks. Das Koordinatensystem ist kartesisch.

Lösung. (Fig. 11.13) $p \cap q = B(1,1) \;\Rightarrow\; B \notin r.$

I) $r \cap p = A(1,0) \;\wedge\; r \cap q = M(3,2) \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OC}(5,3) = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} \;\Rightarrow\; \sigma_{ABC} = -2.$

II) $r \cap p = M \;\wedge\; r \cap q = C \;\Rightarrow ...$

Aufgabe 11.12. Welche allgemeine Gleichung hat die Gerade g, welche durch den Punkt $A(-1,1)$ läuft und einen Winkel von der Grösse $\dfrac{\pi}{4}$ mit der Geraden $l:\; 2x + 3y - 6 = 0$ schließt? Das Koordinatensystem ist kartesisch.

Aufgabe 11.13. Gegeben sind die Winkelhalbierende $l_A: x - 3y = 0$, die Seitenhalbierende $m_B:\; 3x + 8y - 18 = 0$ und das Lot $h_C:\; x = 4$ des Dreiecks ABC. Welche sind die Koordinaten von A, B und C? Das Koordinatensystem ist kartesisch.

11.3. **Hessesche Normalenform der Geradengleichung. Abstand Punkt-Gerade.**

Erklärung 11.14. Es sei in der Ebene E ein kartesisches Koordinatensystem $K = Oxy$ festgelegt. Es sei $ux + vy + r = 0$ die allgemeine Gleichung einer Geraden g bezüglich K.

Hat der Normalenvektor $\overrightarrow{N}(u,v)$ von g die Länge 1, so heißt $ux + vy + r = 0$ die *Hesse-Form* oder *Hessesche Normalenform* der Geradengleichung (nach dem deutschen Mathematiker *Ludwig Otto Hesse* (1811 − 1874)).

Wenn man in einer Ebene E einen Strahl $l^{\rightarrow}$ und eine Orientierung mittels eines **kartesischen** Koordinatensystems $K = Oxy$ gegeben hat, so bezeichnet man als die *positive Normalenrichtung* von $l^{\rightarrow}$ diejenige in der Ebene liegende und zu $l^{\rightarrow}$ senkrechte Richtung, welche aus der Richtung von $l^{\rightarrow}$ durch positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgeht.

Die Halbebene mit dem Umriß $l \parallel l^{\rightarrow}$ in E, nach welcher die positive Normalenrichtung sich erstreckt, wird die *positive Halbebene* bezüglich l genannt.

Erklärung 11.15. Wenn in einer orientierten Ebene E eine orientierte Gerade g gegeben ist, so pflegt man unter dem *orientierten Abstand* eines in der Ebene E liegenden Punktes M von der Geraden g diejenige positive oder negative Zahl zu verstehen, deren absoluter Wert die Länge des von M auf g fallenden Lotes angibt und deren Vorzeichen " + " oder " − " ist, jenachdem der Punkt M sich in der positiven bzw. negativen Halbebene bezüglich g befindet.

(Fig. 11.14)

$$\left| \begin{array}{l} g:\ (l^{\rightarrow}, \overrightarrow{n}) \ \Rightarrow \\ A \in \lambda:\ \overrightarrow{A_0A} = \overline{A_0A}\ \overrightarrow{n},\ \overline{A_0A} > 0; \\ B \in \overline{\lambda}:\ \overrightarrow{B_0B} = \overline{B_0B}\ \overrightarrow{n},\ \overline{B_0B} < 0. \end{array} \right.$$

(Fig. 11.15)

$$\left| \begin{array}{l} g:\ (l'^{\rightarrow} = -l^{\rightarrow},\ \overrightarrow{n'} = -\overrightarrow{n}) \ \Rightarrow \\ A \in \lambda:\ \overrightarrow{A_0A} = \overline{A_0A}\ \overrightarrow{n'},\ \overline{A_0A} < 0; \\ B \in \overline{\lambda}:\ \overrightarrow{B_0B} = \overline{B_0B}\ \overrightarrow{n'},\ \overline{B_0B} > 0. \end{array} \right.$$

Satz 11.16. *Ist in einer orientierten Ebene E (Fig. 11.16) eine orientierte Gerade g gegeben, bestimmt ferner $\overrightarrow{n}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ die positive Normalenrichtung dieser Geraden und ist $\varrho \in \mathbb{R}$ der orientierte Abstand des Koordinatenursprungs O von der Geraden g, so lautet die Hesse-Form oder Hessesche Normalenform der Geradengleichung*

$$g:\ \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + \varrho = 0. \tag{11.11}$$

Beweis. Durch den Ursprung O sei der zu $\overrightarrow{n}$ gleichsinnig kollineare Strahl $l^{\rightarrow}$ gezogen. Derselbe treffe g in F. Dann ist

$$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{FO} = -\varrho\, \overrightarrow{n} = \overline{OF}\, \overrightarrow{n}.$$

Falls $P(x, y)$ einen beliebigen auf g liegenden Punkt bezeichnet, so ist

$$\overrightarrow{OP}\, \overrightarrow{n} = Pr_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{OP} = \overline{OF} = -\varrho$$

und außerdem

$$\overrightarrow{OP}\, \overrightarrow{n} = \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt (11.11).

□

Ist die Gerade g durch ihre allgemeine Gleichung $ux+vy+r = 0$ bezüglich des kartesischen Koordinatensystems K gegeben, so ist der Vektor $\overrightarrow{N}(u, v)$ ein Normalenvektor von g. Seine Länge ist $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Der Vektor $\overrightarrow{n}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\overrightarrow{N}$ hat die Länge 1; genauso der Vektor $\overrightarrow{n'}\left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{u^2+v^2}}\overrightarrow{N}$.

Die Vektoren $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{n'}$ sind gegensinnig kollinear.

Zusatz 11.17. *Wenn in einem kartesischen Koordinatensystem K eine Gerade durch ihre allgemeine Gleichung $ux+vy+r=0$ gegeben ist, so leitet man aus ihr durch Multiplikation mit dem Normierungsfaktor $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ die Hessesche Normalenform her.*

Ist die Gerade orientiert, so muß das Vorzeichen des Normierungsfaktors entgegengesetzt zu dem von r gewählt werden.

Satz 11.18. *Wenn in einer orientierten Ebene E die Gleichung einer orientierten Geraden g in der Hesseschen Normalenform*

$$g: \ \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + \varrho = 0$$

gegeben ist und $P(\xi,\eta)$ ein beliebiger Punkt der Ebene E ist, der nicht auf g zu liegen braucht, so ist

$$\delta(P,g) = \cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\,\eta + \varrho$$

der orientierte Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Beweis. (Fig. 11.17) Es sei $\overrightarrow{OF} \ \uparrow\uparrow \ \overrightarrow{n} \ \wedge \ F \in g$. Es sei ferner P' die senkrechte Projektion des Punktes P auf den Strahl $OF^{\rightarrow}$. Dann ist

$$\delta(P,g) = \overline{FP'} = \overline{OP'} - \overline{OF}.$$

Nun ist aber

$$\overline{OP'} = \cos\varphi.\xi + \sin\varphi.\eta \ \wedge \ \overline{OF} = -\varrho \ \Rightarrow \ \delta(P,g) = \cos\varphi.\xi + \sin\varphi.\eta + \varrho.$$

□

Aufgabe 11.19. In der Ebene eines kartesischen Koordinatensystems seien ein Punkt $P(\xi,\eta)$ und eine Gerade $g: \ ux+vy+r=0$ gegeben. Man soll den orientierten Abstsnd des Punktes P von dieser Geraden ermitteln.

Lösung. Man formt die Gleichung von g durch Division mit $\varepsilon\sqrt{u^2+v^2}$, $\varepsilon=\pm 1$ um, z.B.

$$g: \ \frac{ux+vy+r}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0,$$

und setzt in $\dfrac{ux+vy+r}{\sqrt{u^2+v^2}}$ für x bzw. y die Koordinaten ξ bzw. η des Punktes P ein:

$$\frac{u\xi+v\eta+r}{\sqrt{u^2+v^2}} = \delta(P,g).$$

Ist die Gerade orientiert, so ist das Vorzeichen ε des Normierungsfaktors $\varepsilon\sqrt{u^2+v^2}$

$$\varepsilon = -sign\ r.$$

Aufgabe 11.20. In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei einander schneidende Geraden durch ihre allgemeinen Gleichungen gegeben:

$$a: \ ux+vy+r=0, \quad a': \ u'x+v'y+r'=0.$$

Man soll Gleichungen der Halbierungslinien der von a und a' gebildeten Winkel bestimmen.

Lösung. Es sei $\dfrac{ux+vy+r}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$ bzw. $\dfrac{u'x+v'y+r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = 0$ die Hessesche Normalenform der Geradengleichung von a bzw. a' und es seien b und b' die beiden Halbierungslinien des gegebenen Winkels (Fig. 11.18).

Es sei $M(\xi,\eta) \in b \;\Rightarrow\; |\delta(M,a)| = |\delta(M,a')|$. Es sei außerdem $\delta(M,a)\delta(M,a') > 0$. Es gilt also $\delta(M,a) = \delta(M,a')$ und

$$\frac{u\xi + v\eta + r}{\sqrt{u^2+v^2}} = \delta(M,a) = \delta(M,a') = \frac{u'\xi + v'\eta + r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}.$$

Die Gleichung

$$\frac{u\xi + v\eta + r}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{u'\xi + v'\eta + r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = 0$$

ist für jeden Punkt der Geraden b erfüllt und ist demnach die allgemeine Gleichung von b.

Es sei $M'(\xi',\eta') \in b' \;\Rightarrow\; |\delta(M',a)| = |\delta(M',a')|$. Es gilt außerdem $\delta(M',a)\delta(M',a') < 0$ und also $\delta(M',a) = -\delta(M',a')$, d.h.

$$\frac{u\xi' + v\eta' + r}{\sqrt{u^2+v^2}} = \delta(M',a) = -\delta(M',a') = -\frac{u'\xi' + v'\eta' + r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}.$$

Die Gleichung

$$\frac{u\xi' + v\eta' + r}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{u'\xi' + v'\eta' + r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = 0$$

ist für jeden Punkt der Geraden b' erfüllt und ist demnach die allgemeine Gleichung von b'.

Die allgemeinen Gleichungen der beiden Winkelhalbierungslinien sind

$$\frac{ux + vy + r}{\sqrt{u^2+v^2}} \pm \frac{u'x + v'y + r'}{\sqrt{u'^2+v'^2}} = 0.$$

Aufgabe 11.21. In der Ebene eines kartesischen Koordinatensystems Oxy sind die Geraden $a:\ x - 3y = 0$ und $b:\ 3x - y + 5 = 0$ gegeben. Man finde:

a) eine Hessesche Normalenform der Geradengleichungen von a und b;

b) Gleichungen der Halbierungslinien der von a und b einschließenden Winkel;

c) eine Gleichung der Halbierunglinie dieses Winkels zwischen a und b, für welchen der Punkt $M(1,1)$ ein Innenpunkt ist.

Zusatz 11.22. *In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei einanderschneidende Geraden* $g_1 :\ \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y + \varrho_1 = 0$ *und* $g_2 :\ \cos\beta\, x + \sin\beta\, y + \varrho_2 = 0$ *mit ihren Hesse-Normalenform-Gleichungen gegeben. Es sei* $\overrightarrow{n_1}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ *bzw.* $\overrightarrow{n_2}(\cos\beta,\sin\beta)$ *der normale Einheitsvektor von* g_1 *bzw.* g_2.

Ist $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} < 0$, *so ist der Vektor* $(\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2})$ *senkrecht zu der Halbierungslinie des* **stumpfen** *Winkels zwischen* g_1 *und* g_2 *(Fig.* 11.19*).*

Die allgemeine Gleichung der Halbierungslinie des stumpfen Winkels ist

$$(\cos\alpha + \cos\beta)x + (\sin\alpha + \sin\beta)y + (\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Ist dagegen $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} > 0$, *so ist der Vektor* $(\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2})$ *senkrecht zu der Halbierungslinie des* **spitzen** *Winkels zwischen* g_1 *und* g_2 *(Fig.* 11.20*).*

Die allgemeine Gleichung der Halbierungslinie des spitzen Winkels ist

$$(\cos\alpha + \cos\beta)x + (\sin\alpha + \sin\beta)y + (\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Aufgabe 11.23. Die Geraden $a: \ x-3y=0, \ b: \ 3x-y+5=0$ sind durch ihre allgemeinen Gleichungen bezüglich des kartesischen KS's K gegeben. Bestimmen Sie analytisch die Winkelhalbierende l des spitzen bzw. l' des stumpfen Winkels zwischen a und b.

Lösung. $\overrightarrow{a}(3,1) \parallel a \wedge \overrightarrow{b}(1,3) \parallel b \Rightarrow \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}=6>0 \Rightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Da $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=\sqrt{10}$, so ist $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) \parallel l \wedge (\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) \parallel l'$.

Die Winkelhalbierende des spitzen Winkels ist

$$l\,\{\ni a\cap b, \ \parallel (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\}: \ 4x-4y+5=0.$$

Die Winkelhalbierende des stumpfen Winkels ist

$$l'\,\{\ni a\cap b, \ \parallel ((\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\}: \ 2x+2y+5=0.$$

Aufgabe 11.24. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems seien die Geraden a : $x-2y+1=0$ und $b: \ 2x-y-1=0$ gegeben. Bestimmen Sie die Halbierungslinie des stumpfen bzw. des spitzen Winkels zwischen a und b.

Antwort: $l_{\text{spitz}}: x-y=0$; $l_{\text{stumpf}}: x+y-2=0$.

Aufgabe 11.25. Es seien die Geraden $a: \ x-2y+2=0, \ b: \ 2x+3y-1=0$ und der Punkt $M(1,1)$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems gegeben. Liegt der Punkt M in einem spitzen oder in einem stumpfen Winkel zwischen a und b?

12. Ebenen im Raum

Eine Ebene E im Raum ist stereometrisch durch folgende Elemente eindeutig bestimmt:

(a) drei nicht kollineare Punkte A, B, C (Fig. 12.1);

(b) zwei sich schneidende Geraden $a \cap b = P$ (Fig. 12.2);

(c) eine Gerade a und ein Punkt $B \notin a$ (Fig. 12.3);

(d) zwei zueinander parallele Geraden $a \parallel b$ (Fig. 12.4);

(e) ein Punkt A und eine Normalenrichtung, welche von der Geraden g bestimmt ist (Fig. 12.5).

In jedem der Fälle $(a)-(d)$ haben wir einen Punkt und zwei zueinander nicht kollineare Vektoren (*die Richtungsvektoren der Ebene*), welche die Ebene eindeutig bestimmen (d.h. diese Elemente bestimmen die Lage der Ebene E im Raum), nämlich:

(a) der Punkt A und die Vektoren $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$;

(b) der Punkt P und die Vektoren $\overrightarrow{a} \parallel a, \ \overrightarrow{b} \parallel b$;

(c) der Punkt B, ein beliebiger Punkt $A \in a$ und die Vektoren $\overrightarrow{a} \parallel a, \ \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{a}$;

(d) ein beliebiger Punkt $A \in a$, ein beliebiger Punkt $B \in b$ und die Vektoren $\overrightarrow{a} \parallel a$ $(\parallel b)$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{a}$.

Es sei nun die Ebene E durch den Punkt P und die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$ bestimmt (Fig. 12.6). Es sei M ein beliebiger Punkt in E. Die Vektoren $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$ sind komplanar, und da $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$ linear unabhängig (d.h. nicht kollinear) sind, so kann man $\overrightarrow{PM}$ eindeutig als lineare Kombination von $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$ darstellen:

(11.12) $$\overrightarrow{PM}=\lambda\,\overrightarrow{p}+\mu\,\overrightarrow{q}, \ \lambda\in\mathbb{R}, \ \mu\in\mathbb{R}.$$

Ist O ein festgelegter Punkt im Raum, so gilt auch

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\overrightarrow{p} + \mu\,\overrightarrow{q},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{11.13}$$

Auf der beschriebenen Weise ordnet man jedem Punkt M in E zwei eindeutig bestimmte Zahlen (λ, μ) zu, und umgekehrt, jedem geordneten Paar reeller Zahlen (λ, μ) ordnet man mittels (11.12) bzw. (11.13) einen Punkt M in E zu.

Durchläuft M die ganze Ebene E, so laufen die Parameter λ und μ (unabhängig von einander!) die ganze Zahlengerade $\mathbb{R}$ durch.

Die Ebene ist also eine **zweiparametrige** Punktmenge.

Die Darstellung (11.13) heißt *Parameterdarstellung der Ebene*.

Bezeichnet $\overrightarrow{r}$ bzw. $\overrightarrow{r_0}$ den Ortsvektor von M bzw. P, so wird die Ebene E durch den Punkt P mit den nicht kollinearen Richtungsvektoren $\overrightarrow{p}$ und $\overrightarrow{q}$ durch die Gleichung

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda\,\overrightarrow{p} + \mu\,\overrightarrow{q},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R} \tag{11.14}$$

beschrieben. Die Parameterdarstellung (11.14) heißt *Punkt-Richtungs-Form* der Ebenengleichung. Der Ortsvektor $\overrightarrow{r_0}$ von P heißt *Stützvektor* der Ebene.

