Funktionalanalysis I

Vadim Kostrykin
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Sommersemester 2018
Vorlesungsbegleitendes Skript

Stand: 14. Februar 2018

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skriptum ist ein Nachschlagewerk zur Vorlesung „Funktionalanalysis I“. Das Skriptum sollte kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch sein.

Anregungen und Kritik zu diesem Skriptum bitte an:
`kostrykin@mathematik.uni-mainz.de`.

Ich danke Frau Linda Raabe für die Erstellung der LaTeX-Version des Skriptums sowie Albrecht Seelmann und Stephan Schmitz für ihre Korrekturvorschläge.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Metrische und normierte Räume

1.1. Metrische Räume

DEFINITION 1.1. *Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0,\infty)$ heißt* Metrik, *wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:*

(a) $d(x,y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$, *(Positivität)*
(b) $d(x,y) = d(y,x)$, *(Symmetrie)*
(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. *(Dreiecksungleichung)*

Das Paar (X,d) heißt metrischer Raum.

BEISPIELE. (1) *Sei $X = \mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,*

$$d_2(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$d_1(x,y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|,$$
$$d_\infty(x,y) := \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|.$$

(X,d_1), (X,d_2), (X,d_∞) sind metrische Räume.

(2) *Sei $X \neq \emptyset$ beliebig,*

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

(X,d) ist ein metrischer Raum, d heißt diskrete Metrik.

(3) *$(\mathbb{N},d)$ mit*

$$d(n,m) := \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, & n \neq m \end{cases}$$

ist ein metrischer Raum. Offenbar ist d eine Metrik, denn

$$d(n,k) + d(m,k) = d(n,m) \quad \textit{falls} \quad k = n \quad \textit{oder} \quad k = m$$

und

$$\begin{aligned} d(n,k) + d(m,k) &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \\ &\geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = d(n,m) \end{aligned}$$

falls $k \neq n$ und $k \neq m$.

(4) *Sei S eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Definiere*

$$X := \{A \subset S \mid A \neq \emptyset, \quad A \quad \text{ist abgeschlossen}\}$$

und

$$d(A,B) := \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d_2(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d_2(a,b)\}, \quad A,B \in X.$$

(X,d) *ist ein metrischer Raum, d heißt Hausdorff-Metrik. Beweis selbst.*

Notation. Wir schreiben $A \subset B$, falls $x \in B$ für alle $x \in A$. Falls $A \subset B$ und $A \neq B$ ist, schreiben wir $A \subsetneq B$.

Definition 1.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Seien $x \in X$ und $r > 0$ beliebig.*

(a) *Die Menge $B_r(x) := \{y \in X | d(x,y) < r\}$ heißt die* offene Kugel um x mit Radius r, *$K_r(x) := \{y \in X | d(x,y) \leq r\}$ heißt die* abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.
(b) *$x \in A$ heißt* innerer Punkt *einer Menge $A \subset X$, wenn es eine offene Kugel um x gibt, die ganz in A liegt.*
(c) *Die Menge aller inneren Punkte von $A \subset X$ heißt das* Innere *oder der* offene Kern *von A. Notation: $\overset{\circ}{A}$, A°,* $\mathrm{Int}(A)$.
(d) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* offen, *wenn $A^\circ = A$ ist.*
(e) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen *in X, wenn $A^c := X \backslash A$ offen ist.*
(f) *Eine Menge $U \subset X$ heißt* offene Umgebung *von x, wenn $x \in U$ und U offen ist.*
(g) *Eine Menge $U \subset X$ heißt* Umgebung *von x, wenn U eine offene Umgebung von x enthält.*
(h) *x heißt* Randpunkt *von $A \subset X$, wenn jede offene Kugel um x sowohl Punkte aus A als auch aus A^c enthält, d.h. $B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A^c$ für alle $r > 0$.*
(i) *Die Menge aller Randpunkte von A heißt* Rand *von $A \subset X$ und wird mit ∂A oder $\partial(A)$ bezeichnet. Die Menge $\overline{A} := A \cup \partial A$ heißt* Abschluss *von A.*
(j) *Man sagt, dass eine Menge $A \subset X$ in X dicht liegt, falls $\overline{A} = X$.*

Bemerkungen. (1) *X und $\emptyset$ sind zugleich offen und abgeschlossen in (X,d). Im $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik sind diese Mengen die einzigen, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Im diskreten metrischen Raum (X,d) ist jede Teilmenge $A \subset X$ offen und abgeschlossen.*
(2) *Im Allgemeinen gilt nicht $\overline{B_r(x)} = K_r(x)$. Beispiel: Sei (X,d) der diskrete metrische Raum, wähle $r = 1$. $B_1(x) = \{x\}$ und somit ist $\overline{B_1(x)} = \{x\}$, aber $K_1(x) = X$.*
(3) *A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, d.h.*

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{B \text{ offen},\\ B\subset A}} B$$

Analog dazu ist $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \text{ abgeschlossen,} \\ B \supset A}} B.$$

1.2. Normierte Räume

DEFINITION 1.3. *Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt eine* Norm *auf X, wenn gilt:*

(a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Positivität)*
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \ \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ *(positive Homogenität)*
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung)*

$(X, \|\cdot\|)$ *heißt* normierter Raum. *Falls nur die letzten beiden Eigenschaften erfüllt sind, heißt* $\|\cdot\|$ Halbnorm *und* $(X, \|\cdot\|)$ *heißt* halbnormierter Raum.

BEISPIELE. (1) *Die Menge $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ aller beeschränkten Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit $\|x\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$ ist ein normierter Raum.*

(2) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Betrachte*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig }\}, \\ \mathcal{C}_b(\Omega; \mathbb{K}) = \mathcal{C}_b(\Omega) &:= \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid f \text{ beschränkt, das heißt} \\ &\qquad \text{zu jedem } f \text{ gibt es ein } \quad k_f > 0 : |f(x)| \leq k_f \ \forall\, x \in \Omega\} \end{aligned}$$

mit

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Es gilt:

- *Der Vektorraum $(\mathcal{C}_b(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum.*
- *Der Vektorraum $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ist im Allgemeinen kein normierter Raum. Beispiel: $\Omega = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Dann ist*
  $$\|f\|_\infty = \sup_{x \in (0,1)} \frac{1}{x} = \infty.$$
- *Ist Ω kompakt, so ist $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.*

(3) *Für $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\mathcal{L}^p([0,1]) := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{K} \text{ messbar} \,\middle|\, \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $[0, 1]$. Betrachte

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \qquad f \in \mathcal{L}^p([0,1]).$$

Dann ist $(\mathcal{L}^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ ein halbnormierter Raum. Insbesondere ist $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.

SATZ 1.4. *Sei X ein Vektorraum. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so ist $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik und (X, d) ist ein metrischer Raum. Man nennt d die von* $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

BEWEIS klar.

Im Allgemeinen gilt die Umkehrung von Satz 1.4 nicht. Beispiel: Diskrete Metrik auf einem Vektoraum X.

BEMERKUNGEN. (1) *Auf jedem Vektorraum kann stets eine Norm definiert werden (ohne Beweis).*

(2) *In jedem normierten Raum gilt* $\overline{B_r(x)} = K_r(x)$.

(3) *In jedem normierten Raum folgt aus der Inklusion* $K_{r_2}(x_2) \subsetneq K_{r_1}(x_1)$, *dass* $r_2 < r_1$. *In allgemeinen metrischen Räumen gilt dies nicht. Als Beispiel betrachten wir den metrischen Raum* (X, d) *mit* $X = \mathbb{N}$ *und*

$$d(n, m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|.$$

d ist eine Metrik, denn

- $d(n, m) \geq 0$ *und* $d(n, m) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow n = m$,
- $d(n, m) = d(m, n)$,
- $d(n, m) \leq |\frac{1}{n} - \frac{1}{l}| + |\frac{1}{l} - \frac{1}{m}| = d(n, l) + d(l, m)$.

Es gilt $K_{3/4}(1) \subsetneq K_{1/2}(2)$, *denn*

$$K_{1/2}(2) = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{N},$$

$$K_{3/4}(1) = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \left|1 - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{3}{4}\right\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Noch ein wichtiges Beispiel eines normierten Raumes.

SATZ 1.5. *Sei* $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, *die Menge aller Zahlenfolgen* $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *mit* $x_j \in \mathbb{K}$ *so, dass* $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p$ *konvergiert. Dann ist* ℓ^p *ein Vektorraum und* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *mit* $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *ein normierter Raum.*

Für den Beweis benötigen wir zwei Hilfsergebnisse.

LEMMA 1.6 (Youngsche Ungleichung). *Seien* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b > 0$. *Dann ist*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

BEWEIS. Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x)$ ist konvex, d.h.

$$\exp(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^y$$

gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Wähle

$$\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - \lambda = \frac{1}{q}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\log a + \log b) \\ &= \exp(\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\log a^p) + \frac{1}{q}\exp(\log b^q) \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

□

LEMMA 1.7 (Höldersche Ungleichung). *Seien* $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann gilt für beliebige Folgen* $(x_j) \in \ell^p$ *und* $(y_j) \in \ell^q$*:*

$$(x_j y_j) \in \ell^1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

BEWEIS. O.B.d.A. sei $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \neq 0$ und $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \neq 0$. Setze

$$x_j' := \frac{x_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad y_j' := \frac{y_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Offenbar gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j'|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j'|^q = 1.$$

Aus Lemma 1.6 folgt für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |x_j' y_j'| &= \sum_{j=1}^{n} |x_j'| |y_j'| \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} |x_j'|^p + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} |y_j'|^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (1.1) folgt nun mit dem Grenzübergang $n \to \infty$. □

BEWEIS VON SATZ 1.5. (a) und (b) aus Definition 1.3 sind klar. Ist $p = 1$, so ist die Dreiecksungleichung (c) ebenfalls klar. Wir beweisen (c) für $p > 1$.

Zu zeigen ist also die *Minkowski-Ungleichung*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen

$$(|x_j| + |y_j|)^p = |x_j| \left(|x_j| + |y_j| \right)^{p-1} + |y_j| \left(|x_j| + |y_j| \right)^{p-1}$$

erhalten wir mit $q := p/(p-1) > 1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^{(p-1)\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\qquad + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^{(p-1)\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j+y_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt die Minkowski-Ungleichung. Insbesondere ist $(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j) \in \ell^p$, also ist ℓ^p ein Vektorraum. □

Definition 1.8. *Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum X heißen* äquivalent, *wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $c\|x\| \leq \|x\|' \leq \frac{1}{c}\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.*

Offenbar kann die Ungleichung in der Definition als $c\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{c}\|x\|'$ dargestellt werden.

Proposition 1.9. *Alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind äquivalent.*

Beweis selbst.

1.3. Konvergenz und Vollständigkeit

Definition 1.10. *Eine Folge (x_n), $x_n \in X$, in einem metrischen Raum (X, d) heißt* konvergent *gegen $x \in X$, wenn gilt: $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

BEMERKUNGEN. (a) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

(b) *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum,* (x_n) *und* (y_n) *konvergente Folgen in* X *mit Grenzwerten* x *bzw.* y, (λ_n) *eine konvergente Zahlenfolge in* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *mot Grenzwert* λ*. Dann gelten folgende Rechenregel:*
- $x_n + y_n \to x + y$,
- $\lambda_n x_n \to \lambda x$,
- $\|x_n\| \to \|x\|$ *(Folgenstetigkeit der Norm).*

SATZ 1.11. *Es sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Eine Teilmenge* $A \subset X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus* A *wieder in* A *liegt.*

BEWEIS selbst.