Sind $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ die Ortsvektoren der nicht kollinearen Punkte A, B bzw. C, dann beschreibt die Gleichung

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + \lambda\,(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + \mu\,(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\overrightarrow{r} = (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{a} + \lambda\,\overrightarrow{b} + \mu\,\overrightarrow{c},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R} \tag{11.15}$$

die Ebene durch A, B und C. Die Richtungsvektoren $(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$ und $(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$ sind dabei nicht kollinear.

Die Parameterdarstellung (11.15) heißt *Drei-Punkte-Form* der Ebenengleichung.

Ist der Stützvektor der Ebene der Nullvektor, so erhalten wir die Gleichung einer Ebene durch den Ursprung:

$$\overrightarrow{r} = \lambda\,\overrightarrow{p} + \mu\,\overrightarrow{q},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{11.16}$$

Zwei Ebenen im Raum sind *parallel*, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Wir definieren analytisch die Parallelität zweier Ebenen.

Erklärung 12.1. Zwei Ebenen E_1 mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{q_1}$ und E_2 mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{q_2}$ sind *parallel*, wenn die beiden Richtungsvektoren der einen Ebene Linearkombinationen der Richtungsvektoren der anderen Ebene sind.

12.1. **Ebenen in $\mathbb{R}^3$.** Ist im Raum ein **schiefwinkliges** Koordinatensystem $K = Oxyz$ festgelegt und sind (x_0, y_0, z_0), (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) die Koordinaten des Punktes P bzw. der Vektoren $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, so ist die Vektorgleichung (11.13) gleichbedeutend mit dem System der *Koordinatengleichungen* der Ebene E:

$$\left|\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1, \\ y &= y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2, \\ z &= z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3;\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}\right. \tag{11.17}$$

Hier sind (x, y, z) die Koordinaten des beweglichen Punktes M.

Aus (11.17) kann man durch Multiplikation mit den Faktoren

$$u := \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \quad v := \begin{vmatrix} p_3 & q_3 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}, \quad w := \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

und nachfolgende Addition eine Gleichung folgender Art gewinnen

$$ux + vy + wz + r = 0 \ \wedge \ (u, v, w) \neq (0, 0, 0), \tag{11.18}$$

wobei $r = -(ux_0 + vy_0 + wz_0)$ ist.

Die Gleichung (11.18) enthält nur noch die Koordinaten des beweglichen Punktes M der Ebene E, aber nicht mehr die Parameter λ und μ.

Die Gleichung (11.18) ist die *Koordinatenform* (die parameterfreie Form, die normale Form) der Ebenengleichung oder die *allgemeine Gleichung* (die Normalenformgleichung) der Ebene E.

So haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 12.2. *Jede Ebene des Raumes läßt sich durch eine Gleichung ersten Grades (lineare Gleichung) zwischen den Koordinaten eines in ihr frei beweglichen Punktes analytisch darstellen.*

Nun beweisen wir die Umkehrung dieses Satzes.

Satz 12.3. *Jede Gleichung ersten Grades zwischen den Koordinaten eines sich im Raum beweglichen Punktes stellt eine Ebene dar.*

Beweis. Ist

$$ux + vy + wz + r = 0 \ \wedge \ (u, v, w) \neq (0, 0, 0) \tag{11.19}$$

eine solche Gleichung und ist z.B. $u \neq 0$, so erhält man $x = -\frac{v}{u}\,y - \frac{w}{u}\,z - \frac{r}{u}$ und erkennt sofort, daß (11.19) mit dem System der drei Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} x = -\frac{r}{u} - \frac{v}{u}\,\lambda - \frac{w}{u}\,\mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

gleichwertig ist, also die Ebene mit dem Stützpunkt $P(-\frac{r}{u}, 0, 0)$ und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{p}(-\frac{v}{u}, 1, 0)$, $\overrightarrow{q}(-\frac{w}{u}, 0, 1)$ darstellt.

□

12.2. **Arten von Ebenengleichungen.**

Satz 12.4. *Ist eine Ebene E in einem* **kartesischen** *Koordinatensystem durch die lineare Gleichung $ux+vy+wz+r = 0$ gegeben, so ist der Vektor $\overrightarrow{n}(u, v, w)$ einer jeden senkrechten zur Ebene E Geraden kollinear.*

Beweis. Es seien $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ zwei (beliebige) verschiedene Punkte in E. Dann gelten die Gleichungen $ux_1 + vy_1 + wz_1 + r = 0$ und $ux_2 + vy_2 + wz_2 + r = 0$. Nach einer Subtraktion erhält man die Gleichung

$$u(x_2 - x_1) + v(y_2 - y_1) + w(z_2 - z_1) = 0.$$

Diese bedeutet (da das Koordinatensystem kartesisch ist), daß das Skalarprodukt von $\overrightarrow{n}(u,v,w)$ und $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ gleich Null ist, d.h. $\overrightarrow{n}$ ist zu jeder gerichteten Strecke der Ebene E senkrecht. Daraus folgt, daß $\overrightarrow{n}$ zur E selbst senkrecht ist.

$\square$

Man nennt den Vektor $\overrightarrow{n}$ einen *Normalenvektor* von E, die Gleichung $ux+vy+wz+r=0$ selbst - *Normalenform* der Ebenengleichung.

Ist eine Ebene E mit dem Stützpunkten P und den Richtungsvektoren $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ bestimmt, so ist E auch mit dem Stützpunkten P und dem Normalenvektor $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$ bestimmt.

(1) Die allgemeine Gleichung einer Ebene durch den Ursprung ist $ux+vy+wz=0$.

(2) Die allgemeinen Gleichungen der Koordinatenebenen sind:
$$Oxy: \ z=0, \quad Oyz: \ x=0, \quad Ozx: \ y=0.$$

(3) Die allgemeine Gleichung einer zur Oxy parallelen Ebene ist $z+r=0$.

(4) Die allgemeine Gleichung einer zur Oyz parallelen Ebene ist $x+r=0$.

(5) Die allgemeine Gleichung einer zur Ozx parallelen Ebene ist $y+r=0$.

(6) Die x-Achse liegt in den Ebenen Oxy und Ozx. Die Koordinaten aller Punkte dieser Achse befriedigen die Gleichungen $z=y=0$.

Die y-Achse liegt in den Ebenen Oxy und Oyz. Die Koordinaten aller Punkte dieser Achse befriedigen die Gleichungen $z=x=0$.

Die z-Achse liegt in den Ebenen Ozx und Oyz. Die Koordinaten aller Punkte dieser Achse befriedigen die Gleichungen $y=x=0$.

(7) Die *Achsenabschnittform*
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{11.20}$$
der Ebenengleichung der Ebene E erhält man, indem man die Abschnitte a, b, c, welche die Ebene in Verbindung mit dem Koordinatenursprung O auf der x-, der y- bzw. der z- Achse bildet, ausrechnet. Daraus folgt **notwendig**, daß die Ebene E zu keiner der Koordinatenachsen parallel ist und den Ursprung O nicht enthält.

Es gilt also
$$E \cap Ox = A(a,0,0) \ \Rightarrow \ a=\overline{OA},$$
$$E \cap Oy = B(0,b,0) \ \Rightarrow \ b=\overline{OB},$$
$$E \cap Oz = C(0,0,c) \ \Rightarrow \ c=\overline{OC}.$$

Aufgabe 12.5. Man bestimme allgemeine Gleichungen von Ebenen, welche zu den Koordinatenachsen parallel sind bzw. die Koordinatenachsen enthalten.

Lösung. Es sei E eine beliebige Ebene im Raum mit der allgemeinen Gleichung $ux+vy+wz+r=0$. Der Ursprung O liegt nicht in $E \ \Leftrightarrow \ r \neq 0$.

- $E \parallel Ox \ \Leftrightarrow$ das System
$$ux+vy+wz+r=0, \quad y=0, \quad z=0$$
hat keine Lösung $\Leftrightarrow$ der Rang der erweiterten Matrix ist vom Rang der Koeffizientenmatrix des Systems verschieden. Da $rang\ \overline{A}=3$ ist, soll $rang\ A=2$ sein, d.h. $u=0$. Die Gleichung von E ist $vy+wz+r=0$, $(v,w)\neq(0,0)$.

- $E \parallel Oy \;\Leftrightarrow\; ux + wz + r = 0,\; (u, w) \neq (0, 0)$.
- $E \parallel Oz \;\Leftrightarrow\; ux + vy + r = 0,\; (u, v) \neq (0, 0)$.
- $Ox \subset E \;\Leftrightarrow\; vy + wz = 0,\; (v, w) \neq (0, 0)$.
- $Oy \subset E \;\Leftrightarrow\; ux + wz = 0,\; (u, w) \neq (0, 0)$.
- $Oz \subset E \;\Leftrightarrow\; ux + vy = 0,\; (u, v) \neq (0, 0)$.

Es sei E eine Ebene, welche zur z-Achse nicht parallel ist. Es sei $ux + vy + wz + r = 0$ ihre allgemeine Gleichung. Da $w \neq 0$ ist ($E \nparallel Oz$), so kann man die Ebenengleichung durch w dividieren und es ergibt sich mit $a = -\dfrac{u}{w},\; b = -\dfrac{v}{w},\; c = -\dfrac{r}{w}$ die *Hauptform*

$$z = ax + by + c \tag{11.21}$$

der Ebenengleichung bezüglich des **schiefwinkligen** Koordinatensystems K.

Die Strecke c in (11.21) wird von der Ebene E auf der z-Achse abgeschnitten, deshalb heißt c auch *Achsenabschnitt* oder genauer *z-Achsenabschnitt*.

Ebenen, welche parallel zur z-Achse sind, besitzen **keine** Hauptform.

12.3. **Hessesche Normalenform der Ebenengleichung. Abstand Punkt-Ebene.** In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man Abstände berechnen kann und wie man den Winkel zwischen zwei Ebenen bzw. zwischen einer Ebene und einer Geraden sinnvoll definieren kann.

Unter dem Abstand eines Punktes A von einer Ebene E versteht man die kleinste aller Entfernungen des Punktes A zu den Punkten von E. Ist A selbst ein Punkt von E, dann ist die kleinste Entfernung gleich Null. Ein Punkt S von E hat genau dann minimalen Abstand von A, wenn (AS) senkrecht zu E ist.

Es sei nun der positive Windungssinn im Raum mittels eines **kartesischen** Koordinatensystems festgelegt.

Es sei E eine mittels dem geordneten Vektorpaar $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E_2})$ orientierte Ebene.

Die Normalenrichtung $\overrightarrow{n_E}$ von E, für welche das Spatprodukt $\overrightarrow{E_1}\,\overrightarrow{E_2}\,\overrightarrow{n_E} > 0$ ist, bezeichnet man als die *positive Normalenrichtung* von E (Fig. 12.7).

Den Halbraum mit dem Umriß E, nach welchem die positive Normalenrichtung sich erstreckt, wird der *positive Halbraum* bezüglich E genannt.

Erklärung 12.6. Wenn in einem orientierten Raum eine orientierte Ebene E gegeben ist, so pflegt man unter dem *orientierten Abstand* eines im Raum liegenden Punktes M von der Ebene E diejenige positive oder negative Zahl zu verstehen, deren absoluter Wert die Länge des von M auf E fallenden Lotes angibt und deren Vorzeichen "$+$" oder "$-$" ist, jenachdem der Punkt M sich in dem positiven bzw. negativen Halbraum bezüglich E befindet.

Erklärung 12.7. Es sei $ux + vy + wz + r = 0$ die allgemeine Gleichung einer Ebene E bezüglich K. Hat der Normalenvektor $\overrightarrow{N_E}(u, v, w)$ von E die Länge 1, so heißt $ux + vy + wz + r = 0$ die *Hesse-Form* oder *Hessesche Normalenform* der Ebenengleichung.

Satz 12.8. *Ist in einem orientierten Raum eine orientierte Ebene E gegeben, bestimmt ferner $\overrightarrow{n_E}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$, $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$, die positive Normalenrichtung dieser Ebene und ist $\varrho \in \mathbb{R}$ der orientierte Abstand des Koordinatenursprungs O von* *der Ebene E, so lautet die Hesse-Form oder Hessesche Normalenform der Ebenengleichung*

$$E: \ \cos\varphi_1\, x + \cos\varphi_2\, y + \cos\varphi_3\, z + \varrho = 0. \tag{11.22}$$

Die Koordinaten des Einheitsvektors $\overrightarrow{n_E}$ nennt man *Richtungskosinuse* der Normalenrichtung der Ebene.

Beweis. Durch den Ursprung O sei der zu $\overrightarrow{n_E}$ gleichsinnig kollineare Strahl $l^{\rightarrow}$ gezogen. Derselbe treffe E in F (Fig.12.8). Dann ist

$$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{FO} = -\varrho\,\overrightarrow{n_E} = \overline{OF}\,\overrightarrow{n_E}.$$

Falls $P(x, y, z)$ einen beliebigen auf E liegenden Punkt bezeichnet, so ist

$$\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{n_E} = Pr_{\overrightarrow{n_E}}\overrightarrow{OP} = \overline{OF} = -\varrho$$

und außerdem

$$\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{n_E} = \cos\varphi_1\, x + \cos\varphi_2\, y + \cos\varphi_3\, z.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt (11.22).

□

Ist eine Ebene E durch ihre allgemeine Gleichung $ux + vy + wz + r = 0$ gegeben, so erhält man von dieser, nach Division durch $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, eine Hessesche Normalenform der Ebenengleichung:

$$\frac{ux + vy + wz + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0.$$

Satz 12.9. *Wenn eine orientierte Ebene E im Raum durch eine Hesse-Normalenform-Gleichung $ax + by + cz + \varrho = 0$ gegeben ist, so stellt der Ausdruck $ax_0 + by_0 + cz_0 + \varrho$ den orientierten Abstand eines beliebigen Punktes $P(x_0, y_0, z_0)$ von E dar.*

Beweis. (Fig. 12.9) Durch den Koordinatenursprung O sei der Strahl $l^{\rightarrow} \parallel \overrightarrow{n_E}$ gezogen. Derselbe treffe E in F. Ferner sei P' die senkrechte Projektion des Punktes P auf diesen Strahl. Dann ist $\overline{FP'} = \delta(P, E)$. Nun ist aber $\overline{FP'} = \overline{OP'} - \overline{OF}$ und $\overline{OF} = -\varrho$. Andererseits ist $\overline{OP'} = \overrightarrow{OP'}\,\overrightarrow{n_E} = ax_0 + by_0 + cz_0$ und also $\overline{FP'} = ax_0 + by_0 + cz_0 + \varrho$.

□

Wenn eine Ebene E durch ihre allgemeine Gleichung $ux + vy + wz + r = 0$ gegeben ist, so erhält man den orientierten Abstand eines gegebenen Punktes $P(x_0, y_0, z_0)$ von E durch den Ausdruck

$$\frac{ux_0 + vy_0 + wz_0 + r}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Zusatz 12.10. *In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei einanderschneidende Ebenen $E_1: \cos\alpha_1\, x + \cos\alpha_2\, y + \cos\alpha_3\, z + \varrho_1 = 0$ und $E_2: \cos\beta_1\, x + \cos\beta_2\, y + \cos\beta_3\, z + \varrho_2 = 0$ mit ihren Hesse-Normalenform-Gleichungen gegeben. Es sei $\overrightarrow{n_1}(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ bzw. $\overrightarrow{n_2}(\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$ der normale Einheitsvektor von E_1 bzw. E_2.*

Ist $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} < 0$, so ist der Vektor $(\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2})$ senkrecht zu der Halbierungsebene des **stumpfen** *Winkels zwischen E_1 und E_2 (Fig. 12.10).*

Die allgemeine Gleichung der Halbierungsebene des stumpfen Winkels ist

$$(\cos\alpha_1 + \cos\beta_1)x + (\cos\alpha_2 + \cos\beta_2)y + (\cos\alpha_3 + \cos\beta_3)z + (\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

Ist dagegen $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} > 0$, so ist der Vektor $(\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2})$ senkrecht zu der Halbierungsebene des **spitzen** *Winkels zwischen E_1 und E_2 (Fig. 12.11).*

Die allgemeine Gleichung der Halbierungsebene des spitzen Winkels ist

$$(\cos\alpha_1 + \cos\beta_1)x + (\cos\alpha_2 + \cos\beta_2)y + (\cos\alpha_3 + \cos\beta_3)z + (\varrho_1 + \varrho_2) = 0.$$

12.4. **Bedingungen für das Parallelsein und Schneiden zweier Ebenen.** Dank der Theorie für die Lösungsmengen von LGS, kann man folgende Sätze beweisen.

Satz 12.11. *Hat man ein und dieselbe Ebene E durch zwei verschiedene Gleichungen ersten Grades zwischen den Koordinaten (x, y, z) eines beweglichen Punktes dargestellt*

$$(i) \quad ux + vy + wz + r = 0 \quad \wedge \quad (ii) \quad u'x + v'y + w'z + r' = 0,$$

so geht jede dieser Gleichungen aus der anderen durch Multiplikation mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor hervor.

Satz 12.12. *Damit zwei verschiedene Ebenen $E: \ ux+vy+wz+r = 0$ und $E': \ u'x+v'y+w'z + r' = 0$ parallel seien, ist es notwendig und hinreichend, daß die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix $\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}$ sämtlich gleich Null sind.*

Ist das Koordinatensystem **kartesisch**, so sind $\overrightarrow{n_E}(u, v, w)$ und $\overrightarrow{n'_{E'}}(u', v', w')$ die Normalenvektoren von E bzw. E'. Die geometrische Deutung des letzten Satzes ist dann:

Damit zwei verschiedene Ebenen E und E' parallel seien, ist es notwendig und hinreichend, daß $\overrightarrow{n_E} \parallel \overrightarrow{n'_{E'}}$ gilt.

Satz 12.13. *Damit zwei Ebenen $E: \ ux+vy+wz+r = 0$ und $E': \ u'x+v'y+w'z+r' = 0$ einander schneiden, ist es notwendig und hinreichend, daß die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix $\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix}$ nicht sämtlich gleich Null sind.*

Ist das Koordinatensystem **kartesisch**, so sind $\overrightarrow{n_E}(u, v, w)$ und $\overrightarrow{n'_{E'}}(u', v', w')$ die Normalenvektoren von E bzw. E'. Die geometrische Deutung des letzten Satzes ist dann:

Damit zwei Ebenen E und E' einander schneiden, ist es notwendig und hinreichend, daß $\overrightarrow{n_E} \nparallel \overrightarrow{n'_{E'}}$ gilt.

Zusatz 12.14. *Es seien $E: \ ux + vy + wz + r = 0$ und $E': \ u'x + v'y + w'z + r' = 0$ die allgemeinen Gleichungen von zwei Ebenen bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $K = Oxyz$. Da die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n'_{E'}}$ bzw. die Ebenen E und E' stets dieselben Winkel einschließen, so erhält man*

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_E}\overrightarrow{n'_{E'}}}{|\overrightarrow{n_E}||\overrightarrow{n'_{E'}}|} = \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} = \cos\angle(E, E').$$

Es ist also $\quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; uu' + vv' + ww' = 0.$

12.5. **Die Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen.** Je zwei einander schneidende Ebenen haben als Schnittlinie eine Gerade.

Sind $ux + vy + wz + r = 0$ und $u'x + v'y + w'z + r' = 0$ die allgemeinen Gleichungen zweier einander schneidenden Ebenen E und E' und ist g ihre Schnittgerade, so sind die

Koordinaten (x, y, z) eines jeden Punktes auf g Lösung dieser Gleichungen und umgekehrt, jede Lösung (x, y, z) dieser Gleichungen bestimmt einen Punkt auf g.

Die analytische Darstellung der Geraden g als Schnittlinie der Ebenen E und E' ist durch folgendes LGS gegeben:

$$(11.23) \qquad g: \quad \left| \begin{array}{l} ux + vy + wz + r = 0, \\ u'x + v'y + w'z + r' = 0. \end{array} \right.$$

Jede Gerade g des Raums kann **in mannigfach verschiedener** Weise als Schnittlinie zweier Ebenen angesehen und durch ein System von zwei linearen Gleichungen dargestellt werden.

Sind E_1, E_2 zwei beliebige dieser Ebenen und sind $\overrightarrow{n_1}$ bzw. $\overrightarrow{n_2}$ Normalenvektoren von E_1 bzw. E_2, so gilt stets $g \parallel \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

Ist das Koordinatensystem **kartesisch** und ist $P(x_0, y_0, z_0)$ eine konkrete Lösung von (11.23), so hat $g\,\{\ni P, \parallel \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}\}$ (Fig. 12.12) folgende *Koordinatengleichungen*:

$$g: \quad x = x_0 + \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} \lambda, \quad y = y_0 + \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix} \lambda, \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \lambda; \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 12.15. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $Oxyz$ im Raum sind die Punkte

$$A(3,1,4),\ B(2,1,3),\ C(1,2,-1),\ D(0,-3,2),$$

die Ebene

$$\beta:\ x + y - z + 1 = 0$$

und die Gerade

$$l:\ x = -2 + \mu,\ y = 3 + \mu,\ z = 4 - \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$$

gegeben. Bestimmen Sie analytisch:

(a) Die Ebene $\alpha\,\{\ni A, \ni B, \ni C\}$.

Lösung. (Fig. 12.13)

I. Es sei $M(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt in α. Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ sind dann und nur dann komplanar, wenn ihre Koordinatendeterminante gleich Null ist.

Da $\overrightarrow{AB}(-1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-2, 1, -5)$, $\overrightarrow{AM}(x-3, y-1, z-4)$ gilt, so ist

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

d.h. die allgemeine Gleichung der Ebene ist

$$\alpha:\ x - 3y - z + 4 = 0.$$

II. Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht kollinear sind, so ist

$$\overrightarrow{AM} = s_1\overrightarrow{AB} + s_2\overrightarrow{AC},\ s_1 \in \mathbb{R}, s_2 \in \mathbb{R}$$

und demzufolge

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + s_1\overrightarrow{AB} + s_2\overrightarrow{AC},\ s_1,\ s_2 \in \mathbb{R},$$

oder

$$\overrightarrow{OM} = (1 - s_1 - s_2)\overrightarrow{OA} + s_1\overrightarrow{OB} + s_2\overrightarrow{OC},\ s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Koordinatengleichungen der Ebene sind:

$$\alpha : \left| \begin{array}{llll} x = 3 & -s_1 & -2s_2, & \\ y = 1 & & +s_2, & \\ z = 4 & -s_1 & -5s_2, & s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

$III.\quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(1,-3,-1) =: \overrightarrow{n_\alpha}\ \ (\perp\ \alpha)\ \Rightarrow\ 1.x - 3.y - 1.z + r = 0.$

$\alpha \ni A:\ 1.3 - 3.1 - 1.4 + r = 0\ \Rightarrow\ r = 4\ \Rightarrow\ \alpha:\ x - 3y - z + 4 = 0.$

(b) die Gerade $h\{\ni D,\ \perp\ \alpha\}$.
Lösung. $\overrightarrow{n_\alpha}(1,-3,-1)\ \perp\ \alpha\ \Rightarrow\ h\ \|\ \overrightarrow{n_\alpha}\ \Rightarrow\ h\{\ni D,\ \|\ \overrightarrow{n_\alpha}\}\ \Rightarrow$

$$h : \left| \begin{array}{rrcl} x = & 0 & + & s.1, \\ y = & -3 & + & s.(-3), \\ z = & 2 & + & s.(-1),\ s \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

(c) den Schnittpunkt D_0 von h und α (Fig. 12.14).
Lösung. $D_0(x_0, y_0, z_0) \in h\ \wedge\ D_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha\ \Rightarrow$

$$x_0 = s,\ y_0 = -3 - 3s,\ z + 0 = 2 - s;\ x_0 - 3y_o - z_0 + 4 = 0\ \Rightarrow\ s = -1\ \Rightarrow$$

$$D_0(-1, 0, 3).$$

(d) das Spiegelbild D' von D bezüglich α.
Lösung. $D' \in h\ \wedge\ \overrightarrow{DD_0} = \overrightarrow{D_0D'}$, d.h. $\overrightarrow{OD_0} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD'})\ \Rightarrow$
$\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OD_0} - \overrightarrow{OD}\ \Rightarrow\ D'(-2, 3, 4).$

(e) die Ebene $\gamma\{\ni D,\ \|\ \beta\}$.
Lösung. $\gamma\ \|\ \beta\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_\gamma}\ \|\ \overrightarrow{n_\beta}(1,1,-1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_\beta}\ \perp\ \gamma\ \Rightarrow\ \gamma:\ x + y - z + r = 0.$
$\gamma \ni D:\ 1.0 + 1.(-3) - 1.2 + r = 0\ \Rightarrow\ r = 5\ \Rightarrow\ \gamma:\ x + y - z + 5 = 0.$

(f) den Vektor $\overrightarrow{\nu}\{\|\ \alpha,\ \|\ \beta\}$.
Lösung. (Fig. 12.15)
$\overrightarrow{\nu}\ \|\ \alpha\ \wedge\ \overrightarrow{\nu}\ \|\ \beta\ \Rightarrow\ \overrightarrow{\nu}\ \perp\ \overrightarrow{n_\alpha}(1,-3,-1)\ \wedge\ \overrightarrow{\nu}\ \perp\ \overrightarrow{n_\beta}(1,1,-1)$
$\Rightarrow\ \overrightarrow{\nu}\ \|\ \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta}(4,0,4)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{\nu}(1,0,1).$

(g) die Schnittlinie m von α und β.
Łösung. $\overrightarrow{\nu}\ \|\ Oxz\ \Rightarrow\ m\ \|\ Oxz\ \Rightarrow\ m \cap Oxy = \alpha \cap \beta \cap Oxy = M(-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{4}, 0).$
$m\{\ni M,\ \|\ \overrightarrow{\nu}\}\ \Rightarrow\ m:\ x = -\dfrac{7}{4} + t,\ y = \dfrac{3}{4},\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.$

(h) die Ebene $\delta\{\ni A,\ \perp\ m\}$.

(i) die Ebene $\epsilon\{\supset\ l,\ \|\ m\}$.
Lösung. Der Punkt $L(-2, 3, 4)$ liegt auf l, der Vektor $\overrightarrow{l}(1,1,-1)$ ist zu l bzw. der Vektor $\overrightarrow{\nu}(1,0,1)$ ist zu m parallel. Daraus folgt

$$\overrightarrow{n_\epsilon}\ \|\ \overrightarrow{l} \times \overrightarrow{\nu}(1,-2,-1)\ \wedge\ \epsilon\{\ni L,\ \perp\ \overrightarrow{l} \times \overrightarrow{\nu}\}\ \Rightarrow\ \epsilon:\ x - 2y - z + 12 = 0.$$

(j) die Ebene $\pi\{\supset l,\ \perp\alpha\}$ (Fig. 12.16).
Lösung. $L(-2,3,4)\in l \Rightarrow L\in\pi,\quad \overrightarrow{l}(1,1,-1)\parallel l \Rightarrow \overrightarrow{l}\parallel\pi,$

$$\overrightarrow{n_\alpha}\perp\alpha \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\parallel\pi \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{l}\perp\pi \Rightarrow \pi:\ x+z-2=0.$$

(k) die Ebene $\eta\{\ni D,\ \supset l\}$.
Lösung. $L\in l \wedge \overrightarrow{l}\parallel l \Rightarrow \overrightarrow{l}\parallel\eta \wedge \overrightarrow{LD}\parallel\eta \Rightarrow \overrightarrow{LD}\times\overrightarrow{l}\perp\eta \Rightarrow$
$\eta:\ x+z-2=0.$

Aufgabe 12.16. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems im Raum sind der Punkt $M(-1,1,2)$ und die Gerade

$$a:\left|\begin{array}{l} x-y+1=0,\\ x-z-2=0\end{array}\right.$$

gegeben. Bestimmen Sie analytisch:

(a) die Gerade $l\{\ni M,\ \parallel a\}$.
Lösung. Es seien $\alpha_1:\ x-y+1=0$ und $\alpha_2:\ x-z-2=0$ die beiden Ebenen, dessen Schnittlinie a ist. Dann sind die Vektoren $\overrightarrow{n_1}(1,-1,0)\perp\alpha_1$, $\overrightarrow{n_2}(1,0,-1)\perp\alpha_2$ und $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}(1,1,1)\parallel a$. Daraus folgt, daß $l\{\ni M,\ \parallel\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}\}$ ist, d.h.

$$l:\ x=-1+s,\ y=1+s,\ z=2+s,\ s\in\mathbb{R}.$$

(b) die Ebene $\beta\{\supset a,\ \supset l\}$.
Lösung. $\overrightarrow{a}(1,1,1)\parallel a\parallel l \wedge A(0,1,-2)\in a \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-1,0,4)\nparallel a \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{a}(-4,5,-1)\perp\beta \Rightarrow \beta\{\ni M,\ \perp\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{a}\}:\ 4x-5y+z+7=0.$$

(c) den Abstand des Punktes M von der Geraden a.
Lösung. (Fig. 12.17) $a\{\ni A,\ \parallel\overrightarrow{a}\} \Rightarrow a:\ x=\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=-2+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}.$
Ein beliebiger Punkt N auf a hat die Koordinaten $(\lambda,1+\lambda,-2+\lambda)$. Wir suchen diesen konkreten Punkt N_0 auf a, d.h. diesen konkreten Wert λ_0 von λ, so daß $\overrightarrow{MN_0}\perp a$ ist. Es gilt:
$\overrightarrow{MN_0}(\lambda_0+1,\lambda_0,\lambda_0-4) \wedge \overrightarrow{a}(1,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{MN_0}.\overrightarrow{a}=\lambda_0+1+\lambda_0+\lambda_0-4=0 \Rightarrow$
$\lambda_0=1 \Rightarrow N_0(1,2,-1) \Rightarrow |\overrightarrow{MN_0}|=\sqrt{14}.$

Aufgabe 12.17. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems im Raum sind der Punkt $M(1,2,3)$ und die Gerade $l:\ x=-2s,\ y=2-4s,\ z=3+s,\ s\in\mathbb{R}$, gegeben. Bestimmen Sie das Spiegelbild M' von M bezüglich l.

Aufgabe 12.18. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind der Punkt $M(1,1,1)$ und die Ebenen $\alpha:\ x+z+2=0$ und $\beta:\ x-y+1=0$ gegeben. Bestimmen Sie die orientierten Abstände des Punktes M von α und β. In welchem (im spitzen oder im stumpfen) der Winkel zwischen α und β liegt der Punkt M (Fig. 12.18)?

Lösung. Es seien

$$\alpha:\ \frac{x+z+2}{\sqrt{2}}=0,\quad \beta:\ \frac{x-y+1}{\sqrt{2}}=0$$

Hessesche Normalenformen der Ebenengleichungen von α bzw. β. Dann sind

$$\delta(M,\alpha)=\frac{4}{\sqrt{2}}>0,\quad \delta(M,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0;$$

$$\overrightarrow{n_\alpha}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \perp \alpha,\ \overrightarrow{n_\beta}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \perp \beta \wedge \overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta} = \frac{1}{2} > 0.$$

Der Punkt M liegt also im stumpfen Winkel zwischen α und β. Die allgemeine Gleichung der Winkelhalbierenden dieses Winkels ist:

$$\frac{x+z+2}{\sqrt{2}} - \frac{x-y+1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow y+z+1=0.$$

Aufgabe 12.19. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(12,1,4)$, $B(4,5,-4)$ und $C_k(k, 4k-5, k+4)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß die Punkte A, B und C_k für alle $k \in \mathbb{R}$ ein Dreieck bilden.

(b) Weisen Sie nach, daß C_k in der Symmetrieebene der Punkte A und B liegt. Welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Dreieck ABC_k?

(c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_k liegen. Welche Beziehung haben die Richtung von g und die Richtung der Geraden AB zueinander?

(d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABC_2C_0.

(e) E_0 ist eine Ebene, die die Punkte A, B und C_0 enthält. Ermitteln Sie eine Gleichung von E_0 in Normalenform.

(f) Zeigen Sie, daß sich die Ebene E_0 und die Gerade g unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ schneiden.

(g) Für $k \neq 0$ ist F_k der Fußpunkt des Lotes von C_k auf E_0. Berechnen Sie die Koordinaten von F_k. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, daß F_k von C_0 und C_k gleich weit entfernt ist.

(h) Für welchen Wert von k ist der Fußpunkt F_k von C_0 und A gleich weit entfernt? Welche besondere Eigenschaft hat für dieses k der Fußpunkt F_k für die Pyramide ABC_0C_k?

Aufgabe 12.20. Die Punkte $A(2,1,0)$, $B(0,6,-1)$, $C(-2,4,1)$, $D(1,3,7)$ bestimmen eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie:

(a) den Abstand des Punktes D von der Ebene (ABC).

(b) den Abstand des Punktes C von der Geraden AB.

(c) das Volumen der Pyramide $ABCD$.

(d) die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

(e) die Neigungswinkel der Kanten AD, BD, CD gegen die Ebene (ABC).

(f) die Neigungswinkel der Ebenen (ABD), (ACD), (BCD) gegen die Ebene (ABC).

Aufgabe 12.21. Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$l: x = 7+s, \quad y = 3+2s, \quad z = 9-s, \quad s \in \mathbb{R};$$

$$m: x+2y+z-6=0, \quad x+5y-z-7=0.$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Geraden l und m. Das Koordinatensystem ist kartesisch.

Aufgabe 12.22. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Vektoren $\overrightarrow{a}(4,0,-2)$, $\overrightarrow{b}(4,\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ und $\overrightarrow{c}(2,-2,-3)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß sich $\overrightarrow{c}$ eindeutig als Linearkombination von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ darstellen läßt und daß $\overrightarrow{c}$ und $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ linear unabhängig sind.

(b) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$ sind die Ortsvektoren der Punkte A, B und C. Begründen Sie, daß sich die Geraden $g=AB$ und $h=OC$ in genau einem Punkt schneiden.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und h.

(c) Geben Sie eine vektorielle Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C an.

(d) Zeigen Sie, daß $D(a,1,1-\frac{1}{2}a)$ mit $a\in\mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl von a in der Ebene E liegt.

(e) M ist der Mittelpunkt von $\overrightarrow{AC}$. Wie muß a gewählt werden, damit B, M und D auf einer Geraden liegen?

(f) Geben Sie für die Ebene E eine Gleichung in Normalenform an.

(g) Bestimmen Sie für den Punkt $P(6,3,-9)$ den Bildpunkt P' bei einer Spiegelung an E.

Aufgabe 12.23. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(-4,3,7)$, $B(3,2,4)$, $C(0,-1,1)$. Das Koordinatensystem ist kartesisch.

(a) Zeigen Sie, daß die Gerade $g:\ x=2-3\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=3+2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ die Höhe h_a dieses Dreiecks ist.

(b) Welchen Winkel schließt die Gerade g mit der Dreieckseite AB ein?