DEFINITION 1.12. *Eine Folge* (x_n) *in* (X, d) *heißt* Cauchyfolge*, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert so, dass* $d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$ *gilt. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt* vollständig*. Ein normierter Raum, der bezüglich der induzierten Metrik vollständig ist, heißt* Banachraum*.*

BEISPIELE. (1) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ *mit* $\|f\|_p := (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$*, ist kein Banachraum! Betrachte dazu die Funktionenfolge* (f_n) *aus* $\mathcal{C}([0,1])$ *mit*

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Offenbar existiert der punktweise Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nun gilt

$$\int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1 \, dx = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Wegen

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |f_m(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ist (f_n) *eine Cauchyfolge in* $\mathcal{C}([0,1])$*. Angenommen, es existiert eine Funktion* $\widetilde{f} \in \mathcal{C}([0,1])$ *mit* $\|f_n - \widetilde{f}\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$*. Mit*

$$\left(\int_0^1 |f(x) - \widetilde{f}(x)|^p dx \right)^{1/p}$$
$$\leq \left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |f_n(x) - \widetilde{f}(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ist dann

$$\int_0^{1/2} |\widetilde{f}(x)|^p dx + \int_{1/2}^1 |1 - \widetilde{f}(x)|^p dx = \int_0^1 |f(x) - \widetilde{f}(x)|^p dx = 0,$$

also da $\widetilde{f}$ *stetig ist,* $\widetilde{f}(x) = 0$ *für* $x \in [0, 1/2]$ *und* $\widetilde{f}(x) = 1$ *für* $x \in [1/2, 1]$. *Widerspruch!*

(2) *Sind zwei Normen* $\|\cdot\|$ *und* $\|\cdot\|'$ *auf einem Vektorraum äquivalent (s. Definition 1.8), dann ist* $(X, \|\cdot\|)$ *genau dann ein Banachraum, wenn* $(X, \|\cdot\|')$ *ein Banachraum ist.*

(3) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, *mit* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *und* $\|x\|_p := (\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$ *und* $\|x\|_\infty := \max\limits_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$ *ist ein Banachraum. Für* $p = 2$ *ist die Aussage aus Analysis bekannt. Für* $p \neq 2$ *folgt die Aussage aus Proposition 1.9.*

(4) (X, d) *mit der diskreten Metrik ist vollständig. Beweis: Sei* (x_n) *eine Cauchyfolge, d.h. zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \ge n_0$. *Wähle ein* $\varepsilon < 1$. *Dann gilt* $d(x_n, x_m) = 0$ $\forall n, m \ge n_0$. *Folglich ist* $x_n = x_m$ $\forall n, m \ge n_0$. *Somit ist die Folge* (x_n) *konvergent.*

(5) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *mit* $\|x\|_p := (\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$, *ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei (x_n) *eine Cauchyfolge in* ℓ^p, $x_n = (\xi_{j,n})_{j \in \mathbb{N}}$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *so, dass*

$$\begin{aligned} |\xi_{j,n} - \xi_{j,m}| &\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k,n} - \xi_{k,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon \ \forall n, m \ge N \ \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Also ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ *die Folge* $(\xi_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{K}$, *also* $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_{j,n}$ *existiert. Wir bezeichnen den Grenzwert mit* $\xi_j \in \mathbb{K}$. *Betrachte die Folge* $x := (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. *Sei* $n \ge N$ *und* $k \in \mathbb{N}$ *beliebig. Wegen der Abschätzung*

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_{j,n} - \xi_j|^p = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{k} |\xi_{j,n} - \xi_{j,m}|^p \le \limsup_{m \to \infty} \|x_n - x_m\|^p \le \varepsilon^p \tag{1.2}$$

liegt die Differenz $x_n - x$ *in* ℓ^p. *Folglich ist* $x \in \ell^p$. *Nun folgt aus (1.2) die Ungleichung* $\|x_n - x\|_p \le \varepsilon$. *Also ist die Folge* (x_n) *konvergent.*

(6) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *mit* $\|x\|_\infty := \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$ *ist ein Banachraum.* Beweis *selbst.*

(7) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *mit* $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ *ist ein Banachraum.* Beweis *selbst.*

(8) $(\mathcal{C}^p([0,1]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^p})$ *mit* $\|f\|_{\mathcal{C}^p} := \sum\limits_{j=0}^{p} \|f^{(j)}\|_\infty$ *ist ein Banachraum,* $p \in \mathbb{N}_0$.

(9) *Für* $p \in \mathbb{N}_0$, $0 < \gamma \le 1$ *ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{p,\gamma}([0,1]) := \{ f \in \mathcal{C}^p([0,1]) \,|\, &\text{es gibt ein} \quad C > 0 \quad \text{so, dass} \\ &|f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)| \le C|x - y|^\gamma \quad \text{für alle} \quad x, y \in [0,1] \} \end{aligned}$$

mit

$$\|f\|_{C^{p,\gamma}} := \sum_{j=0}^{p} \|f^{(j)}\|_\infty + \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

der Banachraum der Funktionen in $C^p([0,1])$*, deren Ableitungen von der Ordnung p Hölder-stetig mit Exponent* $\gamma < 1$ *bzw. Lipschitz-stetig* ($\gamma = 1$) *sind.*

(10) *Der metrische Raum aus Beispiel (4) nach Definition 1.1 ist vollständig.*

SATZ 1.13 (Schachtelungsprinzip oder der Satz von Cantor). *Ein metrischer Raum* (X,d) *ist genau dann vollständig, wenn für jede geschachtelte Folge*

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots$$

von abgeschlossenen Kugeln $K_k = \{x \in X | d(x,y) \leq r_k \quad \text{für ein} \quad y \in X\}$ *mit* $r_k \to 0$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$ *ist.*

BEISPIEL. $((0,1), |\cdot|)$ *ist nicht vollstänig. Es ist* $K_{1/k}(1/k) = (0, 2/k]$, $k \in \mathbb{N}$*, also* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} K_{1/k}(1/k) = \emptyset$.

BEMERKUNGEN. (1) *Der Durchschnitt enthält höchstens ein Element. Beweis: Angenommen, es gibt zwei Elemente x und y, die in allen* K_k *liegen. Dann gilt* $d(x,y) \leq 2r_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Folglich ist* $d(x,y) = 0$*. Also ist* $x = y$.

(2) *Die Voraussetzung* $r_k \to 0$ *kann im Allgemeinen nicht weggelassen werden. Betrachte den metrischen Raum* $(\mathbb{N}, d)$ *aus Beispiel 3 nach Definition 1.1, d.h.*

$$d(n,m) := \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, & n \neq m. \end{cases}$$

Der metrische Raum $(\mathbb{N}, d)$ *ist vollständig: Ist* (n_k) *eine Cauchyfolge, so gibt es zu jedem* $0 < \varepsilon < 1$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *so, dass* $d(n_k, n_l) < \varepsilon$ *für alle* $k, l \geq N$*. Folglich gilt für alle* $k, l \geq N$ *mit* $n_k \neq n_l$:

$$1 + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_j} < \varepsilon.$$

Wegen $\varepsilon < 1$ *folgt daraus, dass* $n_k = n_l$ *für alle* $k, l \geq N$ *ist.*

Nun betrachten wir die Folge von geschachtelten Kugeln mit Radien $r_n = 1 + \frac{2}{n} > 1$:

$$\begin{aligned} K_n &:= \{m \in \mathbb{N} \,|\, d(m,n) \leq 1 + \frac{2}{n}\} \\ &= \{n\} \cup \left\{m \in \mathbb{N} \,|\, 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 1 + \frac{2}{n}\right\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \geq n\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$.

(3) *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so hat jede geschachtelte Folge von abgeschlossenen Kugeln (ohne Voraussetzung $r_k \to 0$) nichtleeren Durchschnitt. Beweis selbst.*

Beweis von Satz 1.13. „$\Rightarrow$" Seien $y_k \in X$ Mittelpunkte von K_k. Es gilt

$$d(y_n, y_m) \leq r_n \quad \text{für} \quad m \geq n.$$

Folglich ist (y_n) eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit ist sie konvergent. Sei y ihr Grenzwert. Wähle ein $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Kugel K_k enthält unendlich viele Folgenglieder $y_k, y_{k+1}, \ldots$ Da K_k abgeschlossen ist, folgt mit Satz 1.11, dass $y \in K_k$. Also ist $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_k$.

„$\Leftarrow$" Sei (x_n) eine beliebige Cauchyfolge. Wähle ein Folgenglied $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_1.$$

Sei $K_1 := \{x \in X | d(x, x_{n_1}) \leq 1\}$. Wähle nun ein $n_2 > n_1$ so, dass

$$d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{4} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_2$$

und setze $K_2 := \{x \in X | d(x, x_{n_2}) \leq \frac{1}{2}\}$. Wähle allgemein ein $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$ so, dass $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ für alle $n \geq n_k$ und setze $K_k := \{x \in X | d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$.

Behauptung: $K_k \subset K_{k-1}$.

Beweis. Sei $x \in K_k$ beliebig. Dann ist $d(x, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Aus der Abschätzung

$$d(x, x_{n_{k-1}}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}$$

folgt $x \in K_{k-1}$. $\boxed{\text{B}}$

Sei $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_k$. Die Folge $(x_{n_k})_k$ konvergiert gegen x. Also ist sie eine konvergente Teilfolge einer Cauchyfolge. Somit konvergiert auch die Folge (x_n) gegen x. □

Satz 1.13 besitzt auch die folgende Variante. Mit $\operatorname{diam}(M)$ bezeichnen wir den *Durchmesser* einer nichtleeren Teilmenge M des metrischen Raumes (X, d),

$$\operatorname{diam}(M) := \sup_{x,y \in M} d(x, y).$$

Satz 1.14. *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann vollständig, wenn für jede geschachtelte Folge*

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots$$

von abgeschlossenen nichtleeren Mengen M_k mit $\operatorname{diam}(M_k) \to 0$ der Durchschnitt $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k$ nicht leer ist. Ist dieser Durchschnitt nicht leer, so besteht er genau aus einem Element.

Beweis selbst.

In Satz 1.14 kann die Voraussetzung $\operatorname{diam}(M_k) \to 0$ nicht weggelassen werden, sogar dann, wenn X ein normierter Raum ist (dazu später mehr).

Definition 1.15. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Der metrischer Raum $(A, d|_{A\times A})$, $A \subset X$, heißt* Unterraum *oder* Teilraum *des metrischen Raumes (X, d). Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so heißt $(A, \|\cdot\|)$ Teilraum, wenn $A \subset X$ ein Vektorraum ist.*

Satz 1.16. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:*

(a) *Ist der Unterraum $(A, d|_{A\times A})$ vollständig, so ist A abgeschlossen in (X, d).*
(b) *Ist A abgeschlossen in (X, d) und (X, d) vollständig, so ist $(A, d|_{A\times A})$ vollständig.*

Beweis. (a) Sei (x_n), $x_n \in A$, konvergnt gegen $x \in X$. Dann ist (x_n) Cauchyfolge in (X, d), also auch in $(A, d|_{A\times A})$. Da $(A, d|_{A\times A})$ nach Voraussetzung vollständig ist und der Grenzwert eindeutig ist, folgt $x \in A$.

(b) Sei (x_n) eine Cauchyfolge in $(A, d|_{A\times A})$. Dann ist (x_n) auch Cauchyfolge in (X, d). Also konvergiert (x_n) nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in A$. □

Beispiele. (1) *Es sei $c = c(\mathbb{N})$ die Menge aller konvergenten Zahlenfolgen $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_j \in \mathbb{K}$ und $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ die Teilmenge aller Nullfolgen. Offenbar gilt $c_0 \subset c$. Die normierten Räume $(c, \|\cdot\|_\infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sind abgeschlossene Teilräume von $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (Beweis selbst). Nach Satz 1.16 sind $(c, \|\cdot\|_\infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ Banachräume.*

(2) *Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $\ell^p \subset c_0$. ℓ^p ist nicht abgeschlossen in c_0. Es gilt $\overline{\ell^p} = c_0$.*

1.4. Kompaktheit

Definition 1.17. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(a) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* kompakt, *wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*
(b) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* folgenkompakt, *wenn jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element $x \in A$ konvergiert.*
(c) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* relativ kompakt, *wenn der Abschluss $\overline{A}$ von A kompakt ist.*
(d) *Eine Menge $A \subset X$ heißt* total beschränkt *(oder* präkompakt*), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Kugeln vom Radius ε gibt, die die Menge A überdecken.*

Ist $A = X$, so spricht man von einem kompakten, folgenkompakten oder total beschränkten metrischen Raum. Umgekehrt ist $A \subset X$ kompakt, folgenkompakt oder total beschränkt, wenn $(A, d|_{A\times A})$ kompakt, folgenkompakt oder total beschränkt ist.

Satz 1.18. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *(X, d) ist kompakt,*

(b) (X,d) *ist folgenkompakt,*
(c) (X,d) *ist total beschränkt und vollständig.*

Insbesondere ist jeder kompakte metrische Raum vollständig.

Beweis. (a)⇒(b): Sei (x_n) eine Folge in X. Angenommen, (x_n) besitze keine konvergente Teilfolge, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$ so, dass nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B_{\varepsilon_x}(x)$ existieren. Die Überdeckung $\{B_{\varepsilon_x}(x) | x \in X\}$ von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung. In dieser Teilüberdeckung liegen nur endlich viele Folgenglieder. Widerspruch!

(b)⇒(c): Sei (x_n) eine Cauchyfolge in X. Nach der Voraussetzung besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge und somit ist sie selbst konvergent. Folglich ist der metrische Raum (X,d) vollständig.

Angenommen, (X,d) sei nicht total beschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass jede Überdeckung von X mit offenen Kugeln vom Radius ε unendlich ist.

Sei $x_1 \in X$ beliebig. Wähle nun induktiv $x_{k+1} \in X$, $k \in \mathbb{N}$, mit $x_{k+1} \in X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k} B_\varepsilon(x_j)$. Insbesondere gilt $d(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon$ für alle $j = 1, \ldots, k$. Folglich ist $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ für alle $j \neq k$. Also hat die Folge (x_n) keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

(c)⇒(a): Angenommen, $\{A_i\}_{i\in I}$ wäre eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Wir komstruieren nun iduktiv eine geschachtelte Folge

$$X \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$$

mit folgenden igenschaften:

(i) $M_k \neq \varnothing$ ist abgeschlossen,
(ii) $\operatorname{diam}(M_k) \leq 2/k$,
(iii) M_k wird nicht durch endlich viele A_j überdeckt.

Dazu:

$k = 1$: Nach Voraussetzung gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_1(x_i)$. Folglich existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\overline{B_1(x_i)}$ nicht von endlich vielen A_j überdeckt wird. Setze $M_1 := \overline{B_1(x_i)}$.

$k \to k+1$: Seien $M_1, \ldots, M_k$ bereits konstruiert. Dann gibt es $y_1, \ldots, y_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{1}{k+1}}(y_i)$. Also gilt $M_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\frac{1}{k+1}}(y_i) \cap M_k$. Nach (iii) gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $B_{\frac{1}{k+1}}(y_i) \cap M_k$ nicht von endlich vielen A_j überdeckt wird. Setze $M_{k+1} := \overline{M_k \cap B_{\frac{1}{k+1}}(y_i)} \neq \varnothing$.