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden k durch $D(5,0,1)\in g$, die auf g senkrecht steht und der durch A, B und C aufgespannten Ebene angehört.

Aufgabe 12.24. Durch die Punkte $A(0,3,6)$, $B(1,2,-6)$ und $C(-9,-2,2)$ ist die Ebene E festgelegt. Außerdem sind der Punkt $P(5,4,0)$ und die Gerade $g:\ x=-\tau,\ y=4,\ z=5+\tau,\ \tau\in\mathbb{R}$ gegeben. Das Koordinatensystem ist kartesisch.

(a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E.

(c) Weisen Sie nach, daß der Punkt P auf der Geraden g liegt und berechnen Sie die Länge der Strecke (SP).

(d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

(e) Berechnen Sie die Koordinaten des zu P symmetrischen Punktes P' bezüglich der Ebene E.

Aufgabe 12.25. Gegeben sind die Gerade $g:\ x_1=-4\lambda,\ x_2=3+\lambda,\ x_3=-5+3\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, und die Ebene $E_1:\ x_1-2x_2+2x_3-2=0$. Das Koordinatensystem ist kartesisch.

(a) Geben Sie eine Notmalengleichung der Ebene E_2 an, die durch g verläuft und auf der x_1x_2-Ebene senkrecht steht.

(b) Bestimmen Sie Gleichungen der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

(c) Zeigen Sie, daß g parallel zu E_1 ist.

(d) Welchen Abstand besitzt g von E_1?

(e) Geben Sie Gleichungen der Geraden h an, die durch Spiegelung von g an E_1 entsteht.

Aufgabe 12.26. Gegeben ist der Punkt $P(0,5,1)$ und die drei Geraden $g_1 : x = 1 + 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = 1 + 3\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$; $g_2 : x = 2 - 4\sigma,\ y = -2 + 2\sigma,\ z = 2 - 6\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R}$; $g_3 : x = 5 + \mu,\ y = 2 - \mu,\ z = 3\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß g_1 und g_2 parallel sind.

(b) Geben Sie die Ebene E_1 durch g_1 und g_2 in Parameter- und Normalenform an.

(c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_2 durch g_3 an, die auf E_1 senkrecht steht.

(d) Berechnen Sie die Schnittmenge von E_1 und E_2.

(e) Welche Punkte auf g_2 haben von P eine Entfernung von $2\sqrt{66}$?

(f) Welchen Abstand hat der Punkt P von der Geraden g_1?

Aufgabe 12.27. Gegeben sind die Punkte $M(5,4,-1)$ und $D(7,8,-5)$, die Ebene $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ und die Gerade $g : x_1 = 3 - 2t,\ x_2 = 6 + 2t,\ x_3 = t;\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Stelle die Gleichung der Ebene E_1 in Parameterform und in Koordinatenform auf, die die Gerade g und den Punkt D enthält.

(b) Zeige, daß die Ebenen E und E_1 parallel zueinander liegen.
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E_2, die parallel zu E und E_1 verläuft und von den beiden Ebenen den gleichen Abstand hat.

(c) Zeige, daß M auf der Geraden g liegt und daß D nicht zu g gehört.
Berechne $d = |DM|$ und zeige, daß DM auf g senkrecht steht.
Bestimme die Koordinaten der Punkte A und C, die auf g liegen und für die gilt $|MA| = |MC| = d$.
Bestimme die Koordinaten des Punktes B so, daß $ABCD$ ein Parallelogramm darstellt.

(d) Bestimme die Schnittpunkte der Ebene E_1 mit der x_1-Achse und der x_2-Achse. Nenne diese Schnittpunkte S_1 und S_2.
Sei nun OS_1S_2 die Grundfläche einer Pyramide, wobei $O(0,0,0)$ ist; außerdem sei $S(a,0,b)$ mit $b > 0$ die Spitze der Pyramide. Bestimme die Gleichung der Geraden, auf der alle Punkte S liegen, wenn die Pyramide das Volumen $V = 72$ Volumeneinheiten haben soll. Beschreibe die Lage dieser Geraden.

Aufgabe 12.28. Gegeben sind der Punkt $A(7,4,5)$ und die beiden Geraden $g : x_1 = 2 - r,\ x_2 = 2 + 2r,\ x_3 = 1,\ r \in \mathbb{R}$ und $h : x_1 = 1 + ts,\ x_2 = 3 + s,\ x_3 = -4 + s,\ s \in \mathbb{R}$.

(a) Stelle die Gleichung der Ebene E durch g und A in Parameter- und in Koordinatenform auf.

(b) Für welchen Wert des Parameters t sind g und h orthogonal? Sind sie dann windschief oder schneiden sie sich?

(c) Untersuche, für welchen Wert von t die Gerade h parallel zu E verläuft.

(d) Es sei $t = 1$. Stelle die Gleichung der Ebene H auf, die h enthält und parallel zu E verläuft.

(e) Es sei $t = 1$. Berechne den Abstand zwischen den Ebenen E und H.

(f) Es sei $t = 1$. Gegeben ist die Ebene $F: \ y - 2z = 1$. Bestimme eine Parametergleichung von F. Welche besondere Lage hat die Ebene F?

(g) Es sei $t = 1$. Zeige, daß die Ebenen E und H die Ebene F in parallelen Geraden schneiden.

(h) Bestimme Gleichungen der Schnittgerade s von E mit der xy-Ebene.

(i) Zeige, daß der Punkt $B(0, 3, 0)$ auf s liegt und bestimme einen Punkt C auf s so, daß das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat.

(j) Es sei $t = 1$. Das Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt aus H bilden eine dreiseitige Pyramide. Berechne das Volumen dieser Pyramide.

(k) Es sei $t = 1$. Bestimme die Punkte auf h, die den Abstand $7\sqrt{2}$ von A haben.

Aufgabe 12.29. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1, 2, 3)$, $B(5, 0, -1)$ und $D(-1, 6, -1)$, die Geraden $g: \ x_1 = 6 - 2s,\ x_2 = 7 + s,\ x_3 = 1 + 2s,\ s \in \mathbb{R}$ und $h: \ x_1 = 6 + 5t,\ x_2 = 7 + 5t,\ x_3 = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: \ 10x_1 + 4x_2 - x_3 - 51 = 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß es einen Punkt C gibt, für den das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, und bestimmen Sie die Koordinaten von C.

Das Quadrat $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Höhe 6; der Fußpunkt der Höhe ist der Mittelpunkt dieses Quadrates. Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Pyramidenspitzen S und S'.

(b) Welchen Winkel bilden die Seitenflächen der Pyramiden $ABCDS$ und $ABCDS'$ mit der Grundfläche? Welchen Winkel schließen zwei benachbarte Seitenflächen ein?

(c) Die Ebene E enthält den Punkt B und den Punkt C und zerschneidet die Pyramide $ABCDS$ in zwei Teilkörper. Zeigen Sie, daß die Schnittfläche ein gleichschenkliges Trapez ist.

Berechnen Sie das Volumen des Teilkörpers mit der Spitze S.

(d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Zeigen Sie, daß sich das Volumen der Pyramide nicht ändert, wenn ihre Spitze auf der Geraden g wandert.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S^* auf der Geraden h so, daß das Volumen V^* von jeder der Pyramiden $ABCDS^*$ doppelt so groß wird wie das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

(e) Die Pyramide $ABCDS$ besitzt eine Inkugel; diese berührt also die Grundfläche und alle vier Seitenflächen der Pyramide. Der Pyramide wird ein möglichst großer Kreiskegel mit der Spitze S einbeschrieben. Begründen Sie, daß die Inkugel der Pyramide sowohl den Mantel des Kegels, als auch seine Grundfläche berührt.

Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, in denen die Inkugel den Kegel berührt.

Aufgabe 12.30. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0, 0, -4)$, $B(4, 0, 0)$ und $C_t(t - 8, t, t - 8)$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß die Punkte A, B und C_t für jedes t ein Dreieck bestimmen und daß dieses Dreieck den Flächeninhalt $2\sqrt{2t^2 + 16}$ hat.

(b) Geben Sie an, für welchen Wert von t der Flächeninhalt minimal wird. Erläutern Sie, wie man mit diesem Ergebnis ermitteln kann, für welchen der Punkte C_t der Abstand von der Geraden AB minimal ist. Geben Sie diesen minimalen Abstand an.

(c) Die Punkte A, B und C_t liegen in einer Ebene E_t. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Normalenform auf.

(d) Zeigen Sie, daß die Ebenen E_t und E_{t^*} genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn gilt $t\,t^* = -8$. Zu welcher Ebene der Schar existiert keine senkrechte Ebene in der Schar?

(e) Zwei zueinander senkrechte Ebenen E_t und E_{t^*} schneiden die x_2-Achse in den Punkten S_t und S_{t^*}. Berechnen Sie die Streckenlänge $|S_tS_{t^*}|$ und ermitteln Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, für welche Werte von t diese Streckenlänge minimal wird.

(f) Die Mittelpunkte aller Kugeln durch die Punkte A, B und den Ursprung O liegen auf einer Geraden. Geben Sie Gleichungen dieser Geraden in Parameterform an. Für welche beiden Mittelpunkte beträgt der Kugelradius $\sqrt{24}$?

(g) A, B, O und C_t, $t \neq 0$ bilden eine Pyramide. Bestimmen Sie C_t so, daß die Kugel mit Mittelpunkt $M_1(2, 4, -2)$ und Radius $\sqrt{24}$ Umkugel dieser Pyramide ist.

(h) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABOC_8$.

13. Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme

Alle Punkte einer Geraden sind Elemente eines eindimensionalen Raums, alle Punkte einer Ebene sind Elemente eines zweidimensionalen Raums, alle Punkte des physischen Raums sind Elemente eines dreidimensionalen Raums. Nach Festlegung eines geeigneten Koordinatensystems (meist kartesisches), kann man solche Punktmengen als Mengen reeller Zahlen, Zahlenpaaren bzw. Zahlentripeln darstellen und umgekehrt diese letzten als Punktmengen im betreffenden Raum veranschaulichen.

Dies ist so einfach und bequem, daß die *geometrische* Bezeichnung "Punkt im ein-, zwei- bzw. dreidimensionalen Raum" und der *arithmetische* Begriff "reelle Zahl, reelles Zahlenpaar bzw. Zahlentripel" als ganz synonym nebeneinander gebraucht werden, unterschiedslos das eine für das andere eingesetzt werden dürfte.

Gerade deswegen ist es üblich, bei Betrachtungen, in denen gleichzeitig mehrere voneinander unabhängige Veränderliche vorkommen, in entsprechender Weise geometrische Redewendungen zu gebrauchen.

Allgemein nennt man, wenn n eine (fest gewählte) natürliche Zahl ist, die Gesamtheit aller geordneten n-tupel reeller Zahlen $\{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)\}$ den *n-dimensionalen Raum* oder kurz $\mathbb{R}^n$. Jedes einzelne dieser n-tupel nennt man eine *Stelle* oder einen *Punkt* in diesem n-dimensionalen Raum.

Die Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ selbst bezeichnet man als die *Koordinaten*, und zwar der Reihe nach als erste, zweite, ..., n-te Koordinate dieses Punktes. Gibt man dem Punkt den Namen P, so spricht man von dem Punkt $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Besonders bequem ist hier die vektorielle Schreibweise, bei der man diesen Punkt durch den vom Anfangspunkt O zu ihm führenden *Radiusvektor* $\overrightarrow{OP}$ bezeichnet. Den Punkt, dessen k-te Koordinate, $1 \leq k \leq n$, den Wert 1 hat, während alle anderen $= 0$ sind, bezeichne man mit E_k. Es ist dann

$$\overrightarrow{OP} = x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2} + ... + x_n\overrightarrow{OE_n}$$

und man sagt darum, daß die n Vektoren $\overrightarrow{e_k} \ni \overrightarrow{OE_k}$ den $\mathbb{R}^n$ *aufspannen*.

Während in den Fällen $n = 1, 2, 3$ der n-dimensionale Raum als Gerade, Ebene und gewöhnlicher (physischer) Raum durch die Anschauung unmittelbar erfaßt werden kann, ist das für $n > 3$ nicht mehr möglich. Trotzdem können manche geometrische Begriffe auf Räume von mehr als drei Dimensionen ausgedehnt werden.

Wir wenden uns linearen Gleichungen mit n Variablen zu:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b.$$

Ihre Graphen heißen in der Analytischen Geometrie *Hyperebenen* im $\mathbb{R}^n$, sie sind Punktmengen im $\mathbb{R}^n$.

Für $n = 2$ sind mit $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ die Geraden Hyperebenen des $\mathbb{R}^2$, d.h. der Ebene.

Für $n = 3$ sind mit $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ die Ebenen Hyperebenen des $\mathbb{R}^3$, d.h. des gewöhnlichen (physischen) Raums.

Die Hyperebenen haben folgende grundlegende Eigenschaft:

Sie teilen für jedes $n \in \mathbb{N}$ *den* $\mathbb{R}^n$ *in drei disjunkte Teilmengen auf*:

$$M_0 = \{P \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\};$$
$$M_1 = \{P \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b\};$$
$$M_2 = \{P \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < b\}.$$

M_0 ist die Hyperebene selbst, M_1 und M_2 heißen die von der Hyperebene M_0 begrenzten (offenen) *Halbräume* des $\mathbb{R}^n$.

Aussageformen der Art

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \gtrless b$$

werden *lineare Ungleichungen* genannt. Halbräume kann man somit als Lösungsmengen linearer Ungleichungen erklären.

Die Konjunktion linearer Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \le b_1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \le b_2, \ ... \ , \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \le b_m$$

bildet ein *lineares Ungleichungssystem*.

Bezeichne man $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, so ist $AX \le B$ die Matrixform des linearen Ungleichungssystems.

Jeder "Vektor" X (jede Spaltenmatrix), welcher **alle** Ungleichungen des Systems erfüllt, heißt *Lösungsvektor* oder kurz Lösung des Systems. Die "Spitze" eines Lösungsvektors muß demnach im Durchschnitt aller durch die einzelnen Ungleichungen bestimmten Halbräume liegen.

Beispiel 13.1. Die Ungleichungen des Systems $AX \le B$:

$$\left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 - 2x_2 \le -10 \end{array} \right.$$

sind miteinander **unverträglich** (Fig. 13.1). Es gibt keinen Punkt $P(x_1, x_2)$, welcher in allen drei Halbebenen (Halbräumen des $\mathbb{R}^2$) zugleich liegt. Die Lösungsmenge ist $L = \emptyset$.

Falls die Ungleichungen des Systems $AX \leq B$ miteinander **verträglich** sind, so hat das Ungleichungssystem wenigstens einen Lösungsvektor.

Beispiel 13.2. $x_1 + x_2 \geq 2,\ 2x_1 - x_2 \geq 2,\ x_2 \geq 0.$
Die Lösungsmenge ist nicht allseitig begrenzt. Man spricht von einer **unbeschränkten** Lösungsmenge (Fig. 13.2).

Beispiel 13.3. $-x_1 + x_2 \leq 2,\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20,\ 8x_1 + 3x_2 \leq 32,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$
Die Lösungsmenge ist ein Polygon (ein konvexes Polygon). Es ist allseits durch eine Hyperebene (Gerade) begrenzt und somit **beschränkt** (Fig. 13.3).

Erklärung 13.4. Eine Punktmenge heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkte auch die Verbindungsstrecke vollständig enthält. Der Durchschnitt konvexer Punktmengen ist sicher wieder konvex (Fig. 13.4).

Beispiel 13.5. $x_1 + 5x_2 \leq 20,\ 3x_1 - x_2 \leq 12,\ x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$
Die ersten beiden Ungleichungen des Systems beeinflussen die Lösungsmenge nicht. Diese ist durch die letzten drei Ungleichungen vollständig bestimmt (Fig. 13.5).

14. Lineare Optimierung

Die lineare Optimierung ist ein Mittel zur mathematischen Lösung zahlreicher technologischer und ökonomischer Probleme. Allgemein versteht man unter *Optimierung* ein Verfahren zur *Maximierung* oder *Minimierung* einer bestimmten Größe , das *Ziel*, unter Berücksichtigung der vorhandenen Möglichkeiten, der *Bedingungen*.

Um ein Optimierungsproblem mit mathematischen Hilfsmitteln lösen zu können, müßen das vorgegebene Ziel und alle einschränkenden Bedingungen durch *mathematische Beziehungen* ausgedrückt werden. Diese mathematische Beziehungen bilden das *mathematische Modell* des realen Prozesses, den sie hinreichend genau widerspiegeln und dessen wesentliche Einflußgrößen sie berücksichtigen müssen.

Die Methode der *linearen Optimierung* wird angewandt, wenn sich ökonomische Prozesse durch *lineare* mathematische Beziehungen darstellen lassen oder auf solche zurückgeführt werden können. Das Zurückführen auf lineare Beziehungen, *Linearisierung*, stellt stets eine Vereinfachung der realen ökonomischen Gegebenheiten dar.

14.1. **Das Modell der linearen Optimierung.** Die lineare Optimierung beschäftigt sich damit, ein vorgegebenes Ziel unter rationellster Ausnutzung der gegebenen Möglichkeiten zu realizieren.

Das Produktionsprogramm eines Betriebes kann beispielsweise unter ganz verschiedenen Zielsetzungen optimiert werden. Solche Zielsetzungen, *Optimierungskriterien*, können sein:

- das Erreichen einer maximalen Kapazitätsauslastung,
- das Erzielen eines maximalen Gewinns,
- die Bestimmung eines minimalen Materialverbrauchs,
- das Erreichen minimaler Selbstkosten, ...