Nach Satz 1.14 gibt es ein $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Also ist $x \in A_j$ für ein $j \in I$. Da A_j offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset A_j$. Folglich ist $x \in M_k \subset B_r(x) \subset A_j$ für $2/k < r$. Widerspruch! □

Definition 1.19. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* beschränkt, *wenn A in einer offenen Kugel enthalten ist, d.h. $A \subset B_r(x)$ für ein $r > 0$ und in $x \in X$.*

SATZ 1.20. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $A \subset X$ kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.*

BEWEIS. Sei (x_n), $x_n \in A$, eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in X$. Da $(A, d|_{A\times A})$ folgenkompakt ist, gilt $x \in A$. Mit Satz 1.11 folgt, dass A abgeschlossen ist.

Die Menge A ist total beschränkt. Endliche Vereinigungen von offenen Kugeln sind beschränkt. Daher ist A beschränkt. □

Die Umkehrung von Satz 1.20 ist im Allgemeinen falsch (vgl. Satz 1.22 unten): Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge braucht nicht kompakt zu sein.

BEISPIELE. (1) *In $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ ist die abgeschlossene Kugel*

$$K_1(0) = \left\{ x = (x_j) \in \ell^2 \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \le 1 \right\}$$

nicht kompakt (aber beschränkt und abgeschlossen). Um das zu zeigen betrachten wir die Folge (e_n), $e_n \in \ell^2$, mit:

$$(e_n)_j = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ für alle $n \neq m$. Somit enthält (e_n) keine konvergente Teilfolge.

(2) *Die Menge $A := \{x = (x_n) \in \ell^2 \,|\, |x_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt, denn sie ist nicht beschränkt. Für den Beweis betrachten wir die Folge*

$$x^{(n)} := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} e_m \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alle Folgenglieder liegen in A, denn

$$x_m^{(n)} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \frac{1}{\sqrt{m}}, & n \ge m. \end{cases}$$

Wegen

$$\|x^{(n)}\|_2^2 = \sum_{m=1}^{n} |x_m^{(n)}|^2 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

ist die Menge A nicht beschränkt und somit nach Satz 1.20 nicht kompakt.

(3) *Die Menge $\{x = (x_n) \in \ell^2 \,|\, |x_n| \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ (Hilbert-Kubus) ist kompakt.* BEWEIS *selbst.*

(4) *Der metrische Raum aus Beispiel (4) nach Definition 1.1 ist kompakt.* BEWEIS *selbst.*

(5) *Eine Teilmenge $A \subset \ell^p$, $1 \le p < \infty$, ist relativ kompakt genau dann, wenn A beschränkt ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in A.$$

BEWEIS *selbst.*

(6) *Eine Teilmenge $A \subset c_0$ ist relativ kompakt genau dann, wenn eine Folge $(\lambda_n) \in c_0$ existiert so, dass $|x_n| \leq |\lambda_n|$ für alle $x \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.* BEWEIS *selbst.*

SATZ 1.21. *Eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$" Klar nach Satz 1.20
„$\Leftarrow$" Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Offenbar ist $\{\{U_i\}_{i\in I}, A^c\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \dots, U_n, A^c\}$. Somit ist $\{U_1, \dots, U_n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. Folglich ist A kompakt. $\square$

SATZ 1.22. *In jedem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist der abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ genau dann kompakt, wenn X endlich dimensional ist.*

Für den Beweis brauchen wir zwei Hilfsergebnisse.

LEMMA 1.23. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein endlich dimensionaler Teilraum. Dann gilt:*

(a) *$(Y, \|\cdot\|)$ ist vollständig. Insbesondere ist Y abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$.*
(b) *Die abgeschlossene Einheitskugel in $(Y, \|\cdot\|)$ ist kompakt.*

BEWEIS. Sei $\{e_1, ..., e_m\}$ eine Basis von Y. Für $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ setze

$$\|\xi\|_{\mathbb{K}^n} := \|x\|, \quad \text{wo} \quad x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in Y.$$

Dann ist $\|\cdot\|_{\mathbb{K}^n}$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.

(a) Mit Proposition 1.9 ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n})$ vollständig. Somit ist auch $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig. Nach Satz 1.16 (a) ist Y abgeschlossen in $(X, \|\cdot\|)$.

(b) $K_1(0) \subset Y$ ist kompakt in $(Y, \|\cdot\|)$ genau dann, wenn $K_1(0) \subset \mathbb{K}^n$ kompakt in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{K}^n})$ ist. Letzteres gilt aber wegen Proposition 1.9 und dem Satz von Heine-Borel. $\square$

LEMMA 1.24 (Das Rieszsche Lemma). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subsetneq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann gibt es zu jedem $0 < \Theta < 1$ ein $x_\Theta \in X$ mit $\|x_\Theta\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_\Theta, Y) := \inf_{y\in Y} \|x_\Theta - y\| \geq \Theta$.*

BEWEIS. Wähle ein $x \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen ist, gilt $\operatorname{dist}(x, Y) > 0$. Da $\Theta < 1$ gibt es ein $y_\Theta \in Y$ mit

$$0 < \|x - y_\Theta\| \leq \frac{1}{\Theta}\operatorname{dist}(x, Y).$$

Setze

$$x_\Theta := \frac{x - y_\Theta}{\|x - y_\Theta\|} \Rightarrow \|x_\Theta\| = 1.$$

Dann gilt für alle $y \in Y$:

$$\|x_\Theta - y\| = \left\| \frac{x - y_\Theta}{\|x - y_\Theta\|} - y\frac{\|x - y_\Theta\|}{\|x - y_\Theta\|} \right\| = \frac{1}{\|x - y_\Theta\|}\|x - (y_\Theta + y\|x - y_\Theta\|)\|.$$

Aus $y_\Theta + y\|x - y_\Theta\| \in Y$ folgt

$$\|x_\Theta - y\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x,Y)}{\|x - y_\Theta\|} \geq \frac{\operatorname{dist}(x,Y)}{\frac{1}{\Theta}\operatorname{dist}(x,Y)} = \Theta$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{dist}(x_\Theta, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_\Theta - y\| \geq \inf_{y\in Y} \Theta = \Theta.$$

□

Beweis von Satz 1.22. „$\Leftarrow$“ Folgt aus Lemma 1.23 (b) mit $Y = X$.

„$\Rightarrow$“ Nach der Voraussetzung ist $K_1(0)$ kompakt. Daher gibt es eine endliche Überdeckung $\{B_{1/2}(y_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ von $K_1(0)$. Sei Y der von $y_1, \ldots, y_n$ aufgespannte lineare Raum, $Y := \operatorname{lin}\{y_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Nach Lemma 1.23 (a) ist Y abgeschlossen.

Wir zeigen nun, dass $X = Y$ ist. Angenommen, $Y \subsetneq X$. Dann folgt aus Lemma 1.24, dass zu jedem $1/2 \leq \Theta < 1$ ein $x_\Theta \in X$ existiert so, dass $\|x_\Theta\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_\Theta, Y) \geq \Theta \geq \frac{1}{2}$ ist. Wegen $K_1(0) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{1}{2}}(y_i)$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x_\Theta \in B_{\frac{1}{2}}(y_j) \Rightarrow \|x_\Theta - y_j\| < \frac{1}{2}, y_j \in Y$. Folglich ist $\operatorname{dist}(x_\Theta, Y) < \frac{1}{2}$. Widerspruch! Somit ist $X = Y$ endlich dimensional. □

1.5. Abbildungen metrischer Räume

Definition 1.25. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.*

(a) *$f : X \to Y$ heißt* stetig *in $x_0 \in X$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.*
(b) *$f : X \to Y$ heißt* folgenstetig *in $x_0 \in X$, wenn für alle Folgen (x_j) in X mit $x_j \to x_0$ gilt: $d_Y(f(x_j), f(x_0)) \to 0$.*
(c) *$f : X \to Y$ heißt* stetig*, wenn f in allen Punkten von X stetig ist.*
(d) *$f : X \to Y$ heißt* gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$.*

Satz 1.26. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \to Y$.*

(a) *Für $x_0 \in X$ sind äquivalent:*
   (1) *f ist stetig in $x_0 \in X$,*
   (2) *f ist folgenstetig in x_0,*
   (3) *Für jede Umgebung U von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0.*
(b) *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*
   (1) *f ist stetig,*
   (2) *Für jedes $U \subset Y$ offen ist $f^{-1}(U)$ offen,*
   (3) *Für jedes $U \subset Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(U)$ abgeschlossen.*

Beweis selbst.

Bemerkung. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jedes $a \in X$ ist dann $d(\cdot, a) : X \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist insbesondere $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ stetig.*

Definition 1.27. *Für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) seien*

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig auf } X\}$$

und

$$\mathcal{C}_b(X,Y) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(X) \text{ ist beschränkt in } (Y, d_Y)\}.$$

Falls $Y = \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, *mit* $d_Y(x,y) = |x-y|$, *so schreibt man* $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *und* $\mathcal{C}_b(X) := \mathcal{C}_b(X,\mathbb{K})$.

Mit

$$d_{\mathcal{C}_b(X;Y)}(f,g) := \sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) < \infty, \quad f,g \in \mathcal{C}_b(X;Y),$$

wird $(\mathcal{C}_b(X;Y), d_{\mathcal{C}_b(X;Y)})$ zu einem metrischen Raum. Ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, so ist $(\mathcal{C}_b(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_b(X;Y)})$ mit

$$\|f\|_{\mathcal{C}_b(X;Y)} := \sup_{x\in X} \|f\|_Y, \quad f \in \mathcal{C}_b(X;Y),$$

ein normierter Raum. Ist (Y, d_Y) vollständig bzw. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum, so ist $(\mathcal{C}_b(X;Y), d_{\mathcal{C}_b(X;Y)})$ vollständig bzw. $(\mathcal{C}_b(X;Y), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_b(X;Y)})$ ein Banachraum.

SATZ 1.28. *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume. Sei* (X, d_X) *kompakt und* $f : X \to Y$ *stetig. Dann gilt:*

(a) $f(X) \subset Y$ *ist kompakt; insbesondere ist* $\mathcal{C}_b(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$,
(b) f *ist gleichmäßig stetig.*

BEWEIS. (a) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1,\dots,n}$ eine endliche Teilüberdeckung. Somit ist $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$.
(b) selbst. □

DEFINITION 1.29. *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume. Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* Lipschitz-stetig, *wenn es ein* $L > 0$ *gibt mit* $d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x,x')\ \forall\, x, x' \in X$. *Wenn* $X = Y, L < 1$, *so heißt* f Kontraktion.

BEMERKUNG. *Eine Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig und insbesondere stetig.*

SATZ 1.30 (Der Banachsche Fixpunktsatz). *Es sei* (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \to X$ *eine Kontraktion. Dann hat* f *genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein* $\overline{x} \in X$ *so, dass* $f(\overline{x}) = \overline{x}$. *Die Folge der sukzessiven Approximationen*

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

konvergiert für alle Anfangswerte $x_0 \in X$ *gegen* $\overline{x}$. *Weiterhin gilt die Fehlerabschätzung*

$$d(x_k, \overline{x}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, f(x_0)). \tag{1.3}$$

BEMERKUNGEN. (1) *Ohne Vollständigkeit ist die Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes im Allgemeinen falsch. Als Beispiel betrachte* $X = (0,1)$ *mit* $d(x,y) := |x-y|$ *und* $f(x) := x/2$. *Offensichtlich ist* f *eine Kontraktion, hat aber keinen Fixpunkt.*

(2) *Für Abbildungen mit der Eigenschaft*

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x') \quad \text{für alle} \quad x, x' \in X, x \neq x', \tag{1.4}$$

gilt der Banachsche Fixpunktsatz im Allgemeinen nicht! Beispiel: Es sei $X = [1, \infty)$, $d(x, x') = |x - x'|$, $f(x) := x + \frac{1}{x}$. *Sei* $x \neq x'$. *Dann gilt die folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= \left| x - x' + \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| = \left| x - x' - \frac{x - x'}{xx'} \right| \\ &= |x - x'| \underbrace{\left(1 - \frac{1}{xx'}\right)}_{\in(0,1)} < |x - x'|. \end{aligned}$$

Die Funktion f *ist keine Kontraktion. Sie besitzt keinen Fixpunkt in* $[1, \infty)$, *denn die Gleichung* $x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ *hat keine Lösung.*

(3) *Ist* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum und* $f : X \to X$ *eine Abbildung, welche (1.4) erfüllt, so besitzt* f *genau einen Fixpunkt (Satz von Edelstein). Ein Beweis dieses Satzes ist in Abschnitt 1.10.2 vorgestellt.*

Beweis von Satz 1.30. Mit Induktion lässt sich leicht die Abschätzung

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

nachweisen. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\ &\leq d(x, f(x)) + Ld(x, y) + d(f(y), y). \end{aligned}$$

Somit erhält man die Ungleichung

$$d(x, y) \leq \frac{1}{1 - L} \left(d(x, f(x)) + d(f(y), y) \right). \tag{1.6}$$

Sind x, y Fixpunkte von f, so ergibt sich daraus die Gleichung $d(x, y) = 0$, also die Eindeutigkeit des Fixpunktes. Setzt man $x = x_{n+p}$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $y = x_n$, so erhält man mit (1.5):

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \frac{1}{1 - L} \left(d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + d(x_{n+1}, x_n) \right) \\ &\leq \frac{L^{n+p} + L^n}{1 - L} d(x_1, x_0) \leq CL^n, \end{aligned}$$

wobei $C := 2d(x_1, x_0)/(1 - L)$ ist. Die Folge (x_n) ist demnach eine Cauchyfolge, sie besitzt einen Grenzwert $\bar{x}$. Aus $x_n \to \bar{x}$ ergibt sich einerseits $f(x_n) \to f(\bar{x})$ wegen der Stetigkeit von f, andererseits $f(x_n) = x_{n+1} \to \bar{x}$. Damit haben wir gezeigt, dass $\bar{x}$ der Fixpunkt von f ist. Ungleichung (1.3) ergibt sich aus (1.6), wenn man dort $x = x_k$ und $y = \bar{x}$ setzt. $\square$

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes im Banachschen Fixpunktsatz kann auch mit Hilfe des Schachtelungsprinzipes (Satz 1.14) bewiesen werden.