Das zu erreichende Ziel soll möglichst groß oder möglichst klein sein; es soll ein *Optimum* werden. Dieses Optimum kann aber nur unter Einhaltung bestimmter Bedingungen erreicht werden. Solche einschränkenden Bedingungen sind unter anderem: der Arbeitszeitfonds, der Lohnfonds, das Materialkontingent, die Lagerverhältnisse usw.

Diese einschränkenden Bedingungen werden als *System der Nebenbedingungen* bezeichnet.

In das mathematisch-ökonomische Modell müssen außerdem noch die Größen einbezogen werden, auf die sich der Aufwand an Arbeitszeit, Material usw. bezieht. Solche Größen können sein: jedes Erzeugnis, bestimmte Typenvertreter, einzelne Baugruppen usw. Der Verbrauch an den entsprechenden Einsatzgrössen wird stets auf diese Grössen bezogen, beispielsweise geplante Selbstkosten je Erzeugniseinheit, Zeitaufwand oder Materialverbrauch je Baugruppe usw.

Die Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse ist variabel; diese Anzahlen werden als *Variablen* in das Modell aufgenommen.

Beispiel 14.1. Produktionsplanung. Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Erzeugnisse E_1 und E_2 her, für deren Produktion drei unterschiedliche Rohstoffe R_1, R_2, R_3 benötigt werden, die nur in begrenztem Umfang zur Verfügung stehen. Vom Rohstoff R_1 stehen dem Betrieb 32 ME (Mengeneinheiten) zur Verfügung, von R_2 - 20 ME und von R_3 - 24 ME. Um eine ME des Erzeugnisses E_1 herzustellen werden je 4 ME der Rohstoffe R_1 und R_2 benötigt. Zur Produktion einer ME des Erzeugnisses E_2 benötigt man 8 ME von R_1, 2 ME von R_2 und 8 ME von R_3. Eine ME des Erzeugnisses E_1 bringt dem Betrieb einen Gewinn von 20 GE (Geldeinheiten), beim Erzeugnis E_2 beträgt der Gewinn 30 GE je ME.

Wieviel ME muß der Betrieb von den einzelnen Erzeugnissen herstellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

1^{ter} **Schritt**: Zusammenstellung der Daten

Einsatzgrößen	Technische Koeffizienten		Zur Verfügung stehende Rohstoffmengen
	Erzeugnis E_1	Erzeugnis E_2	
Rohstoff R_1	4	8	32
Rohstoff R_2	4	2	20
Rohstoff R_3	0	8	24
Gewinn	20	30	z

2^{ter} **Schritt**: Aufstellen des mathematisch-ökonomischen Modells

Ausgehend von der ökonomischen Problemstellung geht es beim Aufstellen des mathematisch-ökonomischen Modells darum, die angestrebten Ziele und vorhandenen Bedingungen *mathematisch* zu formulieren, sie durch mathematische Relationen auszudrücken. Aus den Zielen der ökonomischen Problemstellung sind *Optimierungskriterien* abzuleiten, die es erlauben, diejenige Größe zu bestimmen, für die das Optimum gesucht wird. Das Optimierungskriterium dient dann zur mathematischen Formulierung des Ziels mit Hilfe der sogenannten *Zielfunktion*.

Im Beispiel ist das Optimum für den Gewinn zu bestimmen. Der Gewinn beträgt je Einheit der Erzeugnisse E_1, E_2 20 bzw 30 GE. Der *Gesamtgewinn*, welcher mit z bezeichnet wird, ist demnach nur von den Anzahlen der herzustellenden Erzeugnisse abhängig, die mit x_1 bzw. x_2 bezeichnet werden sollen. Mathematisch läßt sich der zu erzielende Gewinn durch die Gleichung $z = f(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2$ beschreiben.

Diese Gleichung, die als *analytische Darstellung* einer linearen Funktion das zu erreichende Ziel angibt, ist die *Zielfunktion*. Sie ist zu maximieren.

Die Variablen x_1 und x_2 haben entscheidenden Einfluß auf das angestrebte Ziel. Sie entscheiden mit ihrer Belegung, welchen Wert z annehmen kann. Sie werden deshalb als *Entscheidungsvariablen* bezeichnet. Mit ihrer Belegung wird über die Anzahl der herzustellenden Erzeugnisse entschieden und damit der Gewinn des Betriebes bestimmt.

Das Ziel muß aber unter Einhaltung bestimmter gegebener Bedingungen erreicht werden. Diese *Nebenbedingungen* werden im mathematisch- ökonomischen Modell in der Regel als *System von Ungleichungen* bzw. *Gleichungen* angegeben. Einschränkende Bedingungen, wie begrenzt zur Verfügung stehende Fonds oder beschränkte Absatzmöglichkeiten, die aber in bestimmten Grenzen noch veränderlich sind, werden mathematisch als *Ungleichungen* formuliert. Einschränkende Bedingungen, die das ganze Einhalten eines vorgegebenen Wertes verlangen, werden in mathematisch- ökonomischen Modell mathematisch durch *Gleichungen* ausgedrückt.

Im Beispiel werden die Möglichkeiten für Belegung der Variablen der Zielfunktion durch die technologischen Angaben stark eingeschränkt. Um x_1 Erzeugnisse E_1 herstellen zu können, benötigt man vom Rohstoff R_1 $4x_1$ ME; für x_2 Erzeugnisse E_2 werden entsprechend $8x_2$ ME desgleichen Rohstoffes R_1 benötigt. Die Summe $4x_1 + 8x_2$ darf aber den zur Verfügung stehenden Fonds von 32 ME des Rohstoffes R_1 **nicht** überschreiten. Diese Beziehung läßt sich mathematisch in Form einer Ungleichung ausdrücken:

$$4x_1 + 8x_2 \leq 32.$$

Ebenso ergeben sich die anderen beiden Nebenbedingungen:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 20, \quad 8x_2 \leq 24.$$

Die Anzahlen der herzustellenden Erzeugnisse E_1 bzw. E_2 **können nicht** negative Werte annehmen. Diese *Nichtnegativitätsbedingung* wird im Modell folgendermaßen ausgedrückt:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Das vollständige mathematisch-ökonomische Modell lautet dann:

- Zielfunktion: $z = 20x_1 + 30x_2 \;\rightarrow\; max$
- Nebenbedingungen: $4x_1 + 8x_2 \leq 32,\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20,\ 8x_2 \leq 24$
- Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

3^{ter} **Schritt**: Lösung der Optimierungsaufgabe

4^{ter} **Schritt**: Auswertung der Lösung

In der Praxis der linearen Optimierung treten im allgemeinen Modelle mit mehr als zwei Entscheidungsvariablen auf.

Ihre Anzahl sei gleich $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnet man mit $c_k,\ k = 1, 2, ..., n$ *die Konstanten der Zielfunktion*, so läßt sich allgemein die analytische Darstellung der Zielfunktion mit

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \;\rightarrow\; optimal$$

angeben, deren Maximum oder Minimum gesucht wird.

Werden *die technischen Koeffizienten* allgemein mit a_{ik} und *die Einsatzgrößen* mit b_i bezeichnet, so läßt sich das System der Nebenbedungungen in allgemeiner Form angeben:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right.$$

Die Nichtnegativitätsbedingung lautet in allgemeiner Form:

$$x_k \geq 0, \; k = 1, 2, ..., n.$$

Verwendet man für die Darstellung des Modells der linearen Optimierung die Matrizenschreibweise mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ Koeffizienten-, Problem-, Kennzahlenmatrix,}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} \text{ Zielvektor,} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ Entscheidungs-, Lösungsvektor,}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Erfordernisvektor,} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Nullvektor,}$$

so ergibt sich eine besonders einfache Darstellung.

Im **Normalfall** besteht das System der Nebenbedingungen bei Maximierungsaufgaben nur aus Ungleichungen der Form $\leq$, bei Minimierungsaufgaben nur aus Ungleichungen der Form $\geq$.

In Matrizenschreibweise lautet das Modell der linearen Optimierung im Normalfall allgemein

	Maximierungsprobleme	Minimierungsprobleme
Zielfunktion	$z = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \;\rightarrow\; max$	$z = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \;\rightarrow\; min$
Nebenbedingungen	$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
Nichtnegativitätsbedingung	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

14.2. **Graphische Lösung linearer Optimierungsaufgaben mit zwei Variablen.** Die lineare Optimierungsaufgabe des Beispiels 1.1 soll graphisch gelöst werden.

(1) Es wird das Bild der Lösungsmenge (als *Lösungsbereich* bezeichnet) der einschränkenden Bedingungen graphisch dargestellt. Dazu gehören die inneren und die Randpunkte des Fünfecks $OABCD$ (Fig. 14.1).

(2) Die Koordinaten x_1 und x_2 aller Punkte des Lösungsbereiches liefern, in die Gleichung der Zielfunktion eingesetzt, *zulässige Lösungen* des gegebenen Optimierungsproblems. Aus diesen unendlich vielen zulässigen Lösungen ist nun die optimale Lösung herauszufinden. Dazu wird *die Gleichung der Zielfunktion* in die graphische Darstellung miteinbezogen.

Erklärung 14.2. Geraden, welche ein Niveau des z-Wertes widerspiegeln, werden als *Niveaulinien* bezeichnet.

Z.B. $z = z_1,\ z = z_2, \ldots .$
Von Interesse für die Lösung der linearen Optimierungsaufgabe sind jedoch nur diejenigen Niveaulinien, die mit dem Lösungsbereich $\mathcal{L}$ mindestens einen Punkt gemeinsam haben, also zulässige Lösungen für z angeben.
Alle Niveaulinien verlaufen parallel.
Die Niveaulinien verlaufen senkrecht zu dem Zielvektor $\mathbf{c}$.
Die maximale Lösung für $z = \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ wird sicherlich im Punkt B erreicht ($\overline{OQ} = max = Pr_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{x}$, Fig. 14.2).

Erklärung 14.3. Die Niveaulinie, welche das Optimum bestimmt, heißt *Stützgerade* .

Die Koordinaten des Punktes B liefern, in die Zielfunktion des Beispiels 14.1 eingesetzt, das gesuchte Maximum für z:

$$g_1 : 4x_1 + 8x_2 - 32 = 0,\ g_2 : 4x_1 + 2x_2 - 20 = 0 \ \Rightarrow\ g_1 \cap g_2 = B(4, 2) \ \Rightarrow\ z_{max} = 140.$$

Die Überprüfung der Einhaltung aller einschränkenden Bedingungen (die Auswertung der Lösung) ergibt:

$$4.4 + 8.2 = 32 \leq 32, \quad 4.4 + 2.2 = 20 \leq 20, \quad 8.2 = 16 < 24.$$

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich folgendermaßen interpretieren: Der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 140 GE, wenn er vom ersten Erzeugniss 4 ME und vom zweiten Erzeugnis 2 ME herstellt. Während die Rohstoffe R_1 und R_2 **vollständig** verbraucht werden, besteht beim Rohstoff R_3 eine **Reserve** von 8 ME.

Beispiel 14.4. Für die Aufzucht von Vieh wird eine Mischung von zwei Futtersorten vorgesehen. Eine ME der Futtersorte I enthält 4 ME Kohlehydrate, 4 ME Eiweiße und verursacht 10 GE an Selbstkosten. Eine ME der Futtersorte II enthält 2 ME Kohlehydrate, 8 ME Eiweiße, 8 ME Fette, und die Selbstkosten betragen 12 GE. In der Futtermischung sollen mindestens 12 ME Kohlehydrate, 24 ME Eiweiße und 8 ME Fette vorhanden sein. Wie müßen beide Futtersorten anteilmäßig gemischt werden, damit die Selbstkosten unter den angegebenen Voraussetzungen minimal sind?

Lösung.
1^{ter} **Schritt**: Zusammenstellung der Daten

Einsatzgrößen	Technische Koeffizienten		
	Futtersorte I	Futtersorte II	Futtermischung
Kohlehydrate	4	2	12
Eiweiße	4	8	24
Fette	0	8	8
Selbstkosten	10	12	z

2^{ter} **Schritt**: Aufstellen des mathematisch-ökonomischen Modells
Zielfunktion: $z = 10x_1 + 12x_2 \ \rightarrow\ min$

Einschränkende Bedingungen: $4x_1 + 2x_2 \geq 12,\ 4x_1 + 8x_2 \geq 24,\ 8x_2 \geq 8$

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

3^{ter} **Schritt**: Lösung der Optimierungsaufgabe (Fig. 14.3)

$$g_1 : 4x_1 + 2x_2 - 12 = 0,\ g_2 : 4x_1 + 8x_2 - 24 = 0 \ \Rightarrow\ g_1 \cap g_2 = A(2,2) \ \Rightarrow\ z_{min} = 44$$

4^{ter} **Schritt**: Auswertung der Lösung

$$4.2 + 2.2 = 12 \geq 12,\ 4.2 + 8.2 = 24 \geq 24,\ 8.2 = 16 > 8$$

Wenn der Lösungsbereich allseitig begrenzt ist, wird er *beschränkt* genannt. Wenn der Lösungsbereich nicht allseitig begrenzt ist, wird er *unbeschränkt* genannt.

Beispiel 14.5. Gegeben ist das Optimierungsmodell:
Zielfunktion: $z = 10x_1 + 4x_2 \ \rightarrow\ max$
Einschränkende Bedingungen : $x_1 + x_2 \leq 4,\ 2x_1 - x_2 \geq 2,\ x_2 \geq 1,\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3$
Nichtnegativitätsbedingung: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Lösung. $g_1 : x_1 + x_2 - 4 = 0,\ g_2 : 2x_1 - x_2 - 2 = 0,\ g_3 : x_2 - 1 = 0,\ g_4 : 2x_1 + 2x_2 - 3 = 0.$
Die 4^{te} einschränkende Bedingung ergibt eine Lösungsmenge, die auf den Bereich der zulässigen Lösungen keinen Einfluß ausübt, denn die Gerade g_4 tritt nicht als Grenzgerade auf (Fig. 14.4).
$g_1 \cap g_2 = A(3,1) \ \Rightarrow$ im Punkt A wird die Niveaulinie zur *Stützgerade* $\Rightarrow\ z_{max} = 34.$

Erklärung 14.6. Einschränkende Bedingungen, die auf den Bereich der zulässigen Lösungen keinen Einfluß haben, heißen *überflüssig.*

Aufgabe 14.7. Es ist das folgende Optimierungsproblem zu lösen:
Zielfunktion: $z = 10x_1 + 40x_2 \ \rightarrow\ max$
Nebenbedingungen: $x_1 + x_2 \leq 4,\ 2x_1 - x_2 \geq 2,\ x_2 \geq 1,\ 2x_1 + 2x_2 \leq 3$
Nichtnegativitätsbedingung: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Antwort. Es existiert keine zulässige Lösung. Das Optimierungsproblem ist nicht lösbar.
Ist die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems leer, so heißen die darin enthaltene Ungleichungen *widersprüchlich* oder *unverträglich.*
Aufgaben der linearen Optimierung können auf Ungleichungssysteme führen, die eine oder mehrere Gleichungen enthalten. Gleichungen schränken den Lösungsbereich stark ein.

Beispiel 14.8. Das Minimum der Zielfunktion $z = 8x_1 + 2x_2$ ist unter den einschränkenden Bedingungen
$3x_1 + 5x_2 \leq 60,\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36,\ x_1 + x_2 = 13;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
zu bestimmen.

Lösung. Der Bereich der zulässigen Lösungen ist die Strecke $[AB]$ (Fig. 14.5). Ihr Minimum erreicht die Zielfunktion im Punkt $B = g_1 \cap g_3 \ \Rightarrow\ z_{min} = 41.$

Beispiel 14.9. Ein Optimierungsmodell lautet:

$$z = x_1 + 3x_2 \ \rightarrow\ max;\ x_1 + 3x_2 \leq 300,\ x_1 + x_2 \leq 150;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Lösung. Da $\overrightarrow{c}(1,3) \perp g_1$ ist, so wird das Maximum nicht in genau einem Punkt des Lösungsbereiches angenommen, sondern die Stützgerade ist mit der Grenzgerade g_1 identisch. Die Schar der Niveaulinien und die Gerade g_1 verlaufen parallel. Die gestellte Aufgabe hat nicht genau eine optimale Lösung, sondern unendlich viele solche. Die Koordinaten aller Punkte der Strecke $[BC]$, $B = g_1 \cap g_2$, $C = g_1 \cap Ox_2$, liefern jeweils das Maximum für $z \ \Rightarrow\ z_{max} = 300.$

14.3. **Verallgemeinerung.** Bisher wurden **nur** Aufgaben der linearen Optimierung gelöst, welche zwei Entscheidungsvariablen x_1 und x_2 enthalten. Es konnte festgestellt werden, daß eine optimale Lösung, falls vorhanden, in mindestens einem **Eckpunkt** des Lösungsbereiches angenommen wird. Der Lösungsbereich ist in der Regel ein konvexes Polygon, das von Grenzgeraden eingeschlossen wird. Die Zielfunktion führt bei ihrer graphischen Darstellung auf eine Schar von **Niveaulinien**. Die Niveaulinie, die das Optimum bestimmt, ist die **Stützgerade**.

Im Normalfall eines Maximierungsproblems sollen die genannten Grundbegriffe verallgemeinert werden, um eine Einordnung in die Theorie der linearen Optimierung anzudeuten. Im allgemeinen treten bei linearen Optimierungsproblemen Zielfunktionen und Ungleichungssysteme mit mehr als zwei Entscheidungsvariablen auf. Modelle mit drei Variablen könnten noch im dreidimensionalen Raum geometrisch (graphisch) gelöst werden. Aus Geraden würden dann Ebenen; konvexe Vielecke würden zu konvexen Vielflächern, konvexen Polyedern.

Ist die Anzahl der auftretenden Variablen x_k, $k = 1, 2, ..., n$ größer als 3, müssen wir uns dem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ zuwenden.

Da man unter einer Hyperebene sämtliche Punkte des $\mathbb{R}^n$, deren Koordinaten die Gleichung $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$ erfüllen, wobei mindestens ein Koeffizient von Null verschieden ist, versteht, so wird der Raum $\mathbb{R}^n$ durch diese Hyperebene in den Halbräumen $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \gtrless b_1$ zerlegt.

Jede Ungleichung des linearen Systems $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ definiert also in $\mathbb{R}^n$ einen Halbraum, der von einer Hyperebene begrenzt wird. Der Durchschnitt der sich ergebenen endlich vielen Halbräume einschließlich der begrenzenden Hyperebenen stellt die Lösungsmenge des Ungleichungssystems dar. Im Normalfall ist dieser Bereich der zulässigen Lösungen ein konvexes Polyeder, das endlich viele Eckpunkte aufweist.

Die Zielfunktion $z = \mathbf{c}^t\mathbf{x}$ definiert für jede reelle Zahl z in $\mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Hyperebene. Hat diese Hyperebene mit dem konvexen Polyeder nur Randpunkte gemeinsam, wird sie zur *Stützhyperebene*. Die Koordinaten eines derartigen Randpunktes, der meistens ein Eckpunkt des konvexen Polyeders ist, bestimmen das Optimum der Zielfunktion.

14.4. **Numerische Lösung linearer Optimierungsprobleme. Maximierungsprobleme.** Der Grundgedanke der numerischen Lösung linearer Optimierungsprobleme wird am Beispiel 14.1 erläutert.

Die Nebenbedingungen $4x_1 + 8x_2 \leq 32$, $4x_1 + 2x_2 \leq 20$, $8x_2 \leq 24$ bringen die Produktionsbedingungen eines Betriebes zum Ausdruck. Sie sind in Form von Ungleichungen angegeben, die Gleichheit als Spezialfall enthalten. Das Gleichheitszeichen gilt immer dann, wenn die zur Verfügung stehenden Kapazitäten voll genutzt werden; das wird aber nicht immer der Fall sein.

Für die rechnerische Lösung der Aufgabe werden die Ungleichungen in Gleichungen überführt. Zu diesem Zweck werden die *Schlupfvariablen* s_1, s_2, s_3 eingeführt, die die Höhe der jeweils nicht ausgelasteten Kapazität angeben. Die Ungleichung $4x_1 + 8x_2 \leq 32$ wird durch Einführung der Schlupfvariablen s_1 in die Gleichung $4x_1 + 8x_2 + s_1 = 32$ überführt. Werden beispielsweise von E_1 und E_2 je 2 ME hergestellt, dann nimmt s_1 den Wert $32 - 4.2 - 8.2 = 8$ an. Auch für die Schlupfvariablen gilt die Nichtnegativitätsbedingung, sie dürfen keine negativen Werte annehmen.

Das mathematische Modell erhält nun folgende Gestalt:

Zielfunktion: $z = 20x_1 + 30x_2 \ \rightarrow \ max$

$$\text{Nebenbedingungen:}\left|\begin{array}{llllll} s_1 & & & +4x_1 & +8x_2 & =32 \\ & s_2 & & +4x_1 & +2x_2 & =20 \\ & & s_3 & +0x_1 & +8x_2 & =24 \end{array}\right.$$

Nichtnegativitätsbedingung: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0$

Damit ist die lineare Optimierungsaufgabe auf die Lösung eines inhomogenen, unbestimmten linearen Gleichungssystem zurückgeführt. Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens.

Allgemein geht es bei der numerischen Lösung linearer Optimierungsaufgaben darum, das System der Ungleichungen $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ durch Einführung von Schlupfvariablen in ein inhomogenes, unbestimmtes Gleichungssystem mit m Gleichungen und $m+n$ Variablen zu überführen:

$$\left|\begin{array}{llllllll} s_1 & & & +a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ & s_2 & & +a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & \\ & & s_m & +a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \ldots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}\right.$$

Für die numerische Lösung ist es auch erforderlich, das System der Nebenbedingungen $A\mathbf{x} \gtreqless \mathbf{b}$ in ein *Normalgleichungssystem* zu überführen.

Erklärung 14.10. Ein *Normalgleichungssystem* liegt dann vor, wenn alle Variablen des Systems nichtnegativ sind und $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ gilt.

Die Forderung $b_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ läßt sich für jedes beliebige b_i erfüllen. Ist in irgendeiner Nebenbedingung ein b_i ursprünglich negativ, kann durch Multiplikation der entsprechenden Beziehung mit -1 stets $b_i \geq 0$ erreicht werden.

Jede Variable x_k, die nicht vorzeichenbeschränkt ist, also auch negative Werte annehmen darf, kann durch die Differenz zweier nichtnegativer Variablen

$$x'_k \geq 0,\ x''_k \geq 0 \ \Rightarrow\ x_k = x'_k - x''_k$$

ausgedrückt werden.

Im System der Nebenbedingungen $A\mathbf{x} \gtreqless \mathbf{b}$ können Ungleichungen sowohl in der Form $\leq$ als auch in der Form $\geq$ auftreten, die gesondert untersucht werden müsen, da wir $b_i \geq 0$ voraussetzen.

Ist die i-te Nebenbedingung eine Ungleichung der Form

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

so kann sie durch Einführung einer *Schlupfvariablen* $s_i \geq 0$ in eine Gleichung

$$s_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

überführt werden. (Diese Schlupfvariable s_i gibt die nicht verwendete Menge des Rohstoffes an.) Die Schlupfvariable beeinflußt das zu erreichende Ziel nicht und wird deshalb auch nicht in die Zielfunktion aufgenommen bzw. erhält dort den Koeffizienten 0.

Ist die k-te Nebenbedingung eine Ungleichung der Form

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k,$$

so kann sie durch Einführung einer *Überschußvariablen* $\sigma_k \geq 0$ in eine Gleichung

$$-\sigma_k + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

überführt werden. (Die Überschußvariable σ_k gibt die über die Mindestforderung hinaus produzierte Menge des Erzeugnisses an.) Auch Überschußvariablen werden nicht in die Zielfunktion aufgenommen bzw. erhalten dort den Koeffizienten 0.

Jedes lineare Ungleichungssystem kann in ein Normalgleichungssystem umgewandelt werden.

In Matrizenschreibweise kann die Normalform einer linearen Optimierungsaufgabe folgendermaßen dargestellt werden:

Zielfunktion: $z = \mathbf{c}^t\mathbf{x} \ \rightarrow \ max;\ \mathbf{c}^t = (c_1\ c_2\ ...\ c_n\ 0\ ...\ 0),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \\ s_1 \\ ... \\ s_m \end{pmatrix}$

Nebenbedingungen: $A^*\mathbf{x} = \mathbf{b};\ A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$

Nichtnegativitätsbedingung: $\mathbf{x} \geq 0$

Erklärung 14.11. Jeder Vektor $\mathbf{x}$, der das System der Nebenbedingungen in der Form

$$A^*\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

erfüllt, heißt *eine Lösung* der linearen Optimierungsaufgabe; falls auch $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ gilt, heißt die Lösung eine *zulässige Lösung* der linearen Optimierungsaufgabe.

Das System $A^*\mathbf{x} = \mathbf{b}$ besitzt nur dann eine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A^* gleich dem Rang der erweiterten Matrix $\overline{A^*}$ ist.

Erklärung 14.12. Ein Gleichungssystem mit einer geordneten Teilmenge von Variablen $x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+n}$ liegt in der *kanonischen Form* vor, wenn für jedes $k = 1, ..., m$ (m ist die Anzahl der Gleichungen) die k-te Variable in der k-ten Gleichung den Koeffizienten 1 und sonst nur die Koeffizienten 0 hat. Die Variablen $x_k,\ k = 1, ..., m$, werden *Basisvariablen* genannt, während die Variablen $x_{m+i},\ i = 1, ..., n$, *Nichtbasisvariablen* heißen.

Die spezielle Lösung, die durch Nullsetzen der Nichtbasisvariablen entsteht, heißt *Basislösung.*

Satz 14.13. *Das n-tupel der Entscheidungsvariablen in jeder Basislösung entspricht einem Eckpunkt des Bereiches der zulässigen Lösungen.*

Da der Bereich der zulässigen Lösungen ein konvexes Polyeder mit endlich vielen Eckpunkten ist, folgt es unmittelbar, daß die Anzahl der Basislösungen endlich ist. Falls das Optimierungsproblem lösbar ist, so gibt es unter den Basislösungen mindestens eine, die den Maximalwert für z ergibt, also eine Optimallösung ist.

Beim eigentlichen Rechenverfahren (*Simplexalgorithmus*) wird, ausgehend von einer zulässigen Basislösung, mit Hilfe des Austauschverfahrens über elementare Basistransformationen, eine neue Basislösung erzeugt, die der Zielfunktion z im allgemeinen einen größeren Wert erteilt.

Der Simplexalgorithmus, ein **endliches Iterationsverfahren**, ermöglicht es, durch ein Auswahlverfahren nur wenige der zulässigen Basislösungen zu erzeugen, und, unter der Einbeziehung der Zielfunktion in die Rechnung, die jeweils erzeugte Lösung auf Optimität zu testen. Dazu wird die Zielfunktion in der Form $-z + \mathbf{c}^t\mathbf{x} = Q$ mit in das sogenannte *Simplextableau* aufgenommen:

Basislösung B	jeweilige Nichtbasislösung				
	x_1	x_2	...	x_n	b
s_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
s_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
$-z$	c_1	c_2	...	c_n	Q

Es wird von einer zulässigen Lösung ausgegangen, indem als erstes die Schlupfvariablen in die Basis aufgenommen werden. Ökonomisch gesehen bedeutet dies, daß **nichts** produziert wird. Die Schlupfvariablen nehmen die Werte der zur Verfügung stehenden Kapazitätan an. Der variable Parameter z hat den Anfangswert $Q = 0$.

Von der zulässigen Lösung ausgehend versucht man schrittweise die Entscheidungsvariablen in die Basis aufzunehmen.

Für die Wahl des *Hauptelementes* (zum Austauschen) sind einige Bedingungen zu beachten, die dem **Auswahlverfahren** des Simplexalgorithmus entsprechen:

[1] Das Hauptelement kann nur aus einer Spalte ausgewählt werden, deren Randelement (in der $(-z)$-Zeile) positiv ist.

[2] Das Hauptelement muß stets größer als Null sein.

[3] Als Hauptelement muß diejenige Zahl gewählt werden, die den *Engpaß* bestimmt.

Durch das Einhalten dieser Austauschbedingungen wird erreicht, daß nicht alle Basislösungen erzeugt werden, was dem Fortschreiten von Eckpunkt zu Eckpunkt entsprechen würde, sondern sozusagen bestimmte Eckpunkte "übersprungen" werden.

1^{ter} **Schritt**: Auswahl der Schlüsselspalte.

Bei der Auswahl der Schlüsselspalte ist es allgemein üblich die Spalte zu wählen, die den **größten** positiven Koeffizienten c_k ($c_{max} \geq 0$) in der $(-z)$-Zeile enthält.

Im Beispiel 14.1 wird dabei davon ausgegangen, daß der Gewinn am stärksten wächst, wenn das Erzeugnis E_2 produziert wird, denn das größte Element in der $(-z)$-Zeile (=30) verspricht den größten Gewinn. Damit steht fest, daß x_2 in die Basis aufgenommen wird.

2^{ter} **Schritt**: Auswahl der Schlüsselzeile.

Die erfolgte Auswahl der Schlüsselspalte bedeutet ökonomisch betrachtet, daß das Erzeugnis E_2 in die Produktion aufgenommen wird. Die Anzahl der herzustellenden ME des Erzeugnisses E_2 hängt nun von den vorhandenen Rohstoffmengen ab. Nach den vorhandenen Vorräten des Rohstoffes R_1 könnten $32 : 8 = 4$ ME von E_2 hergestellt werden, nach den Vorräten von R_2 könnten $20 : 2 = 10$ ME und nach den Vorräten von R_3 könnten $24 : 8 = 3$ ME des Erzeugnisses E_2 hergestellt werden. Also bildet der Rohstoff R_3 den *Engpaß*, es könnten nicht mehr als 3 ME des erzeugnisses E_2 produziert werden.

Allgemein bestimmt der kleinste Quotient q_{min}, $q \geq 0$, die Wahl der Schlüsselzeile.

Durch die Austauschbedingungen wird das Hauptelement festgelegt, es kann jetzt nicht mehr frei gewählt werden:

B	s_1	s_2	s_3	x_1	$[x_2]$	b_i	q
s_1	1	0	0	4	8	32	4
s_2	0	1	0	4	2	20	10
$[s_3]$	0	0	1	0	[8]	24	[3]
$-z$				20	[30]	0	

Erste Basislösung:
$-z + 20x_1 + 30x_2 = 0;$
$x_1 = 0,\ x_2 = 0;\quad s_1 = 32,\ s_2 = 20,\ s_3 = 24;\quad$ Eckpunkt $(0,0) \Rightarrow z = 0.$

$$s_3 \quad \leftrightarrow \quad x_2$$

B	s_1	s_2	x_2	x_1	s_3	b_i
s_1	1	0	8	4	0	32
s_2	0	1	2	4	0	20
x_2	0	0	8	0	1	24

$$\Longleftrightarrow$$

B	s_1	s_2	x_2	$[x_1]$	s_3	b_i	q
$[s_1]$	1	0	0	[4]	-1	8	[2]
s_2	0	1	0	4	$-\frac{1}{4}$	14	$\frac{7}{2}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{8}$	3	–
$-z$				[20]	$-\frac{15}{4}$	-90	

Zweite Basislösung:
$x_2 = 3 - \dfrac{1}{8}s_3 \quad \Rightarrow \quad -z + 20x_1 - \dfrac{15}{4}s_3 = -90;$
$x_1 = 0,\ x_2 = 3;\quad s_1 = 8,\ s_2 = 14,\ s_3 = 0;\quad$ Eckpunkt $(0,3) \Rightarrow z = 90.$

Dies ist noch nicht die optimale Lösung. An der Zielfunktion $z = 20x_1 - \dfrac{15}{4}s_3 + 90$ kann abgelesen werden, daß z noch vergrößert werden kann, wenn x_1 Basiswariable wird.
Der Optimalitätstest wird also beim Simplexalgorithmus mit Hilfe der Zielfunktion durchgeführt. Die optimale Lösung ist erreicht, wenn alle Koeffizienten c_k, $k = 1, ..., n$, der Zielfunktion **negativ** sind (Optimitätskriterium).

$$s_1 \quad \leftrightarrow \quad x_1$$

B	x_1	s_2	x_2	s_1	s_3	b_i
x_1	4	0	0	1	-1	8
s_2	4	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	14
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{8}$	3

$$\Longleftrightarrow$$

B	x_1	s_2	x_2	s_1	$[s_3]$	b_i	q
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2	–
$[s_2]$	0	1	0	-1	$[\frac{3}{4}]$	6	[8]
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{8}$	3	24
$-z$				-5	$[\frac{5}{4}]$	-130	

Dritte Basislösung:

$x_1 = 2 - \dfrac{1}{4}s_1 + \dfrac{1}{4}s_3 \quad \Rightarrow \quad -z - 5s_1 + \dfrac{5}{4}s_3 = -130;$
$x_1 = 2,\ x_3 = 3; \quad s_1 = 0,\ s_2 = 6,\ s_3 = 0;$ Eckpunkt $(2,3)\ \Rightarrow\ z = 130.$

Obwohl die Entscheidungsvariablen in die Basis aufgenommen sind, ist die optimale Lösung noch nicht erreicht, da in der $(-z)$-Zeile noch ein positiver Wert vorhanden ist. Das Verfahren wird fortgesetzt:

$$s_2 \quad \leftrightarrow \quad s_3$$

B	x_1	s_3	x_2	s_1	s_2	b_i
x_1	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2
s_3	0	$\frac{3}{4}$	0	-1	1	6
x_2	0	$\frac{1}{8}$	1	0	0	3

$\Longleftrightarrow$

B	x_1	s_3	x_2	s_1	s_2	b_i
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	4
s_3	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	8
x_2	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	2
$-z$				$-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-140

Optimale Lösung:
$s_3 = 8 + \dfrac{4}{3}s_1 - \dfrac{4}{3}s_2 \quad \Rightarrow \quad -z - \dfrac{10}{3}s_1 - \dfrac{5}{3}s_2 = -140;$
$x_1 = 4,\ x_2 = 2; \quad s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 8;$ Eckpunkt $(4,2)\ \Rightarrow\ z = 140.$

Die Elemente der $(-z)$-Zeile sind sämtlich negativ. Damit ist die optimale Lösung gefunden.

Beispiel 14.14. Ein Betrieb, der die Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 herstellt, will seinen Gewinn unter Beachtung folgender Gesichtspunkte maximieren:

- die Kapazität der den Engpaß bildenden Maschinengruppe beträgt 100 Maschinenstunden;
- vom Material A, das für die Herstellung der Erzeugnisse benötigt wird, stehen höchstens 600 Mengeneinheiten zur Verfügung;
- vom Material B stehen nur noch 400 ME bereit.