Beweis. Sei

$$\phi(x) := d(x, f(x)), \qquad x \in X.$$

Für beliebige $x, y \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \phi(y) &= d(x, f(x)) - d(y, f(y)) \\
&\le d(x,y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) - d(y, f(y)) \\
&= d(x,y) + d(f(y), f(x)) \\
&\le (1+L)d(x,y).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Eine ähnliche Abschätzung für $\phi(y) - \phi(x)$ zusammen mit (1.7) liefert

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le (1+L)d(x,y),$$

d.h. ϕ ist stetig.

Sei

$$C_m := \{x \in X \mid \phi(x) \le 1/m\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Die Mengen C_m sind abgeschlossen, denn ϕ ist stetig. Wegen $\phi(f^m x) \le L^m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ sind alle C_m nicht leer.

Für beliebige $x, y \in C_m$ gilt

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\le d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\
&\le \phi(x) + Ld(x,y) + \phi(y) \\
&\le \frac{2}{m} + Ld(x,y)
\end{aligned}$$

und somit ist

$$d(x,y) \le \frac{2}{m(1-L)}.$$

Folglich ist $\operatorname{diam}(C_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Nach Satz 1.14 besteht der Durchschnitt $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} C_m$ genau aus einem Element z. Offenbar gilt $\phi(z) = 0$ und somit ist $f(z) = z$. □

Definition 1.31. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und sei $T : X \to Y$. T heißt* linear, *falls $T(x + x') = Tx + Tx'$, $T(\lambda x) = \lambda Tx$ für alle $x, x' \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt. In dem Fall heißt*

$$\|T\| = \|T\|_{X\to Y} := \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

die Norm *(oder* Operatornorm*) von T. Ist $\|T\| < \infty$, so heißt T* beschränkt. *Es sei*

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T \text{ linear und beschränkt}\}.$$

Für $Y = X$ schreibt man kurz $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$.

Lemma 1.32. *Seien X, Y, Z normierte Räume, $T : X \to Y, S : Y \to Z$ beschränkte lineare Abbildungen. Dann gilt:*

(a) $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X=1}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\le 1}} \|Tx\|_Y$,
(b) $\|Tx\|_Y \le \|T\|_{X\to Y}\|x\|$,
(c) $\|ST\|_{X\to Z} \le \|S\|_{Y\to Z} \cdot \|T\|_{X\to Y}$.

Beweis selbst.

Satz 1.33. *Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *T ist beschränkt,*
(b) *T ist Lipschitz stetig,*
(c) *T ist gleichmäßig stetig,*
(d) *T ist stetig,*
(e) *T ist im Nullpunkt stetig.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Die Aussage folgt aus Lemma 1.32(b) und Linearität.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e): klar.

(e) $\Rightarrow$ (a): Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X \leq \delta$ gilt $\|Tx\|_Y = \|Tx - T0\|_Y < \varepsilon = 1$. Zu beliebigem $x \in X$, $x \neq 0$, setze $x' := \delta \frac{x}{\|x\|_X}$. Wegen $\|x'\|_X = \delta$ gilt $\|Tx'\|_Y \leq 1$, d.h. $\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \dfrac{1}{\delta}$. Damit erhalten wir

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \frac{1}{\delta} < \infty.$$

□

Satz 1.34. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Dann ist $\mathcal{L}(X,Y)$ mit den Verknüpfungen $(T+S)(x) := Tx + Sx$ und $(\lambda T)(x) := \lambda Tx$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$, ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{X\to Y}$ definiert eine Norm auf $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Beweis. $\|\cdot\|_{X\to Y}$ ist eine Norm, denn

- $\|T\|_{X\to Y} = 0 \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|T\|_{X\to Y} \cdot \|x\|_X = 0 \quad \forall\, x \in X \Rightarrow T = 0$ (Nullabbildung),
- $\|(\alpha T)(x)\|_Y = |\alpha| \|Tx\|_Y \Rightarrow \|\alpha T\|_{X\to Y} = |\alpha| \|T\|_{X\to Y}$,
- $\|(T_1 + T_2)x\|_Y = \|T_1 x + T_2 x\|_Y \leq \|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y \leq \|T_1\| \cdot \|x\|_X + \|T_2\| \cdot \|x\|_X = (\|T_1\| + \|T_2\|)\|x\|_X \Rightarrow \|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

□

Bemerkung. *Mit der Multiplikation $(T_1 T_2)(x) := T_1(T_2 x)$ ist der Vektorraum $\mathcal{L}(X)$ eine Algebra. Ist $\mathcal{L}(X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{X\to X}$ vollständig, so heißt $\mathcal{L}(X)$* Banachalgebra.

Satz 1.35. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $X \neq \{0\}$ normierte Räume. $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{X\to Y})$ ist genau dann ein Banachraum, wenn Y einer ist.*

Für den Beweis der Hinrichtung benötigt man den Satz von Hahn-Banach (s. Kapitel 2). An dieser Stelle begnügen wir uns mit dem Beweis der Rückrichtung.

Beweis. ($\Leftarrow$) Sei (T_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X,Y)$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_k - T_l\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k, l \geq n. \tag{1.8}$$

Somit ist $(T_k x)_k$ eine Cauchyfolge für jedes $x \in X$. Da Y vollständig ist, existiert der Grenzwert $y(x) := \lim\limits_{k\to\infty} T_k x$ in Y.

Wir definieren die Abbildung $T : X \to Y$ durch $Tx := y(x)$. Diese Abbildung ist linear, denn

$$T(x+x') = \lim_{k\to\infty} T_k(x+x') = \lim_{k\to\infty} T_k x + \lim_{k\to\infty} T_k x' = Tx + Tx'$$

und

$$T(\alpha x) = \lim_{k\to\infty} T_k(\alpha x) = \alpha \lim_{k\to\infty} T_k x = \alpha T x.$$

Da jede Cauchyfolge beschränkt ist, existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass $\|T_k\| \le C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Folglich gilt

$$\|Tx\|_Y \overset{\text{Stetigkeit von } \|\cdot\|_Y}{=} \lim_{k\to\infty} \|T_k x\|_Y \le \limsup_{k\to\infty} \|T_k\|_{X\to Y}\|x\|_X \le C\|x\|.$$

Somit ist T beschränkt.

Nun zeigen wir, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \|T_k - T\|_{X\to Y} = 0$ gilt. Aus (1.8) folgt

$$\|(T_k - T_l)x\|_Y < \varepsilon\|x\|_X \quad \forall\, k,l \ge n.$$

Folglich gilt

$$\|T_k x - Tx\|_Y = \|T_k x - \lim_{l\to\infty} T_l x\|_Y = \lim_{l\to\infty} \|(T_k - T_l)x\|_Y \le \varepsilon\|x\|_X, \quad k \ge n,$$
$$\Rightarrow \|T_k - T\|_{X\to Y} \le \varepsilon, \quad k \ge n.$$

Da ε beliebig ist, konvergiert die Folge (T_k) gegen T. Somit ist der normierte Raum $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{X\to Y})$ vollständig. □

Definition 1.36. *Seien X, Y normierte Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ (nicht unbedingt linear) heißt* kompakt, *wenn $T(B)$ relativ kompakt ist, für alle beschränkten $B \subset X$. Die Gesamtheit aller kompakten, linearen Opertoren von X nach Y wird mit $\mathcal{K}(X,Y)$ bezeichnet, mit der üblichen Notation $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X,X)$.*

Bemerkungen.
(1) *Ist $T : X \to Y$ kompakt und linear, so ist T stetig.*
Beweis: *Sei $B = K_1(0) \subset X \Rightarrow T(B)$ ist relativ kompakt $\Rightarrow \overline{T(B)}$ ist kompakt $\Rightarrow \overline{T(B)}$ ist beschränkt $\Rightarrow \exists R > 0$ mit $\overline{T(B)} \subset B_R(0) \Rightarrow \|T\|_{X\to Y} = \sup\limits_{x\in K_1(0)} \|Tx\|_Y \le R \Rightarrow T$ ist stetig.*
(2) *Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist genau dann kompakt, wenn er beschränkte Folgen auf Folgen abbildet, die eine konvergente Teilfolge besitzen.*
Beweis *selbst.*

Proposition 1.37. *Sei $1 \le p < \infty$, $\lambda = (\lambda_n)$ eine Folge in ℓ^∞. Der Multiplikationsoperator*

$$M_\lambda : \ell^p \to \ell^p,\ x = (x_n) \mapsto (\lambda_n x_n)$$

besitzt folgende Eigenschaften:
(a) *M_λ ist linear und stetig,*
(b) *M_λ ist genau dann kompakt, wenn $\lambda \in c_0$ ist.*

Beweis selbst.

Satz 1.38. *Seien X, Y Banachräume.*
(a) *$\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(X,Y)$.*

(b) *Sei Z ein weiterer Banachraum. Sind $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ und ist T oder S kompakt, so ist auch ST kompakt.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{K}(X,Y)$ ein Vektorraum ist. Offensichtlich gilt: T kompakt $\Rightarrow \lambda T$ kompakt $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Seien nun $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Sei (x_n) eine beschränkte Folge in X. Dann gilt, dass (Sx_n) eine konvergente Teilfolge (Sx_{n_k}) besitzt. Wiederum besitzt nun (Tx_{n_k}) eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_{k_l}})$. Damit sind sowohl $(Tx_{n_{k_l}})$, als auch $(Sx_{n_{k_l}})$ konvergent, woraus die Konvergenz von $Sx_{n_{k_l}} + Tx_{n_{k_l}}$ folgt. Also ist $S+T$ kompakt.

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, betrachten wir eine Folge $(T_n) \subset \mathcal{K}(X,Y)$, mit $\|T_n - T\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sei hierzu (x_i) eine beschränkte Folge in X. Da T_n kompakt ist für alle $n \in \mathbb{N}$, finden wir sukzessiv Teilfolgen $(x_i^{(n+1)}) \subset (x_i^{(n)}) \subset \cdots \subset (x_i)$ so, dass $(T_n x_i^{(n)})$ konvergiert für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Diagonalverfahren konstruieren wir eine neue Folge (ξ_i) mit $\xi_i := x_i^{(i)}$.

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x_1^{(1)}} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \cdots \\ x_1^{(2)} & \mathbf{x_2^{(2)}} & x_3^{(2)} & \cdots \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & \mathbf{x_3^{(3)}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Damit gilt nun, dass die Folge $(T_n\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\|x_n\| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit auch $\|\xi_i\| \le 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T\| \le \varepsilon$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n\xi_i - T_n\xi_j\| \le \varepsilon \quad \forall i,j \ge i_0$. Dann folgt

$$\|T\xi_i - T\xi_j\| \le \underbrace{\|T\xi_i - T_n\xi_i\|}_{\le \|T-T_n\|\|\xi_i\| \le \varepsilon} + \underbrace{\|T_n\xi_i - T_n\xi_j\|}_{\le\varepsilon} + \underbrace{\|T_n\xi_j - T\xi_j\|}_{\le\varepsilon} \le 3\varepsilon.$$

Damit ist $(T\xi_i)$ ein Cauchy-Folge, welche aufgrund der Vollständigkeit von Y konvergiert. Also ist T kompakt.

(b) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in X.
Fall 1: Sei S kompakt. Die Folge (Tx_n) ist wieder beschränkt, also besitzt $(S(Tx_n))$ eine konvergente Teilfolge. Somit ist ST kompakt.
Fall 2: Sei T kompakt. Die Folge (Tx_n) besitzt eine konvergente Teilfolge. Aus der Folgenstetigkeit von S ergibt sich nun die Kompaktheit von ST. □

Korollar 1.39. *Sei X ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{K}(X)$ ein zweiseitiges Ideal in der Banachalgebra $\mathcal{L}(X)$.*

Bemerkung. *Aus der Kompaktheit von T^2 folgt nicht die Kompaktheit von T. Sei hierzu $X = c_0$ und $T : X \to X$, $(x_1, x_2, x_3 \cdots) \mapsto (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \cdots)$. Dann gilt $T^2 = 0$, also ist T^2 kompakt. Wegen*

$$Te_{2n-1} = e_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt

$$\{Te_{2n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset T(\overline{B_1(0)})$$

Da $\|e_{2n} - e_{2k}\|_\infty = 1$ *für alle* $n \neq k$ *ist, is die Menge* $\{e_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nicht kompakt. Folglich ist* $T(\overline{B_1(0)})$ *nicht kompakt. Also ist* T *nicht kompakt.*

KOROLLAR 1.40. *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*. Existiert eine Folge* (T_n) *in* $\mathcal{L}(X, Y)$ *mit* $\dim \operatorname{Bild}(T_n) < \infty$ *und* $\|T_n - T\| \to 0$*, so ist* T *kompakt.*

BEWEIS. Wegen Lemma 1.23 (b) ist jedes T_n kompakt und $\mathcal{K}(X, Y)$ ist abgeschlossen nach Satz 1.38 (a). □

Im Allgemeinen gilt die Umkehrung der Aussage in Korollar 1.40 nicht. Jedoch ist unter zusätzlichen Voraussetzungen die folgende Aussage richtig:

PROPOSITION 1.41. *Sei* X *ein Banachraum und* Y *ein Banachraum mit der Eigenschaft:*

- *Es existiert eine beschränkte Folge von Operatoren* $S_n \in \mathcal{L}(Y)$ *mit endlichdimensionalem Bild so, dass*

$$\lim_{n\to\infty} S_n y = y \quad \forall y \in Y.$$

Dann existiert zu jedem $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ *eine Folge* (T_n) *in* $\mathcal{L}(X, Y)$ *mit* $\dim \operatorname{Bild}(T_n) < \infty$ *und* $\|T_n - T\| \to 0$.