Der Gewinn beträgt für Erzeugnis E_1 50, für E_2 40 und für E_3 70 GE je Erzeugniseinheit. Der Aufwand für die einzelnen Erzeugnisse ist:

Aufwandsart	Aufwandskoeffizienten für			
	Erzeugnis E_1	Erzeugnis E_2	Erzeugnis E_3	Maßeinheiten
Maschinenstunden	2	0	1	ZE/EE
Material A	2	1	3	ME/EE
Material B	1	1	2	ME/EE

Hier bedeutet ZE/EE Zeiteinheit je Erzeugniseinheit und ME/EE Mengeneinheit je Erzeugniseinheit.

1^{ter} **Schritt**: Zusammenstellen der Daten

Aufwandsgrößen	Aufwandskoeffizienten			Zur Verfügung stehende Fonds
	Erzeugnis E_1	Erzeugnis E_2	Erzeugnis E_3	
Maschinenstunden	2	0	1	100
Material A	2	1	3	600
Material B	1	1	2	400
Gewinn	50	40	70	

2^ter **Schritt**: Aufstellen des mathematisch-ökonomischen Modells

Das Optimierungskriterium ist der maximale Gewinn. Als Entscheidungsvariablen x_1, x_2, x_3 werden die Anzahlen der herstellenden Erzeugnisse E_1, E_2, E_3 eingeführt.

- Zielfunktion: $z = 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 \ \rightarrow \ max$
- Nebenbedingungen: $2x_1 + x_3 \leq 100, \ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 600, \ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 400$
- Nichtnegativitätsbedingung: $x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$

3^ter **Schritt**: Numerische Lösung

$$-z + 50x_1 + 40x_2 + 70x_3 = 0$$

$$\left| \begin{array}{llllll} s_1 & & & +2x_1 & +0x_2 & +x_3 = 100 \\ & s_2 & & +2x_1 & +x_2 & +3x_3 = 600 \\ & & s_3 & +x_1 & +x_2 & +2x_3 = 400 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0; \ s_1 \geq 0, \ s_2 \geq 0, \ s_3 \geq 0$$

B	s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	$[x_3]$	b_i	q
$[s_1]$	1	0	0	2	0	[1]	100	[100]
s_2	0	1	0	2	1	3	600	200
s_3	0	0	1	1	1	2	400	200
$-z$				50	40	[70]	0	

$\Rightarrow \quad s_1 \quad \leftrightarrow \quad x_3$

B	x_3	s_2	s_3	x_1	$[x_2]$	s_1	b_i	q
x_3	1	0	0	2	0	1	100	–
s_2	0	1	0	-4	1	-3	300	300
$[s_3]$	0	0	1	-3	[1]	-2	200	[200]
$-z$				-90	[40]	-70	-7000	

$\Rightarrow \quad s_3 \quad \leftrightarrow \quad x_2$

B	x_3	s_2	x_2	$[x_1]$	s_3	s_1	b_i	q
$[x_3]$	1	0	0	[2]	0	1	100	[50]
s_2	0	1	0	-1	-1	-1	100	–
x_2	0	0	1	-3	1	-2	200	–
$-z$				[30]	-40	10	-15000	

$\Rightarrow \quad x_1 \quad \leftrightarrow \quad x_3$

B	x_1	s_2	x_2	x_3	s_3	s_1	b_i
x_1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	50
s_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	150
x_2	0	0	1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	350
$-z$				-15	-40	-5	-16500

Optimale Lösung: $x_1 = 50,\ x_2 = 350,\ x_3 = 0;\ s_1 = 0,\ s_2 = 150,\ s_3 = 0;\ z = 16500$
Als Abschluß der Rechnung empfielt es sich, eine Rechenkontrolle vorzunehmen.
Zielfunktion: $z = 50.50 + 40.350 + 70.0 = 16500$
Nebenbedingungen: $2.50 + 0 = 100 \leq 100 \ \Rightarrow\ s_1 = 0$
$2.50 + 1.350 + 3.0 = 450 < 600 \ \Rightarrow\ s_2 = 150$
$1.50 + 1.350 + 2.0 = 400 \leq 400 \ \Rightarrow\ s_3 = 0$

4^{ter} **Schritt**: Auswertung der Lösung
Der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 16500 GE, wenn das Erzeugnis E_3 ganz aus dem Fertigungsprogramm herausgenommen wird ($x_3 = 0$) und von den Erzeugnissen E_1 50 und E_2 350 ME produziert werden. Die Kapazität der Maschinengruppe wird voll in Anspruch genommen, das Material B vollständig verbraucht, und vom Material A bleiben 150 ME übrig.

Aufgabe 14.15. Lösen Sie folgende Maximierungsaufgabe:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 \leq 400; \\ 3x_1 + x_2 + x_4 + 6x_5 \leq 500; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 8x_5 \leq 800; \\ 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 10x_5 \leq 1000; \end{array}\right.$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0;$

$z = 7x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 15x_4 + 20x_5 \mapsto max$

Aufgabe 14.16. Lösen Sie folgende Maximierungsaufgabe:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200; \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 150; \\ x_2 \leq 20; \end{array}\right.$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$

$z = 50x_1 + 130x_2 + 150x_3 \mapsto max$

Aufgabe 14.17. Lösen Sie folgende Maximierungsaufgabe:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 500; \\ 6x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 1050; \end{array}\right.$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0;$

$z = 3x_1 + 2x_2 + 20x_3 \mapsto max$

(oder: $z = 7x_1 + 2x_2 + 20x_3 \mapsto max$)

Aufgabe 14.18. Lösen Sie folgende Maximierungsaufgabe:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 \leq 180; \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 180; \\ 5x_1 + x_2 \leq 200; \end{array}\right.$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

$z = 10x_1 + 15x_2 \mapsto max$

15. Die Kegelschnitte

Rein geometrisch versteht man unter *Kurve* eine Punktmenge, deren Elemente (Punkte) einer **geometrischen** Bedingung unterliegen.

Ein *Kegelschnitt* ist eine Kurve, die entsteht, wenn man die Oberfläche eines unendlichen Kegels bzw. Doppelkegels mit einer Ebene schneidet.

Es konnen folgende Figuren entstehen:

- **ein Punkt**, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene größer als der Öffnungswinkel ist;
- **eine Gerade**, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem Öffnungswinkel ist;
- **zwei sich schneidende Geraden**, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der Öffnungswinkel ist;
- **ein Kreis**, wenn die Schnittebene senkrecht (orthogonal) auf der Kegelachse steht;
- **eine Ellipse**, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene größer als der Öffnungswinkel ist, d.h. die Ellipse ist der Schnitt des Kegels mit einer Ebene, die zu keiner Mantellinie parallel ist;
- **eine Parabel**, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem Öffnungswinkel ist, d.h. die Parabel kann als Schnittlinie (-kurve) eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene, die zu einer Mantellinie des Kegels parallel ist, definiert werden;
- **eine Hyperbel**, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der Öffnungswinkel ist, d.h. die Hyperbel ist der Schnitt des Kegels mit einer Ebene, wenn es zwei zur schneidenden Ebene parallele Mantellinien gibt.

(Fig. 15(a)) (Fig. 15(b)) (Fig. 15(c))

Die eineindeutige Relation zwischen den Punkten im Raum und ihren Koordinaten in einem festgelegten Koordinatensystem (kartesisch oder schiefwinklig) gibt uns die Möglichkeit die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften einer bestimmten Punktmenge durch die Untersuchung der algebraischen Verknüpfungen ihrer Koordinaten zu ersetzen.

Im ebenen kartesischen Koordinatensystem Oxy ist der Graph einer quadratischen Gleichung mit den Variablen x und y immer ein Kegelschnitt. Umgekehrt können alle Kegelschnitte durch solche Gleichungen beschrieben werden.

Die Gesamtheit der Kegelschnitte ist also mit der Gesamtheit der Kurven zweiter Ordnung

$$(*) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

identisch, wobei der Faktor 2 bei den Koeffizienten a_{12}, a_{13} und a_{23} aus Gründen der Zweckmäßigkeit verwendet wird. Allerdings sind dabei auch gewisse ausgeartete Kegelschnitte mitgerechnet.

Der Typ des Kegelschnitts ergibt sich aus den im Folgenden definierten Determinanten

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}:$$

- Für $\delta > 0$ und $\Delta \neq 0$ handelt es sich um eine **Ellipse**. Gilt zusätzlich $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$, so ist diese Ellipse sogar ein **Kreis**.
- Gelten die Bedingungen $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ergibt sich eine **Hyperbel**, die im speziellen Fall $a_{11} + a_{22} = 0$ gleichseitig (rechtwinklig) ist.
- Unter den Voraussetzungen $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$ beschreibt die Gleichung eine **Parabel**.
- Wenn $\delta = 0$ und $\Delta = 0$ kommt ein **paralleles Geradenpaar** heraus.
- Ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$ kommt ein **imaginäres Geradenpaar** (ein unechter Kegelschnitt) heraus.
- Sollte $\Delta = 0$ und $\delta < 0$ kommt als Lösung ein **reelles Geradenpaar** heraus.

Soweit es sich um eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel handelt, bedeutet die Bedingung $a_{12} = 0$, daß die Symmetrieachsen des Kegelschnitts parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Im allgemeinen Fall führt man durch Drehung um den Winkel $\alpha : \tan(2\alpha) = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$ und Parallelverschiebung der ursprünglichen Koordinatenachsen Ox, Oy ein neues Koordinatensystem $O'XY$ ein. Dadurch geht die Gleichung $(*)$ in eine entsprechende Gleichung zwischen den neuen Koordunaten X und Y mit anderen Koeffizienten über.

Man kann durch geschickte Wahl der Koordinatentransformationen erreichen, daß die Gleichung des Kegelschnittes bezüglich der neuen Achsen sehr einfach wird. Wenn die Kurve ein echter Kegelschnitt ist, so erhält man als Gleichung der

- Ellipse: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0;$
- Hyperbel: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0;$
- Parabel: $Y = cX^2,\ c \neq 0.$

Auch der Fall, daß es sich um einen ausgearteten Kegelschnitt handelt, kann durch eine einfache Rechnung entschieden werden, nämlich;

- ein reeller Punkt $X^2 + Y^2 = 0;$
- zwei sich im Nullpunkt schneidende Geraden, d.h. zwei Mantellinien
  $X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y) = 0;$
- zwei zusammenfallende Geraden durch den Nullpunkt, d.h. eine Mantellinie
  $X^2 = 0.$

15.1. **Die echten Kegelschnitte.**

15.1.1. *Der Kreis als Punktmenge.* Der Begriff *Kreis* gehört zu den wichtigsten Begriffen der ebenen Geometrie.

Erklärung 15.1. Ein Kreis ist definiert als Menge (geometrischer Ort) aller Punkte der euklidischen Ebene, deren Abstand von einem vorgegebenen Punkt M gleich einer festen positiven reellen Zahl r ist.

Formal ausgedrückt lautet die Definition für einen Kreis k in der Ebene E folgendermaßen:

$$k = \{P \in E : |MP| = r\}. \tag{15.1}$$

Der konstante Abstand r wird als *Radius* des Kreises bezeichnet, der Punkt M als *Mittelpunkt*. Der doppelte Radius heißt *Durchmesser* und wird meistens durch die Variable d ausgedrückt.

Nach der gegebenen Definition ist ein Kreis eine Kurve, also ein eindimensionales Gebilde. Da das Wort Kreis aber oft ungenau für die eingeschlossene Fläche verwendet wird, sagt man zur Verdeutlichung häufig Kreislinie oder Kreisrand statt Kreis im Gegensatz zur *Kreisfläche* oder (geschlossenen) *Kreisscheibe*. Diese ist definiert als die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt M höchstens gleich dem Radius r ist, d.h.

$$G := \{P \in E : |MP| \leq r\}.$$

Das Innere der Fläche G bezeichnet man als *offene Kreisscheibe* oder *Innenbereich* des Kreises. Man meint damit die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt M kleiner dem Radius r ist, d.h. $\{P \in E : |MP| < r\}$.

Die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstand vom Mittelpunkt M größer dem Radius r ist, d.h. $\{P \in E : |MP| > r\}$, nennt man *Außenbereich* des Kreises.

Nun bestimmen wir eine **analytische Darstellung** des Kreises.

In der Ebene E des Kreises k führen wir ein kartesisches Koordinatensystem Oxy ein. Der Mittelpunkt M des Kreises hat die Koordinaten (α, β), der bewegliche Punkt P die Koordinaten (x, y). Aus der Gleichung (15.1) des Kreises folgt dann

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r \quad &\Leftrightarrow\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir $\gamma := \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ ein, so erhalten wir die allgemeine Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,\ r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0. \tag{15.2}$$

Die Gleichungen (15.1) und (15.2) sind äquivalent. Die Koordinaten eines jeden Punktes des Kreises (15.1) erfüllen die Gleichung (15.2), und jede Lösung der Gleichung (15.2) bestimmt eindeutig einen Punkt des Kreises (15.1).

Die Koordinaten der Außenpunkte für den Kreis erfüllen die Ungleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > r^2, \tag{15.3}$$

und diese seiner Innenpunkte die Ungleichung

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2. \tag{15.4}$$

Die Gleichung zweiten Grades $(*)$ ist Gleichung eines Kreises, wenn gilt

$$a_{11} = a_{22} \neq 0,\ \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} > 0.$$

Wird der Winkel $\angle(\overrightarrow{MP}, Ox)$ mit ω bezeichnet, so erhält man die *parametrischen Gleichungen* des Kreises

$$x = \alpha + r\cos\omega,\ y = \beta + r\sin\omega,\ \omega \in [0, 2\pi). \tag{15.5}$$

Aufgabe 15.2. Welche ist die Gleichung des Kreises, welcher von den Punkten $A(4,5)$, $B(-4,-1)$, $C(0,1)$ bestimmt ist?

Aufgabe 15.3. Der Kreis ist die Menge aller Punkte in der Ebene E, für die der Quotient ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist.

Lösung. Es seien F_1 und F_2 zwei verschiedene Punkte und es sei $r \neq 1$ eine reelle positive Zahl. Gesucht ist die Punktmenge $\{P \in E : |PF_1| = r|PF_2|\}$.

Wir wählen folgendes kartesische Koordinatensystem:

- Der Mittelpunkt der Strecke (F_1F_2) sei der Ursprung O des Koordinatensystems;
- Der Speer $F_1F_2^+$ sei die Abszissenachse;
- Die Mittelsenkrechte der Strecke (F_1F_2) sei die Ordinatenachse.

Sind dann $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c > 0$ und $P(x,y)$ die Koordinaten der entsprechenden Punkte, so gelten die Gleichungen

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = r\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2c\frac{1+r^2}{1-r^2}\,x+c=0.$$

Die gesuchte Menge besteht aus den Punkten des Kreises mit dem Mittelpunkt $M\left(-c\,\dfrac{1+r^2}{1-r^2}\,,0\right)$ und dem Radius $R = \dfrac{2cr}{|1-r|}$.

Ist $r=1$, so besteht die Menge aus den Punkten der Mittelsenkrechte der Strecke (F_1F_2).

Aufgabe 15.4. Bestimmen Sie die Lage der Punkte $A(1,1)$, $B(3,-3)$, $C(8,4)$ bezüglich des Kreises

$$k : x^2+y^2-2x-4y-24=0.$$

15.1.2. *Die Ellipse als Punktmenge.*

Erklärung 15.5. Eine *Ellipse* ϵ ist definiert als die Menge aller Punkte P der Ebene E, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich $2a$ $(> |F_1F_2|)$ ist.

$$\epsilon := \{P \in E : \; |PF_1| + |PF_2| = 2a\}. \tag{15.6}$$

Die Punkte F_1 und F_2 heißen *Brennpunkte*, der Mittelpunkt M der Strecke (F_1F_2) heißt *Mittelpunkt* der Ellipse (Fig. 15.1).

Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt heißt *lineare Exzentrizität* und wird mit c bezeichnet.

Nun bestimmen wir eine **analytische Darstellung** der Ellipse ϵ.

In der Ebene E führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein.

- Der Mittelpunkt M der Strecke (F_1F_2) sei der Ursprung des Koordinatensystems;
- Der Speer $F_1F_2^+$ sei die Abszissenachse;
- Die Mittelsenkrechte der Strecke (F_1F_2) sei die Ordinatenachse.

Die Koordinaten der Brennpunkte sind dann $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Ist $P(x,y)$ ein beliebiger Punkt der Ellipse, so gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a && \Rightarrow \\
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} && \Rightarrow \\
&a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx && \Rightarrow \\
&(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).
\end{aligned} \tag{15.7}$$

Da $a>c$ ist, so gibt es eine positive reelle Zahl b derart, daß $b^2=a^2-c^2$ ist.

Die letzte Gleichung in (15.6) hat dann die Form

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{15.8}$$

Die Koordinaten von jedem beliebigen Punkt der Menge ϵ erfüllen die Gleichung (15.8), d.h.

$$\epsilon\subseteq\mathcal{E}:=\left\{P(x,y)\in E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}.$$

Das Umgekehrte gilt auch.

Es sei nun $P(\xi,\eta)$ ein Punkt der Ebene E, dessen Koordinaten eine Lösung von (15.8) sind, d. h. $P\in\mathcal{E}$. Wir zeigen, daß $P\in\epsilon \Rightarrow \mathcal{E}\subseteq\epsilon \Rightarrow \mathcal{E}\equiv\epsilon$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
|PF_1|^2 &= (\xi+c)^2+\eta^2=(\xi+c)^2+b^2\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}\right)\\
&=\frac{a^2-b^2}{a^2}\,\xi^2+2c\xi+a^2=\frac{c^2}{a^2}\,\xi^2+2c\xi+a^2\\
&=\left(a+c\,\frac{\xi}{a}\right)^2\\
&\Rightarrow\ |PF_1|=\left|a+c\,\frac{\xi}{a}\right|.
\end{aligned}$$

Genauso gilt $|PF_2|=\left|a-c\,\dfrac{\xi}{a}\right|$.

Da (ξ,η) eine Lösung von (15.8) ist, so ist

$$\eta^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\xi^2)\ge 0\ \Rightarrow\ |\xi|\le a\ \Rightarrow\ |c\,\frac{\xi}{a}|<a\ \Rightarrow\ |PF_1|+|PF_2|=2a\ \Rightarrow\ P\in\epsilon.$$

Die Gleichung (15.8) heißt *kanonische Gleichung* der Ellipse.

Es ist leicht zu erkennen, daß die Abszissen- und die Ordinatenachse *Symmetriegeraden* von ϵ sind. Der Mittelpunkt der Ellipse ist ihr *Symmetriezentrum*.

Es gilt nämlich:

$$P(\xi,\eta)\in\epsilon\ \Rightarrow\ P_1(-\xi,\eta)\in\epsilon,\ P_2(\xi,-\eta)\in\epsilon,\ P_3(-\xi,-\eta)\in\epsilon.$$

Die Punkte $S_1(a,0)$ und $S_2(-a,0)$ mit größtem Abstand zum Mittelpunkt M heißen *Hauptscheitel*, ihre Verbindungslinie (S_1S_2) heißt *Hauptachse*, bestehend aus den zwei *großen Halbachsen* (MS_1) und (MS_2). Die großen Halbachsen haben also die Länge a.

Analog dazu spricht man von den *Nebenscheiteln* $S_3(b,0)$ und $S_4(-b,0)$, welche die *Nebenachse*, bestehend aus den *kleinen Halbachsen* (MS_3) und (MS_4), definieren. Die Länge der kleinen Halbachsen ist gleich b.

Haupt- und Nebenachse sind zueinander orthogonal.

Die lineare Exzentrizität berechnet sich über das rechtwinklige Dreieck $\triangle\ MF_1S_3$ mit dem Satz des Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Die Definitionsgleichung zusammen mit Symmetrieüberlegungen ergeben, daß der Abstand der Nebenscheitel S_3 und S_4 von den Brennpunkten F_1 und F_2 gerade gleich der Größe a aus der Definition ist : $|F_1S_3| = |F_2S_3| = |F_1S_4| = |F_2S_4| = a$.

Brennpunkteigenschaft (**optische Eigenschaft**): Die Verbindungslinie zwischen einem Brennpunkt und einem Punkt der Ellipse heißt *Brennlinie*, *Leitstrahl*, oder *Brennstrahl*.

Ihren Namen erhielten Brennpunkte und Brennstrahlen aufgrund der Eigenschaft, daß der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen in einem Punkt der Ellipse durch die *Normale* in diesem Punkt halbiert wird. Damit ist der Einfallswinkel, den der eine Brennstrahl mit der Tangente bildet gleich dem Ausfallswinkel der Tangente mit dem anderen Brennstrahl.

Ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt ausgeht, würde demnach an der Ellipsentangente so reflektiert, daß er den anderen Brennpunkt trifft. Bei einem ellipsenförmigen Spiegel treffen sich demnach alle von einem Brennpunkt ausgehenden Lichtstrahlen in dem anderen Brennpunkt.

Da der Weg von einem zum anderen Brennpunkt (entlang zweier zusammengehöriger Brennstrahlen) immer gleich lang ist, wird auch Schall nicht nur verstärkt von einem zum anderen Brennpunkt übertragen, sondern kommt sogar zeit- und phasengleich (also verständlich und nicht interferierend) dort an.

Zwei Ellipsen mit übereinstimmenden Brennpunkten nennt man *konfokal*.

Erklärung 15.6. Eine Parallele zur Nebenachse im Abstand $d = \dfrac{a^2}{c}$ bezeichnet man als *Direktrix* oder *Leitlinie*. Die Gleichungen der Leitlinien sind $x = \pm d$ (Fig. 15.2).

Aufgabe 15.7. Für einen beliebigen Punkt P der Ellipse ist das Verhältnis seines Abstands von einem Brennpunkt zu dem Abstand von der Direktrix auf der entsprechenden Seite der Nebenachse gleich der *numerischen Exzentrität* $e := \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$.

Die Möglichkeit der *Parameterdarstellung* einer Kurve wird daraus erhellt, daß man die Kurve als die *Bahnlinie* eines Punktes betrachten kann; dann sind die Koordinaten des Punktes in jedem Augenblick eindeutige Funktion der Zeit t, die hier als *Parameter* auftritt. Da eine und dieselbe Kurve Bahnlinie verschiedener Bewegungen sein kann, ist es klar, daß sie mehrere Parameterdarstellungen zuläßt.

Die mathematisch positiv durchlaufene Ellipse ϵ (d.h. die Durchlaufrichtung wird vom Koordinatensystem bestimmt) mit der geometrischen Gleichung (15.8) hat eine Parameterdarstellung der Art

$$\epsilon: \ x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \tag{15.9}$$

Es sei $l^{\rightarrow}$ ein beliebiger Strahl mit dem Anfangspunkt O; k_1 und k_2 seien die Kreise mit dem Mittelpunkt O und Radien b bzw. a; es seien weiter $P_1 = l^{\rightarrow} \wedge k_1$, $\quad P_2 = l^{\rightarrow} \wedge k_2$, $t = \angle(Ox, l^{\rightarrow})$; es seien noch $P_1P \parallel Ox$, $\ P_2P \parallel Oy$. Es ist direkt zu beweisen, daß der Punkt $P(x_0, y_0)$ auf ϵ liegt und $x_0 = a\cos t$, $\ y_0 = b\sin t$ gilt.

15.1.3. *Die Hyperbel als Punktmenge.* In der ebenen Geometrie versteht man unter einer Hyperbel eine spezielle Kurve, die aus zwei zueinander symmetrischen, sich ins Unendliche erstreckenden Ästen besteht. Die Hyperbel gehört wie die Parabel und die Ellipse zu den Kegelschnitten.

Erklärung 15.8. Eine Hyperbel χ ist definiert als die Menge aller Punkte der Ebene E, für die die Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den so genannten Brennpunkten F_1 und F_2, konstant gleich $2a$ ($< |F_1F_2|$) ist.

$$\chi := \{P \in E : \, ||PF_1| - |PF_2|| = 2a\}. \tag{15.10}$$

Den halben Abstand der Brennpunkte bezeichnet man üblicherweise mit c. Die Gerade, die durch die beiden Brennpunkte geht, nennt man *reelle Achse* oder auch *Hauptachse* der Hyperbel. Genau zwei Punkte der Hyperbel liegen auf der Hauptachse; diese nennt man *Scheitel*. Die Scheitel haben zu den Brennpunkten die Abstände $c + a$ bzw. $c - a$ und voneinander den Abstand $2a$. (Mit "Hauptachse" im engeren Sinn wird auch oft nur die Strecke bezeichnet, die die beiden Scheitel verbindet.)

Die Senkrechte zur Hauptachse durch den *Hyperbelmittelpunkt* nennt man die *Nebenachse* oder die *imaginäre Achse*. Die Größe c bezeichnet man als *lineare Exzentrizität* oder *Brennweite*.

Es erweist sich als praktisch, für die Größe $\sqrt{c^2 - a^2}$ einen eigenen Namen einzuführen; üblicherweise bezeichnet man sie mit dem Buchstaben b (imaginäre Halbachse). Es gilt also $a^2 + b^2 = c^2$ (Vergleiche dazu Ellipse).

Stimmen bei einer Hyperbel die Größen der Halbachsen (a und b) überein, so spricht man von einer *gleichseitigen Hyperbel*.

Jede Hyperbel besitzt zwei *Asymptoten*, also zwei Geraden, denen sich die Punkte der Kurve beliebig annähern. Die beiden Asymptoten verlaufen durch den Mittelpunkt der Hyperbel. Ihr Schnittwinkel α gegenüber der Hauptachse ist gegeben durch $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Ist die Hyperbel *gleichseitig*, so stehen die Asymptoten senkrecht aufeinander.

Die Gleichung der Hyperbel erhält eine besonders einfache Form, wenn sie in **1.Hauptlage** liegt, das heißt, daß die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 auf der x-Achse symmetrisch zum Ursprung liegen.

Bei einer Hyperbel in 1.Hauptlage haben also die Brennpunkte die Koordinaten $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$, und die Scheitel haben die Koordinaten $S_1(a, 0)$ und $S_2(-a, 0)$.

Die Gleichungen der Asymptoten sind dann $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$.

Für einen beliebigen Punkt P in der Ebene nennen wir die Geraden durch den Punkt und jeweils einen Brennpunkt *Leitstrahl* des Punktes.

Für den Punkt $P(x, y)$ ist der Abstand zum Brennpunkt $F_1(c, 0)$ entlang dem einen Leitstrahl gleich $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, zum anderen Brennpunkt $F_2(-c, 0)$ entlang dem anderen Leitstrahl $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Der Punkt $P(x, y)$ liegt also genau dann auf der Hyperbel, wenn die Differenz dieser beiden Ausdrücke gleich $2a$ oder gleich $-2a$ ist.

Durch algebraische Umformungen (unter Berücksichtigung von $a^2 + b^2 = c^2$) kann man zeigen, daß die Gleichung

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \tag{15.11}$$

zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{15.12}$$

äquivalent ist.

Die Gleichung (15.12) nennt man die Gleichung der Hyperbel in 1.Hauptlage oder *kanonische Gleichung.*

Die Koordinatenachsen (die Haupt- und Nebenachse) sind die *Symmetriegeraden* der Hyperbel, der Koordinatenursprung (der Hyperbelmittelpunkt) ist ihr *Symmetriezentrum.* Da

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \geq 0 \ \wedge \ x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2) \geq 0$$

gilt, so folgt, daß nur $|x| \geq a$, d.h. $x \in (-\infty, -a] \ \vee \ [a, \infty)$, ist. Es liegt also im Streifen $-a < x < a$ der xy-Ebene kein Punkt der Hyperbel.

Daraus ergibt sich, daß jede Hyperbel nach einer geeigneten Koordinatentransformation durch

$$x = a\cosh t = a\,\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = b\sinh t = b\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{15.13}$$

parametrisiert werden kann.

Eine besonders einfach visualisierbare Hyperbel wird durch die Funktion $y = \dfrac{1}{x}$ beschrieben (siehe Fig. 15.3). Für diese Hyperbel ist $a = b = \sqrt{2}$; ihre Hauptachse ist die Gerade mit der Gleichung $y = x$, ihre Scheitel sind die Punkte $(1,1)$ und $(-1,-1)$, und ihre Brennpunkte liegen bei $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Erklärung 15.9. Mit dem Begriff *Direktrix* oder *Leitlinie* bezeichnet man die beiden Parallelen zur Nebenachse im Abstand $d = \dfrac{a^2}{c}$. Die Gleichungen der Leitlinien sind $x = \pm d$ (Fig. 15.4).

Aufgabe 15.10. Für einen beliebigen Punkt P der Hyperbel ist das Verhältnis zwischen den Abständen zu einem Brennpunkt und zur zugehörigen Direktrix gleich der *numerischen Exzentritat*: $e := \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$

Brennpunkteigenschaft (**optische Eigenschaft**): Der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen in einem Punkt der Hyperbel wird durch die *Tangente* in diesem Punkt halbiert.

15.1.4. *Die Parabel als Punktmenge.* In der Mathematik ist eine Parabel ein Kegelschnitt, der entsteht, wenn man den Kegel mit einer Ebene schneidet, die parallel zu einer Erzeugenden des Kegels ist. (Wenn die Ebene selbst eine Tangentialebene des Kegels ist, erhalt man eine degenerierte Parabel, die einfach eine Gerade ist.)

Außerdem stellen die Funktionsgraphen von quadratischen Funktionen Parabeln dar.

Erklärung 15.11. Eine Parabel ist die Menge aller Punkte P einer Ebene E, deren Abstand zu einem festen Punkt (dem *Brennpunkt* F) und einer Geraden (der *Leitgeraden* l) in E, $F \notin l$, gleich ist.

$$\pi := \{P \in E : \, d(P, l) = |PF|\}. \tag{15.14}$$

Jener Punkt, der genau in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitgerade liegt, heißt *Scheitel* A der Parabel. Die Verbindungsgerade von Brennpunkt und Scheitel wird *Achse* der Parabel genannt. Sie ist die einzige *Symmetrieachse.*

Das Koordinatensystem wird im Folgenden so festgelegt, daß $A(0,0)$ und $F(0,c)$, $c>0$. Die Leitgerade l hat also die Gleichung $y=-c$. Für jeden Punkt $P(x,y)$ auf der Parabel gilt dann $|PF|=|PQ|$, $Q\in l \ \wedge\ PQ\perp l$ (Fig. 15.5), und damit

$$\sqrt{(y-c)^2+x^2}=y+c. \tag{15.15}$$

Hieraus folgt unmittelbar der funktionale Zusammenhang zwischen x und y für alle Punkte $P(x,y)$:

$$y=\frac{1}{4c}\,x^2. \tag{15.16}$$

Jede quadratische Funktion der Form $y=ax^2$ ist somit eine Parabel mit dem Brennpunkt $F(0,\dfrac{1}{4a})$.

Da die Parabel nur von einem Parameter abhängig ist (dem Abstand von Leitgerade und Brennpunkt $2c$ bzw. dem Parameter a in der Gleichung), sind alle Parabeln zueinander ähnlich. Geometrisch gedeutet ist der Parameter jene Parabelsehne, die senkrecht zur Achse und durch den Brennpunkt geht; sie ist 4-mal länger als der Abstand zwischen Brennpunkt und Parabelscheitel.

Insbesondere ist die *numerische Exzentrizität* $e=1$ und die *lineare Exzentrizität* oder Brennweite $c=a$.

Brennpunkteigenschaft (**optische Eigenschaft**): Wird ein Strahl, der parallel zur Achse einfällt, an der Parabel gespiegelt, so geht der resultierende Strahl durch den Brennpunkt, und umgekehrt. Die Tangente zu der Parabel π an der Stelle $P\in\pi$ ist also die Winkelhalbierende des Winkels FPQ (Q ist der Fußpunkt des Lots von P auf l).

Die Geraden durch einen Punkt der Parabel und den Brennpunkt nennen wir dann *Brennlinie*, *Leitstrahl*, oder *Brennstrahl* des Punktes.

Diese Eigenschaft hat auch ein *Rotationsparaboloid*, also die Fläche, die entsteht, wenn man eine Parabel um ihre Achse dreht; sie wird häufig in der Technik verwendet (Parabolspiegel).

Aufgabe 15.12. Die Punkte $A(\xi,0)$ und $B(0,\eta)$ sind derart gegeben, daß $|AB|=d=$ *const* >0 ist. Welchen geometrischen Punktort beschreibt der beliebige Punkt P der Strecke (AB), falls sich die Strecke (AB) in der Ebene so bewegt, daß der Punkt A stets auf der Ox-Achse und der Punkt B auf der Oy-Achse liegen bleibt?

Aufgabe 15.13. Bezüglich des ebenen Koordinatensystems Oxy sind die Punkte $F_1(-\sqrt{7},0)$, $F_2(\sqrt{7},0)$ und die Kurve $k:\ 9x^2+16y^2=144$ gegeben.

(a) Es sei D ein beliebiger Punkt auf k. Rechnen Sie $|DF_1|+|DF_2|$ aus.

(b) Die Ecken A und B des rechtwinkligen Dreiecks ABC ($\angle ACB=90°$) liegen auf k, die Ecke C ist das Symmetriezentrum von k.
Bestimmen Sie $\dfrac{1}{|CA|^2}+\dfrac{1}{|CB|^2}$.
Welche Länge hat das Lot zu der Hypothenuse des Dreiecks $\triangle ABC$?

Aufgabe 15.14. Es seien $\chi : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eine Hyperbel, $M_0(x_0, y_0)$ ein beliebiger Punkt dieser Hyperbel und die Geraden $g_1 : y = \dfrac{b}{a}\,x, \quad g_2 : y = -\dfrac{b}{a}\,x$ die Asymptoten der Hyperbel. Beweisen Sie, daß folgendes gilt:

$$d(M_0, g_1)\, d(M_0, g_2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

1. H.v.Mangoldt, K. Knopp, *Einleitung in die Höhere Mathematik*, Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Erster Band, 1944; Zweiter Band, 1959; Dritter Band, 1963.

2. G. Grüss, *Differential- und Integralrechnung*, Akad. Verlagsgeselschaft Geest, Portig K.-G., Leipzig, 1953.

3. G. Böhme, *Anwendungsorientierte Mathematik*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Erster Band, 1974; Zweiter Band, 1975; Dritter Band, 1976.

4. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaften*, Fachschullehrbuch, Verlag "Die Wissenschaft", Berlin, 1986.

5. Веселка Михова, *Ръководство по Аналитична Геометрия*, Унив. Изд. "Св. Кл. Охридски София, 1998.

Sofia, 1997 - 2008