BEWEIS selbst.

1.6. Satz von Arzelà-Ascoli

DEFINITION 1.42. *Sei* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum und* $A \subset \mathcal{C}(X)$*. Die Menge* A *heißt* gleichgradig stetig, *falls* $\sup_{f\in A} |f(x) - f(y)| \to 0$ *für* $x, y \in X$ *mit* $d(x, y) \to 0$.

BEISPIELE. *Es sei* $X = [0, 1]$ *mit* $d(x, y) = |x - y|$.

(1) *Die Menge*

$$A_M := \{f \in \mathcal{C}^1(X) \mid |f'(x)| \leq M\} \subsetneq \mathcal{C}^1(X)$$

ist gleichgradig stetig, denn für $x, y \in [0, 1]$ *folgt aus dem Mittelwertsatz:*

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi) \quad \text{für ein} \quad \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } 1.$$

Folglich ist $|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M|x - y|$ *und somit*

$$\sup_{f\in A_M} |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \xrightarrow[|x-y|\to 0]{} 0.$$

(2) *Die Menge*

$$A := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \|f(x)\|_\infty \leq 1\}$$

ist nicht gleichgradig stetig, denn $\sup_{f\in A} |f(x) - f(y)| = 2$.

(3) *Die Menge*

$$A_{M,\gamma} := \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\gamma} \; \forall x, y \in X\}, \quad M > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

ist gleichgradig stetig, denn

$$\sup_{f \in A_{M,\gamma}} |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\gamma} \xrightarrow[|x-y| \to 0]{} 0.$$

Sie ist eine Teilmenge der Menge Hölder-stetiger Funktionen mit Exponent γ,

$$\mathcal{C}^{0,\gamma}(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, |f(x) - f(y) \leq M|x-y|^{\gamma} \; \forall x, y \in X \quad \textit{für ein} \quad M > 0\}.$$

Offenbar gilt

$$\bigcup_{M>0} A_{M,\gamma} = \mathcal{C}^{0,\gamma}(X).$$

Ist $\gamma = 1$, *so ist* $C^{0,\gamma}(X)$ *gerade der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen auf* X.

SATZ 1.43 (Satz von Arzelà-Ascoli). *Sei* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum,* $A \subset \mathcal{C}(X)$. *Die Menge* A *ist genau dann relativ kompakt in* $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_{\infty})$ *mit* $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$, *wenn* A *beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

BEWEIS. „$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge A ist relativ kompakt und somit ist $\overline{A}$ kompakt. Daher gibt es eine endliche offene Überdeckung

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\varepsilon}(f_j), \quad f_j \in A.$$

Wir wählen ein $f \in A$. Es gibt ein $j_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $f \in B_{\varepsilon}(f_{j_0})$. Folglich gilt:

$$\|f\|_{\infty} = \|f - f_{j_0} + f_{j_0}\|_{\infty} \leq \|f - f_{j_0}\|_{\infty} + \|f_{j_0}\|_{\infty} < \varepsilon + \max_{j=1,\ldots,n} \|f_j\|.$$

Somit ist die Menge A beschränkt.

Da jede stetige Funktion auf X gleichmäßig stetig ist (Satz 1.28 (b)), gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\max_{j=1,\ldots,n} |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$. Somit folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(y) - f_{j_0}(x) + f_{j_0}(x) - f_{j_0}(y) + f_{j_0}(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{j_0}(x)| + |f(y) - f_{j_0}(y)| + |f_{j_0}(x) - f_{j_0}(y)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$. Folglich gilt

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon \quad \text{falls}\, d(x, y) < \delta,$$

d.h. A ist gleichgradig stetig.

„$\Leftarrow$" Hier stellen wir zwei verschiedene Beweise dieser Implikation vor.

Der erste Beweis. Wegen der Beschränkheit von A ist

$$R := \sup_{f \in A} \sup_{x \in X} |f(x)|$$

endlich. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ beliebig und betrachten endliche Überdeckungen

$$\overline{B_R(0)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_\varepsilon(\xi_i) \subset \mathbb{K} \quad \text{und} \quad X = \bigcup_{j=1}^{l} B_\varepsilon(x_j)$$

mit $\xi_i \in \mathbb{K}$ und $x_j \in X$. Für Abbildungen

$$\sigma : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, k\}$$

definieren wir

$$A_\sigma := \{f \in A \,|\, |f(x_j) - \xi_{\sigma(j)}| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, l\}.$$

Zu jedem σ, für das A_σ nichtleer ist, wählen wir ein $f_\sigma \in A_\sigma$. Zu jeder Funktion $f \in A$ wählen wir ein σ mit $f \in A_\sigma$. Dann gilt $|f(x_j) - \xi_{\sigma(j)}| < \varepsilon$. Zu jedem $x \in X$ wählen wir ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ so, dass $x \in B_\varepsilon(x_j)$. Dann erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\sigma(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f_\sigma(x) - f_\sigma(x_j)| \\ &\quad + |f(x_j) - \xi_{\sigma(j)}| + |f_\sigma(x_j) - \xi_{\sigma(j)}| \\ &< 2 \sup_{d(y,z) \leq \varepsilon} \sup_{g \in A} |g(y) - g(z)| + 2\varepsilon =: r_\varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $\|f - f_\sigma\|_\infty \leq r_\varepsilon$ und somit gilt

$$A \subset \bigcup_{\sigma :\, A_\sigma \neq \emptyset} B_{2r_\varepsilon}(f_\sigma).$$

Da $r_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, kann die Menge A mit endlich vielen offenen Kugeln von beliebig kleinem Radius $2r_\varepsilon$ überdeckt werden. Also ist die Menge A total beschränkt.

Der metrische Raum $(\overline{A}, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig (als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes). Nach Satz 1.18 ist $\overline{A}$ kompakt. Folglich ist A relativ kompakt.

Der zweite Beweis. In diesem Beweis wird das sogenannte Diagonalverfahren benutzt. Wir werden im darauffolgenden Abschnitt beweisen, dass jeder kompakte metrische Raum eine dichte abzählbare Menge besitzt (Satz 1.48). Also sei $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ein solche Menge. Sei (f_n) eine Folge in A. Da A beschränkt ist, ist die Folge $(f_n(\xi_1))$ in $\mathbb{K}$ bschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k}(\xi_1))_{k \in \mathbb{N}}$. Auch die Folge $(f_{n_k}(\xi_2))_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge $(f_{m_k}(\xi_2))_{k \in \mathbb{N}}$. Analog erhält man eine konvergente Teilfolge $(f_{p_k}(\xi_3))_{k \in \mathbb{N}}$, usw. Die Diagonalfolge $g_1 = f_{n_1}$, $g_2 = f_{m_2}$, $g_3 = f_{p_3}$, $\ldots$ hat daher die Eigenschaft

$$(g_i(\xi_j))_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{konvergiert für alle} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Wir werden nun die gleichgradige Stetigkeit benutzen, um die gleichmäßige Konvergenz von (g_i) zu zeigen. Dazu beweisen wir, dass (g_i) bzgl. der Supremumsnorm eine Cauchyfolge bildet.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $f \in A$ und alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$. Dann existieren endlich viele offene Kugeln vom Radius $\delta/2$, etwa $B_1, \ldots, B_p$, die X überdecken. Jede

Kugel enthält dann eines der ξ_j, sagen wir $\xi_{n_k} \in B_k$. Nun wähle $i_0 = i_0(\varepsilon)$ mit

$$|g_i(\xi_{n_k}) - g_j(\xi_{n_k})| < \varepsilon \quad \text{für alle } i, j \geq i_0 \text{ und alle } k = 1, \dots, p.$$

Jetzt betrachte ein beliebiges $x \in X$. Es liegt in einer der überdeckenden Kugeln, etwa $x \in B_l$. Es folgt $d(x, \xi_{n_l}) < \delta$ und daher $|g_i(x) - g_i(\xi_{n_l})| < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| \leq {} & |g_i(x) - g_i(\xi_{n_k})| + |g_i(\xi_{n_k}) - g_j(\xi_{n_k})| \\ & + |g_j(\xi_{n_k}) - g_j(x)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt $\|g_i - g_j\|_\infty < 3\varepsilon$ für $i, j \geq i_0$, d.h. (g_i) ist eine Cauchyfolge. Der metrische Raum $(\overline{A}, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Also konvergiert die Folge (g_i) gegen ein $g \in \overline{A}$. Nach Satz 1.18 ist $\overline{A}$ kompakt. Folglich ist A relativ kompakt. □

Das folgende Kompaktheitskriterium setzt nicht voraus, dass der metrische Raum (X, d) kompakt ist.

- Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset \mathcal{C}_b(X)$ beschränkt. Die Menge A ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}_b(X)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Zerlegung $X = \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ und Punkte $x_j \in M_j$, $j = 1, \dots, n$ existieren, so dass gilt
$$\sup_{f \in A} \sup_{x \in M_j} |f(x_j) - f(x)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hier ist ein Kompaktheitskriterium für Banachräume Hölder- bzw. Lipschitz-stetiger Funktionen:

- Eine Menge $A \subset \mathcal{C}^{0,\gamma}([0,1])$, $0 < \gamma \leq 1$, ist relativ kompakt bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}}$ (s. Beispiel (9) nach Definition 1.12), wenn A beschränkt ist und
$$\inf_{\delta > 0} \sup_{f \in A} \sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ |x-y| < \delta \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} = 0.$$

Proposition 1.44. *Sei $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$. Der Volterra-Operator*

$$V : X \to X, f \mapsto g \quad \textit{mit} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

ist kompakt.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in [0,1], x_1 < x_2$. Sei $f \in B_1(0) \subset \mathcal{C}([0,1])$. Betrachte:

$$|(Vf)(x_1) - (Vf)(x_2)| = |\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\, dt \leq |x_2 - x_1|$$

Damit ist $V(B_1(0))$ gleichgradig stetig und es gilt $V(B_1(0)) \subset \overline{B_1(0)}$. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli (Satz 1.43) ist $V(B_1(0))$ somit relativ kompakt, woraus sich die Kompaktheit von V ergibt. □

PROPOSITION 1.45. *Sei $k \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$. Der Fredholmsche Integraloperator mit Integralkern k*

$$T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]),\ f \mapsto g \quad \textit{mit} \quad g(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt$$

ist kompakt.

BEWEIS selbst.

1.7. Separabilität

DEFINITION 1.46. *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* separabel, *wenn er eine dichte, abzählbare Teilmenge besitzt. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt separabel, wenn der metrische Raum $(Y, d|_{Y\times Y})$ separabel ist.*

SATZ 1.47. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

(a) *$A \subset X$ ist dicht in X genau dann, wenn jede offene Kugel in X einen Punkt $a \in A$ enthält.*
(b) *$A \subset X$ ist dicht in X genau dann, wenn jeder Punkt $x \in X$ Grenzwert einer Folge aus A ist.*
(c) *Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $A \subset Y$ gibt mit $\overline{A} \supset Y$.*

BEMERKUNG. *Ist eine Teilmenge $Y \subset X$ abgeschlossen und $A \subset Y$, so gilt $\overline{A} \subset \overline{Y} = Y$. Dann folgt aus $\overline{A} \supset Y$, dass $\overline{A} = Y$.*

BEWEIS selbst.

SATZ 1.48. *Ein kompakter metrischer Raum (X,d) ist separabel.*

BEWEIS. Zu jedem $\varepsilon_k := \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, existiert eine endliche Überdeckung von X mit offenen Kugeln $B_{\varepsilon_k}(x_{k,l}) \subset X$, $l = 1, ..., n_k$. Sei

$$A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l=1}^{n_k} \{x_{k,l}\}.$$

Sei $x \in X$ beliebig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle ein $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Dann ist $x \in B_{\varepsilon_k}(x_{k,l})$ für ein $l \in \{1, ..., n_k\}$, also $x_{k,l} \in B_{\varepsilon_k}(x) \subset B_\varepsilon(x)$. Nach Satz 1.47(a) ist $\overline{A} = X$ ist. Da A abzählbar ist, ist der metrische Raum (X,d) separabel. □

SATZ 1.49. *Jede Teilmenge Y eines separablen metrischen Raumes X ist ebenfalls separabel.*

BEMERKUNG. *Sei A dicht in X. Sei $Y \subset X$ beliebig. Dann kann $A \cap Y$ leer sein. Zum Beispiel, wähle $A = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dann ist $\overline{A} = \mathbb{R}$, $A \cap Y = \varnothing$.*

BEWEIS. Sei $A := \{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von X. Sei

$$J := \left\{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\middle|\, \exists\, y \in Y \quad \text{mit} \quad d(x_n, y) \le \frac{1}{m}\right\}.$$

Zu jedem $(n,m) \in J$ wähle ein $y_{n,m} \in Y$ mit $d(y_{n,m}, x_n) \le 1/m$. Die Menge $B := \{y_{n,m} |\ (n,m) \in J\}$ ist offensichtlich abzählbar und $B \subset Y$.

BEHAUPTUNG: $\overline{B} \supset Y$.

BEWEIS. Sei $x \in Y$ beliebig. Da A dicht in X liegt, gibt es nach Satz 1.47(b) eine Folge (n_k) aus $\mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{1}{k}$. Folglich ist $(n_k, k) \in J$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$d(y_{n_k,k}, x) \leq \underbrace{d(y_{n_k,k}, x_{n_k})}_{\leq \frac{1}{k}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{\leq \frac{1}{k}} \leq \frac{2}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

d.h. x liegt in $\overline{B}$. Das bedeutet, dass Y eine Teilmenge von $\overline{B}$ ist. $\boxed{\text{B}}$

Mit Satz 1.47(c) folgt nun, dass Y separabel ist. □

DEFINITION 1.50. *Sei X ein normierter Raum und $A \subset X$ sei beliebig. Die* lineare Hülle *von A ist die Menge*

$$\operatorname{lin} A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,|\, \lambda_j \in \mathbb{K}, x_j \in A \right\}.$$

Die Menge A heißt total, *wenn* $\operatorname{lin} A$ *dicht in X ist.*

SATZ 1.51. *Für einen normierten Raum X sind äquivalent:*

(a) *X ist separabel,*
(b) *Es gibt eine abzählbare totale Menge $A \subset X$.*

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b): Eine dichte Teilmenge $A \subset X$ ist offensichtlich total.
(b) $\Rightarrow$ (a): Wir betrachten zunächst den reellen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Es sei

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,|\, \lambda_j \in \mathbb{Q}, x_j \in A \right\}.$$

Offensichtlich ist B abzählbar.
Es sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig. Wähle ein

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in \operatorname{lin} A, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad x_j \in A, \quad y_0 \neq 0,$$

so, dass $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle dann $\lambda_j' \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\lambda_j - \lambda_j'| < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|}$$

und setze $y := \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda'_j x_j \in B$. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &\le \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda'_j) x_j \right\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j - \lambda'_j| \|x_j\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j - \lambda'_j| \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|} \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist B dicht in X.

In dem komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ verläuft der Beweis komplett analog mit $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{Q}$ in der Definition der Menge B. □

Beispiele. (1) *Der Banachraum ℓ^p mit $1 \le p < \infty$ ist separabel. Zum Beweis betrachten wir die Folge $e_n \in \ell^p$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch*

$$(e_n)_k = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

und $A := \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $x = (t_n) \in \ell^p$ beliebig. Dann gilt

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} e_j t_j \right\|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} |t_j|^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Folglich ist A total und ℓ^p separabel.

(2) *Es gilt das allgemeine Prinzip: Enthält X eine überabzählbare diskrete Teilmenge, so ist X nicht separabel.* Beweis *selbst.*

(3) *Der Banachraum ℓ^∞ ist nicht separabel. Beweis: Sein M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Betrachte die Folge $(\chi_M(n))_n$ mit*

$$\chi_M(n) := \begin{cases} 1, & n \in M, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Da die Potenzmenge $2^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist, ist auch die Menge

$$\Delta := \{\chi_M \mid M \subset \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$$

überabzählbar. Es gilt $\|\chi_M - \chi_{M'}\|_\infty = 1$ für $M \neq M'$. Also ist Δ eine überabzählbare diskrete Menge. Nach (2) ist ℓ^∞ nicht separabel.

(4) *$\mathcal{C}([a,b])$ ist separabel.* Beweis *selbst.*

(5) *Sei $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ der Raum stetiger Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dieser Raum ist vollständig.*

Behauptung: *$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ ist separabel.*

BEWEIS. *Sei $K_n := [-n, n]$. Sei $\mathcal{C}_0(K_n)$ der Raum stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die an den Randpunkten des Intervalls K_n den Wert Null annehmen. Die Funktionen aus $\mathcal{C}_0(K_n)$ mit Null fortgesetzt liegen offenbar in $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$. Daher ist*

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_0(K_n)$$

eine Teilmenge von $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$. Nach (4) ist jedes $\mathcal{C}(K_n)$ separabel. Mit Satz 1.49 folgt daraus, dass $\mathcal{C}_0(K_n)$ ebenfalls separabel ist. Sei A_n eine in $\mathcal{C}_0(K_n)$ dichte abzählbare Menge. Dann ist die Menge $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset M$ abzählbar und es gilt $\overline{A} \supset M$. Nach Satz 1.47(c) ist M separabel.

Nun zeigen wir, dass M dicht in $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ ist. Zu beliebigem $f \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ gibt es eine Folge (f_n) mit $f_n \in \mathcal{C}_0(K_n)$ so, dass $f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in [-n/2, n/2]$ ist und

$$\sup_{n/2\le|x|\le n} |f_n(x)| \le \max\{f_n(-n/2), f_n(n/2)\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $x_0 > 0$ so groß, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x| > x_0$ ist. Wähle n so groß, dass $n/2 > x_0$ ist. Es ist leicht einzusehen, dass $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Daraus folgt, dass der Grenzwert von $\|f - f_n\|_\infty$ für $n \to \infty$ Null ist. Somit ist die Dichtheit von M bewiesen.

Da M separabel ist und dicht in $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ liegt, ist $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$ ebenfalls separabel. $\boxed{B}$

(5) *Der Raum $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ stetiger beschränkter Funktionen ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist nicht separabel.* BEWEIS *selbst.*

(6) *Der Banachraum $C^{0,\gamma}([0,1])$, $0 < \gamma \le 1$, aus Beispiel (9) nach Definition 1.12 ist nicht separabel.* BEWEIS: *Zu jedem $a \in (0,1)$ definiere*

$$u_a(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0,a] \\ (t-a)^\gamma, & t \in (a,1]. \end{cases}$$

Für $b > a$ berechne

$$\begin{aligned} \|u_b - u_a\|_{C^{0,\gamma}} &= \max_{t\in[0,1]} |u_b(t) - u_a(t)| \\ &\quad + \sup_{\substack{t,s\in[0,1] \\ t\neq s}} \frac{|u_b(t) - u_a(t) - u_b(s) + u_a(s)|}{|t-s|^\gamma} \\ &\overset{\substack{t=b \\ s=a}}{\ge} \frac{|u_a(b)|}{(b-a)^\gamma} = 1. \end{aligned}$$

Die Menge $\{u_a | a \in (0,1)\}$ ist diskret und überabzählbar.

1.8. Vervollständigung metrischer Räume

DEFINITION 1.52. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt* Isometrie, *wenn für alle $x, x' \in X$ gilt: $d_X(x, x') = d_Y(T(x), T(x'))$. Zwei metrische Räume heißen* isometrisch isomorph, *falls es eine bijektive Isometrie $T : X \to Y$ gibt. Zwei normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißen* isometrisch isomorph, *in Zeichen $X \cong Y$, wenn zwischen* *ihnen ein linearer Isomorphismus $T : X \to Y$ existiert, der gleichzeitig eine Isometrie ist, also $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ erfüllt.*

BEMERKUNGEN. (1) *Eine Isometrie $T : X \to Y$ ist injektiv und stetig.*
(2) *Ist T eine bijektive Isometrie, so ist T^{-1} ebenfalls eine Isometrie.*

SATZ 1.53. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann existiert ein vollständiger metrischer Raum $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ und eine Isometrie $E : X \to \widetilde{X}$ so, dass $E(X)$ dicht in $\widetilde{X}$ liegt. Der metrischer Raum $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ heißt* Vervollständigung *von (X,d). Sind $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ und $(\widehat{X},\widehat{d})$ zwei Vervollständigungen von (X,d), so sind $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ und $(\widehat{X},\widehat{d})$ isometrisch isomorph.*

Ist X ein normierter Raum, so ist $\widetilde{X}$ ein Vektorraum und es gibt eine Norm $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ auf $\widetilde{X}$ mit $\|x-y\|_{\widetilde{X}} = \widetilde{d}(x,y)$. In diesem Fall ist die Isometrie E linear und $\widetilde{X} \cong \widehat{X}$.

BEWEIS. (1) BEHAUPTUNG 1: Für alle $x, x', y, y' \in X$ gilt
$$|d(x,y) - d(x',y')| \le d(x,x') + d(y,y').$$

BEWEIS. Mit der Dreiecksungleichung erhält man
$$\begin{aligned} d(x,y) - d(x',y') &\le d(x,x') + d(x',y) - d(x',y') \\ &\le d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) - d(x',y') \\ &= d(x,x') + d(y,y'). \end{aligned}$$
Wegen der Symmetrie der Metrik gilt auch die Ungleichung $d(x',y') - d(x,y) \le d(x,x') + d(y,y')$. $\boxed{\text{B1}}$

(2) Konstruktion von $(\widetilde{X},\widetilde{d})$: Sei Y die Menge aller Cauchyfolgen in X. Wir definieren die folgende Äquivalenzrelation auf Y: Zwei Cauchyfolgen (x_n), (y_n) seien äquivalent, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Sei $[(x_n)]$ die Äquivalenzklasse, welche die Cauchyfolge (x_n) enthält. $\widetilde{X}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen.

Seien (x_n), (y_n) Cauchyfolgen in X. Mit Behauptung 1 gilt
$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m).$$
Also ist $(d(x_n,y_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_m)$.

Gilt $[(x_n)] = [(x'_n)]$ und $[(y_n)] = [(y'_n)]$, so ist wegen Beehauptung 1
$$|d(x'_n,y'_n) - d(x_n,y_n)| \le d(x'_n,x_n) + d(y'_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
und daher
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n).$$

Dies erlaubt die Definition der Metrik $\widetilde{d}$ auf $\widetilde{X}$ durch
$$\widetilde{d}([(x_n)],[(y_n)]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$

(3) Isometrische Einbettung von X in $\widetilde{X}$: Definiere $E : X \to \widetilde{X}$, $x \mapsto [x]$, wobei $[x]$ die Äquivalenzklasse der konstanten Folge (x) ist. Betrachte $\widetilde{d}(Ex,Ey) = \widetilde{d}([x],[y]) = d(x,y)$.

(4) $E(X)$ ist dicht in $\widetilde{X}$: Sei $\widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{X}$ beliebig. Betrachte

$$\widetilde{d}(E(x_m), \widetilde{x}) = \widetilde{d}(E(x_m), [(x_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

da (x_n) eine Cauchyfolge ist.

(5) $\widetilde{X}$ ist vollständig: Sei $(\widetilde{x}_k)$ eine Cauchyfolge in $\widetilde{X}$. Da $E(X)$ dicht in $\widetilde{X}$ ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in X$ so, dass $\widetilde{d}(\widetilde{x}_k, E(x_k)) \leq \frac{1}{k}$. Betrachte nun

$$\begin{aligned} d(x_k, x_l) &= \widetilde{d}(E(x_k), E(x_l)) \\ &\leq \widetilde{d}(E(x_k), \widetilde{x}_k) + \widetilde{d}(\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l) + \widetilde{d}(\widetilde{x}_l, E(x_l)) \\ &\leq \frac{1}{k} + \widetilde{d}(\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_l) + \frac{1}{l} \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Daher ist (x_k) eine Cauchyfolge in X. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{d}([(x_n)], \widetilde{x}_k) &\leq \widetilde{d}([(x_n)], E(x_k)) + \widetilde{d}(E(x_k), \widetilde{x}_k) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k) + \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(\widetilde{x}_k)$ gegen $[(x_n)]$, d.h. $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist vollständig.

(6) Zwei beliebige Vervollständigungen $\widetilde{X}$ und $\widehat{X}$ sind isometrisch isomorph: Seien $\widetilde{E} : X \to \widetilde{X}$ und $\widehat{E} : X \to \widehat{X}$ die entsprechenden Isometrien. Dann ist $\widetilde{E}(X)$ bzw. $\widehat{E}(X)$ dicht in $\widetilde{X}$ bzw. $\widehat{X}$. Betrachte den Operator $\widehat{E}\widetilde{E}^{-1} : \widetilde{E}(X) \to \widehat{E}(X)$. Dieser Operator ist als Verkettung zweier Isometrien eine bijektive Isometrie.

Behauptung 2: $\widehat{E}\widetilde{E}^{-1}$ kann zu einer bijektiven Isometrie von $\widetilde{X}$ nach $\widehat{X}$ fortgesetzt werden.

Beweis selbst.

Ist X ein normierter Raum, so ist $\widetilde{X}$ ein Vektorraum mit Verknüpfungen

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)] \quad \text{und} \quad \alpha[(x_n)] := [(\alpha x_n)], \alpha \in \mathbb{K}.$$

Wir definieren

$$\|[(x_n)]\| := \widetilde{d}([(x_n)], 0).$$

Wegen

$$\begin{aligned} E(x+y) &= [x+y] = [x] + [y] = Ex + Ey, \\ E(\alpha x) &= [\alpha x] = \alpha[x] = \alpha Ex \end{aligned}$$

ist die Isometrie $E : X \to \widetilde{X}$ linear.

Sind $\widetilde{X}$ und $\widehat{X}$ zwei Vervollständigungen von X, so ist $\widehat{E}\widetilde{E}^{-1} : \widetilde{E}(X) \to \widehat{E}(X)$ eine lineare Bijektion, die isometrisch ist. Die Fortsetzung von $\widehat{E}\widetilde{E}^{-1}$ als Abbildung von $\widetilde{X}$ nach $\widehat{X}$ ist linear, bijektiv und isometrisch, d.h. $\widetilde{X} \cong \widehat{X}$. □

Beispiele. (1) *Sei* $X := \{[a,b] \mid a < b\}$ *mit* $d([a,b],[c,d]) := |a - c| + |b - d|$. *Der metrische Raum* (X, d) *ist nicht vollständig, denn* *die Cauchyfolge* $I_n = [-n^{-1}, n^{-1}]$ *ist nicht konvergent. Die Vervollständigung von* (X,d) *ist* $(\widetilde{X},d)$ *mit* $\widetilde{X} := \{[a,b] \,|\, a \leq b\}$*, wobei* $[a,a] := \{a\}$ *ist.*

(2) *Konstruktion der reellen Zahlen über Cauchyfolgen in* $\mathbb{Q}$.

1.9. Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Seien $u : \Omega \to \mathbb{K}$ und $v : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar.

Definition 1.54. *Zwei messbare Funktionen* $u : \Omega \to \mathbb{K}$ *und* $v : \Omega \to \mathbb{K}$ *heißen* äquivalent*, wenn* $u = v$ *fast überall in* Ω *ist.*

Definition 1.55. *Für* $1 \leq p < \infty$ *definieren wir*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \textit{ messbar und } |f|^p \textit{ integrierbar}\},$$

$$\|f\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sei $\mathcal{N}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} | f(x) = 0 \textit{ fast überall}\}$*. Wir definieren* $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$.

Für $p = \infty$ *definieren wir*

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \textit{ messbar mit } \operatorname{ess-sup} |f(x)| < \infty\}$$

mit $\operatorname{ess-sup} |f(x)| = \inf_{c>0}\{c \,|\, |f(x)| \leq c \quad \textit{fast überall}\} =: \|f\|_\infty$ *(das wesentliche Supremum). Wir setzen* $L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$.

Beispiel. *Für* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ *ist* $\sup f = 1$*, aber* $\operatorname{ess-sup} f = 0$.

Lemma 1.56. $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ *mit* $1 \leq p \leq \infty$ *ist ein halbnormierter Raum.*

Beweis. Sind u und v messbar, so sind $u + v$ und λu, $\lambda \in \mathbb{K}$, ebenfalls messbar.

Ist $p = \infty$, $u, v \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, so sind auch $u + v$, λu in $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Sei $1 \leq p < \infty$. Die Abbildung $\mathbb{K} \ni a \mapsto |a|^p$ ist konvex. Daher gilt

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \Leftrightarrow |a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Somit ist $u + v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, falls $u, v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Offenbar ist $\lambda u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, falls $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Also ist $\mathcal{L}^p$ ein Vektorraum.

Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Dreiecksungleichung trivial erfüllt, denn $\int |f(x) + g(x)| dx \leq \int |f(x)| dx + \int |g(x)| dx$ und

$$\operatorname{ess-sup} |f(x) + g(x)| \leq \operatorname{ess-sup} |f(x)| + \operatorname{ess-sup} |g(x)|.$$

Für $1 < p < \infty$ betrachte

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x) + g(x)|^p dx \\ &\leq \int_\Omega (|f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1}|g(x)|) dx. \end{aligned}$$

Für $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $v \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist $uv \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. Mit der Hölderschen Ungleichung $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$ (Beweis selbst) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

BEMERKUNG. *Aus Lemma 1.56 folgt, dass $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ ein normierter Raum ist.*

SATZ 1.57. *$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, ist ein Banachraum. Ferner gilt:*

(a) *$p = \infty$: Jede Cauchyfolge (f_k) in L^∞ ist bis auf eine Nullmenge gleichmäßig konvergent gegen ein $f \in L^\infty$.*
(b) *$1 \leq p < \infty$: Jede Cauchyfolge (f_k) besitzt eine fast überall punktweise konvergente Teilfolge.*

BEMERKUNG. *Aus $f_k \to f$ in L^p, $1 \leq p < \infty$, folgt nicht $f_k \to f$ fast überall. Beispiel: Sei $\Omega = (0,1)$. Jedes $k \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig in der Form $k = 2^l + j$ schreiben mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq j < 2^l$. Betrachte die Folge*

$$f_k(x) := \begin{cases} 1, & x \in [j2^{-l}, (j+1)2^{-l}], \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Offenbar gibt es kein $x \in \Omega$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, aber

$$\|f_k\|_p^p = \int_0^1 |f_k(x)|^p dx = 2^{-l} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

BEWEIS. (a) Sei (f_m) eine Cauchyfolge in $L^\infty(\Omega)$. Dann gilt:

für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N(k) \in N$ so, dass $\forall\ l, m \geq N(k)$ eine Nullmenge $N_{l,m,k}$ existiert mit $|f_l(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$ für alle $x \in \Omega \backslash N_{n,m,k}$. $(*)$

Die Menge $N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}, l,m\geq N(k)} N_{l,m,k}$ ist Nullmenge. Für jedes $x \in \Omega\backslash N$ konvergiert die Zahlenfolge $(f_l(x))_{l\in\mathbb{N}}$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{l\to\infty} f_l(x) & x \in \Omega\backslash N, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Als Grenzwert eine Folge messbarer Funktionen ist f messbar. Wegen $(*)$ ist die Konvergenz von f_l gegen f auf $\Omega\backslash N$ gleichmäßig (in $(*)$ betrachte $m \to \infty$).

Behauptung: f ist wesentlich beschränkt.

Beweis. Aus $(*)$ folgt $|f_l(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ für alle $x \in \Omega \backslash N$. Da f_l wesentlich beschränkt ist, gibt es ein c_l mit $|f_l(x)| < c_l$ für alle $x \in \Omega \setminus M$, wobei M eine Nullmenge ist. Folglich ist $|f(x)| < c_l + \frac{1}{k}$ für alle $x \in \Omega \setminus (N \cup M)$, also ess-sup $|f(x)| < \infty$. $\boxed{\text{B}}$

(b) Sei (f_l) eine Cauchyfolge in L^p, d.h. zu jedem $j \in \mathbb{N}$ existiert ein $l_j \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^j}$ für alle $l, m \geq l_j$. Daher ist $\|f_{l_{j+1}} - f_{l_j}\|_p \leq \frac{1}{2^j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Sei $g_k(x) := \sum\limits_{j=1}^{k} |f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x)|$. Die Folge $(g_k(\cdot)^p)_k$ ist monoton wachsend und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g_k(x)^p dx &= \|g_k\|_p^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \right)^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \right)^p \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right)^p = 1.
\end{aligned}$$

Behauptung (Satz von Beppo Levi): Sei (u_k) eine monoton wachsende Folge in $L^1(\Omega)$ mit $\|u_k\|_1 \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $u \in L^1$ mit $u_k(x) \to u(x)$ fast überall und $\int_\Omega u_k(x)dx \to \int_\Omega u(x)dx$.

Nach dem Satz von Beppo Levi ist die Folge $(g_k(\cdot)^p)_k$ fast überall konvergent. Somit ist auch die Folge (g_k) fast überall konvergent. Folglich konvergiert die Folge

$$f_{l_k}(x) = f_{l_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{l_{j+1}}(x) - f_{l_j}(x))$$

fast überall gegen eine Funktion f.

Behauptung: $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\|f_l - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Seien $l(\varepsilon)$ und $j(\varepsilon)$ so groß, dass

$$\int_\Omega |f_{l_j}(x) - f_l(x)|^p dx = \|f_{l_j} - f_l\|_p^p < \varepsilon$$

für alle $j > j(\varepsilon)$ und $l > l(\varepsilon)$. Die Folge $(|f_{l_j}(x) - f_l(x)|)_j$ ist nichtnegativ, $\int_\Omega |f_{l_j}(x) - f_l(x)|^p dx$ beschränkt und $|f_{l_j}(x) - f_l(x)|^p \xrightarrow[l \to \infty]{} |f(x) - f_l(x)|^p$ fast überall. Mit dem Lemma von Fatou folgt daraus, dass $|f - f_l|^p$ integrierbar ist und

$$\int_\Omega |f(x) - f_l(x)|^p dx \leq \liminf_{j \to \infty} \int_\Omega |f_{l_j}(x) - f_l(x)|^p dx \leq \varepsilon$$

für alle $l \geq l(\varepsilon)$. Folglich ist $f = f_l + (f - f_l) \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\|f - f_l\|_p^p \leq \varepsilon$ für alle $l \geq l(\varepsilon)$. Daher gilt $\|f_l - f\|_p \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{B}}$

Aus der Behauptung folgt, dass $L^p(\Omega)$ vollständig ist. $\square$

Bemerkung. *Wie in den Folgenräumen ℓ^p gilt in L^p die Höldersche Ungleichung (vgl. Lemma 1.7): Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (mit $\frac{1}{\infty} := 0$), $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist das Produkt fg integrierbar, d.h. $fg \in L^1(\Omega)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.* Beweis *selbst.*

Satz 1.58. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) *$\mathcal{C}_0(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, \operatorname{supp} f \subset \Omega \text{ kompakt}\}$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$;*
(b) *$L^p(\Omega)$ ist separabel.*

Beweis. (a) Für den Beweis brauchen wir die folgende Eigenschaft messbarer Funktionen (Satz von Lusin):

Sei $u : \Omega \to \mathbb{K}$ messbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi \in C_0(\Omega)$ mit

$$\sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \quad \text{und} \quad |\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq u(x)\}| < \varepsilon.$$

Hier bezeichnet $|\cdot|$ das Lebesguemaß einer Menge.

Sei $u \in L^p(\Omega)$. Aus dem Lebesgueschen Satz von dominierter Konvergenz folgt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Omega\cap B_R(0)} |u(x)|^p dx = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Daher existiert ein $R > 0$, so dass die Funktion $u_1 : \Omega \to \mathbb{K}$ mit $u_1 = u$ auf $\Omega \cap B_R(0)$ und $u_1 = 0$ auf $\Omega \setminus B_R(0)$, der Abschätzung

$$\|u - u_1\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

genügt. Sei

$$u_1^{(k)}(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{falls} \quad |u_1(x)| \leq k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $|u_1|^p \in L^1(\Omega)$ gilt $|\{x \in \Omega \,|\, |u_1(x)| > k\}| \to 0$ für $k \to \infty$. Aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals folgt

$$\int_\Omega |u_1(x) - u_1^{(k)}(x)|^p dx = \int_{x\in\Omega \,|\, |u_1(x)|>k} |u_1(x)|^p dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|u_1^{(k)} - u_1\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$ gilt. Nach dem Satz von Lusin existiert ein $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega \cap B_R(0))$ mit $|\varphi| \leq k$ und

$$|\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq u_1^{(k)}\}| < \left(\frac{\varepsilon}{6k}\right)^p.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|u - \varphi\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u - u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|u_1 - u_1^{(k)}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_1^{(k)} - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \|u_1^{(k)} - \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} |\{x \in \Omega \,|\, u_1^{(k)}(x) \neq \varphi(x)\}|^{1/p} \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + 2k\frac{\varepsilon}{6k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{C}_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

(b) Wir verwenden den Weierstraßschen Approximationssatz:

> Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann liegen die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht in $C(K)$.

Sei

$$K_m := \left\{ x \in \Omega \,|\, d(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad |x| \le m \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Offenbar ist jedes K_m kompakt und es gilt $\Omega = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$. Ferner sei

$$P_m = \{ q\chi_{K_m} \,|\, q \in P \},$$

wobei χ_{K_m} die charakteristische Funktion von K_m bezeichnet und P der Raum der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist. Nach (a) existiert für jedes $u \in L^p(\Omega)$ ein $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ mit $\|u - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon/2$. Weiter gibt es zu φ ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $q \in P_m$ mit

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K_m \qquad \text{und} \qquad \|\varphi - q\|_{L^\infty(K_m)} \le \frac{\varepsilon}{2} |K_m|^{-1/p}.$$

Daher

$$\begin{aligned} \|u - q\|_{L^p(\Omega)} &\le \|u - \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi - q\|_{L^p(K_m)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi - q\|_{L^\infty(K_m)} |K_m|^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\cup P_m$ abzählbar ist, ist (b) bewiesen. □

BEMERKUNGEN. (1) *Wegen Satz 1.58(a) kann man $L^p(\Omega)$ als eine Vervollständigung von $\mathcal{C}_0(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ und damit auch von $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ansehen.*

(2) *Satz 1.58 gilt nicht für $p = \infty$, denn z.B. $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ ist nicht separabel.*

(3) *Tatsächlich liegt sogar $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.*

Nun untersuchen wir kompakte Teilmengen von L^p. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere

$$T_\varepsilon f(x) := \chi_\Omega(x) \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} \tilde{f}(y) dy, \qquad \varepsilon > 0,$$

wobei $|B_\varepsilon(x)|$ das Lebesguemaß der ε-Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

SATZ 1.59 (Satz von Riesz). *Eine Teilmenge $A \subset L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, ist relativ kompakt genau dann, wenn A beschränkt ist und*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\tilde{f}(x + \varepsilon) - f(x)|^p dx = 0$$

gleichmäßig in $f \in A$.

SATZ 1.60 (Satz von Kolmogorov-Tamarkin-Tulajkov). *Eine Teilmenge $A \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ist relativ kompakt genau dann, wenn A beschränkt ist und*

$$\|T_\varepsilon f - f\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

gleichmäßig in $f \in A$.

1.10. Schlussbemerkungen

1.10.1. Gleichmäßige Konvergenz und gleichgradige Stetigkeit.

SATZ 1.61. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so, dass die Folge (f_n) punktweise auf X konvergiert und $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ist. Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig (d.h. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).*

BEWEIS selbst.

Ohne die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit ist diese Aussage im Allgemeinen selbst dann falsch, wenn die punktweise Grenzfunktion als stetig vorausgesetzt wird. Betrachte etwa die durch $f_n(x) := nx(1-x^2)^n$ gegebene Folge in $\mathcal{C}([0,1])$ mit der punktweisen Grenzfunktion $f = 0$.

Hier ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen:

SATZ 1.62. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so, dass die Folge (f_n) punktweise auf X gegen eine Funktion f konvergiert. Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *f ist stetig auf X,*
(b) *zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in X$ mit $|f_k(x) - f(x)| < \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|f_{k+n}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq m.$$

BEWEIS selbst.

Satz 1.62 hat eine wichtige Folgerung für monotone Funktionenfolgen.

KOROLLAR 1.63 (Satz von Dini). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so, dass die Folge (f_n) punktweise auf X gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Gilt $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Konvergenz gleichmäßig.*

BEWEIS. Es genügt (b) aus Theorem 1.62 zu zeigen. Zu beliebigen $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(x) \in \mathbb{N}$, so dass

$$0 \leq f_k(x) - f(x) < \varepsilon$$

für alle $k \geq N$. Wähle $m = 1$ und $\delta = \varepsilon$. Dann ist

$$f_{k+n}(x) - f(x) \leq f_k(x) - f(x) < \varepsilon$$

for all $n \geq m$. □

1.10.2. Der Fixpunktsatz von Edelstein.

SATZ 1.64. *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung mit*

$$d(f(x), f(x')) < d(x,x') \quad \text{für alle} \quad x, x' \in X, \quad x \neq x'. \tag{1.9}$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt.

BEWEIS. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Die Folge (x_k) mit $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{k_m}). Sei $y \in X$ ihre Grenzwert. Da f stetig ist, gilt auch

$$\lim_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = f(y).$$

Wir zeigen, dass y ein Fixpunkt von f ist. Angenommen, $f(y) \neq y$. Sei

$$Y = \{(x,x') \,|\, x, x' \in X, \quad x \neq x'\}.$$

Betrachte $\phi : Y \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x,x') = \frac{d(f(x), f(x'))}{d(x,x')} < 1.$$

Da $y \neq f(y)$ ist, existiert eine Zahl $0 < R < 1$ so, dass

$$\phi(y, f(y)) < R.$$

Offenbar ist ϕ stetig. Daher gibt es offene Kugeln $B_r(y)$ und $B_r(f(y))$ mit $r < d(y, f(y))/3$ so, dass $\phi(x,x') < R$ für alle $x \in B_r(y)$ und $x' \in B_r(f(y))$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$x_{k_m} \in B_r(y) \quad \text{und} \quad x_{k_m+1} = f(x_{k_m}) \in B_r(f(y))$$

für alle $m \geq N$. Das bedeutet, dass

$$d(x_{k_m}, x_{k_m+1}) > r \tag{1.10}$$

und

$$\phi(x_{k_m}, x_{k_m+1}) < R \tag{1.11}$$

für alle $m \geq N$. Aus (1.11) folgt, dass

$$d(x_{k_m+1}, x_{k_m+2}) < R d(x_{k_m}, x_{k_m+1}). \tag{1.12}$$

Andererseits,

$$d(x_{k_m}, x_{k_m+1}) = d(x_{k_{m-1}+1}, x_{k_{m-1}+2})$$

falls $k_{m-1} = k_m - 1$. Falls $k_{m-1} < k_m - 1$ folgt aus (1.9) die Ungleichung

$$d(x_{k_m}, x_{k_m+1}) = d(f(x_{k_m-1}), f(x_{k_m})) < d(x_{k_m-1}, x_{k_m}) < \ldots < d(x_{k_{m-1}+1}, x_{k_{m-1}+2}).$$

Insgesamt erhalten wir

$$d(x_{k_m}, x_{k_m+1}) \leq d(x_{k_{m-1}+1}, x_{k_{m-1}+2}).$$

Aus dieser Ungleichung und (1.12) folgt nun

$$\begin{aligned}
d(x_{k_m}, x_{k_m+1}) &\leq d(x_{k_{m-1}+1}, x_{k_{m-1}+2}) \\
&< R d(x_{k_{m-1}}, x_{k_{m-1}+1}) \\
&\leq R d(x_{k_{m-2}+1}, x_{k_{m-2}+2}) \\
&\quad \cdots \\
&< R^{k_m - k_N} d(x_{k_N}, x_{k_N+1}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu (1.10). Somit gilt $f(y) = y$.

Angenommen, es gibt zwei Fixpunkte y_1 und y_2. Dann gilt

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) < d(y_1, y_2).$$

Widerspruch! Somit ist die Eindeutigkeit bewiesen. $\square$

KAPITEL 2

Der Satz von Hahn-Banach

2.1. Dualräume

DEFINITION 2.1. *Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann heißt $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ der* Dualraum *von X und wird mit X' bezeichnet.*

KOROLLAR 2.2. *X' ist mit der Operatornorm aus Definition 1.31 ein Banachraum.*

BEWEIS. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, folgt die Aussage aus Satz 1.35. $\square$

SATZ 2.3. (a) *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $T : \ell^q \to (\ell^p)'$ mit $(Tx)(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n t_n$, $x = (s_n) \in \ell^q$, $y = (t_n) \in \ell^p$ ein isometrischer Isomorphismus. Kurz: $(\ell^p)' \cong \ell^q$ für $1 \leq p < \infty$.*
(b) *Dieselbe Abbidungsvorschrift liefert einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(c_0)'$. Kurz: $c_0' \cong \ell^1$.*

BEMERKUNG. *$(\ell^\infty)'$ ist „echt größer“ als ℓ^1, s. Korollar 2.15 unten. In der Tat kann jedes $l \in (\ell^\infty)'$ als Summe zweier Funktionale l_1 und l_2 geschrieben werden, wo $l_1 \in \ell^1$ und $l_2|_{c_0} = 0$ ist.*

BEWEIS. (a) Wir betrachten nur den Fall $1 < p < \infty$. Der Fall $p = 1$ geht ähnlich.

Mit der Hölderschen Ungleichung folgt aus $x = (s_n) \in \ell^q$, $y = (t_n) \in \ell^p$, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ absolut konvergent ist und $|(Tx)(y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Somit ist $\|Tx\| \leq \|x\|_q$. Offenbar ist T injektiv. Wir zeigen nun, dass T surjektiv und isometrisch ist.

Sei $y' \in (\ell^p)'$ beliebig. Setze $s_n := y'(e_n)$, $e_n := (\delta_{j,n})_j$, $n \in \mathbb{N}$, und $x := (s_n)$. Wir zeigen nun, dass $x \in \ell^q$, $\|x\|_q \leq \|y'\|$, $Tx = y'$.

Setze

$$t_n := \begin{cases} \frac{|s_n|^q}{s_n} & \text{für} \quad s_n \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad s_n = 0. \end{cases}$$

Dann ist $|s_n|^q = s_n t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} |t_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |s_n|^{p(q-1)} \overset{p+q=pq}{=} \sum_{n=1}^{N} |s_n|^q$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{N}|s_n|^q = \sum_{n=1}^{N} t_n \underbrace{s_n}_{=y'(e_n)} \stackrel{y' \text{ linear}}{=} \left| y'\Big(\sum_{n=1}^{N} t_n e_n\Big)\right|$$
$$\leq \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N}|t_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N}|s_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wegen $1 - p^{-1} = q^{-1}$ folgt daraus

$$\left(\sum_{n=1}^{N}|s_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y'\| \qquad \text{für alle} \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Also ist $x \in \ell^q$ mit $\|x\|_q \leq \|y'\|$.

Nach Konstruktion des Operators T gilt $(Tx)(e_n) = s_n = y'(e_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Funktionale Tx und y' linear sind, gilt $Tx = y'$ auf $\mathrm{lin}\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$. Da diese Funktionale stetig sind, erhalten wir $Tx = y'$ auf $\overline{\mathrm{lin}\{e_n | n \in \mathbb{N}\}} = \ell^p$ (s. Beispiel (1) nach Satz 1.51). Also ist T surjektiv. Insbesondere gilt $\|x\|_q \leq \|y'\| = \|Tx\|$, d.h. $\|Tx\| = \|x\|_q$. Also ist T eine Isometrie.

(b) selbst. □

SATZ 2.4. *Sei $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet. Dann definiert $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ mit $(Tg)(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ einen isometrischen Isomorphismus.*

BEMERKUNG. *Wie bei Folgenräumen sind hier $(L^\infty)'$ und L^1 nicht isomorph.*

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{O}(X)$ das System der offenen Teilmengen von X. Ein Mengensystem $\mathfrak{A}$ heißt σ-Algebra, wenn gilt

$$\emptyset \in \mathfrak{A},$$
$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathfrak{A},$$
$$A_n \in \mathfrak{A}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Die kleinste σ-Algebra, die das Mengensystem $\mathcal{O}(X)$ enthält, heißt die *σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von X*; Bezeichnung $\mathfrak{B}(X)$. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, \infty)$ mit $\mu(X) < \infty$ heißt ein endliches Borel-Maß. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{B}(X) \to \mathbb{R}$ heißt ein signiertes endliches Borel-Maß, wenn μ als Differenz zweier endlicher Borel-Maße μ_+ und μ_- dargestellt werden kann, $\|\mu\| := \mu_+(X) + \mu_-(X)$. Die Menge aller signierten Borel-Maße $\mathcal{M}(X)$ ist bezüglich dieser Norm ein Banachraum.

SATZ 2.5 (Satz von Riesz). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $l : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ ein lineares stetiges Funktional. Dann existiert genau ein signiertes Borel-Maß μ, so dass*

$$l(f) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathcal{C}(X).$$

Es gilt $\|l\|_{(\mathcal{C}(X))'} = \|\mu\|$. Somit sind $(\mathcal{C}(X))'$ und $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|)$ isometrisch isomorph.

2.2. Der Satz von Hahn-Banach

DEFINITION 2.6. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt* sublinear, *falls*

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *für alle* $\lambda \geq 0$ *und* $x \in X$,
(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *für alle* $x, y \in X$.

BEISPIELE. (a) *Jede Halbnorm ist sublinear.*
(b) *Jede lineare Abbildung von* $X \to \mathbb{R}$ *ist sublinear.*
(c) $(t_n) \mapsto \limsup t_n$ *ist sublinear auf* $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
(d) $(t_n) \mapsto \operatorname{Re} \limsup t_n$ *ist sublinear auf* $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

SATZ 2.7 (Satz von Hahn-Banach, Version der linearen Algebra; reelle Fassung). *Sei X ein reeller Vektorraum und $U \subset X$ ein Teilraum. Ferner seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $l : U \to \mathbb{R}$ linear mit $l(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$, d.h. $L|_U = l$, mit $L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.*

Die Fortsetzung L ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

BEMERKUNG. *Der Beweis von Satz 2.7 stützt sich auf das Zornsche Lemma: Besitzt in einer halbgeordneten Menge M mit der Halbordnung $\prec$ jede geordnete Teilmenge eine obere Schranke, so existiert mindestens ein maximales Element. Zur Erinnerung: $a \in M$ heißt* obere Schranke *einer geordneten Teilmenge $S \subset M$, falls $b \prec a$ für alle $b \in S$ gilt; $a \in M$ heißt* maximales Element, *falls aus $a \prec b$ die Gleichheit $a = b$ folgt.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zuerst konstruieren wir die gesuchte Fortsetzung für den Fall $\dim X/U = 1$ und danach machen Induktion. Im zweiten Schritt wird mit dem Zornschen Lemma gezeigt, dass dieser Prozess terminiert.

1. Schritt: Sei $\dim X/U = 1$ und sei $x_0 \in X \backslash U$ beliebig. Jedes $x \in X$ lässt sich eindeutig als $x = u + \lambda x_0$, $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben. Für ein $r \in \mathbb{R}$ definiert der Ansatz

$$L_r(x) = l(u) + \lambda r$$

eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$ mit $L_r|_U = l$. Es bleibt $r \in \mathbb{R}$ so zu wählen, dass $L_r \leq p$ gilt.

Die Ungleichung $L_r(x) \leq p(x)$ gilt genau dann, wenn

$$l(u) + \lambda r \leq p(x) = p(u + \lambda x_0) \tag{2.1}$$

für alle $u \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Ist $\lambda = 0$, so gilt (2.1) nach Voraussetzung. Sei $\lambda > 0$. Dann gilt (2.1) genau dann, wenn

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda r & \leq & p(u + \lambda x_0) - l(u) \quad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow & r & \leq & p\left(\frac{u}{\lambda} + x_0\right) - l\left(\frac{u}{\lambda}\right) \quad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow & r & \leq & \inf\limits_{v \in U} (p(v + x_0) - l(v)). \end{array}$$

Für $\lambda < 0$ analog:

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda r & \leq & p(u + \lambda x_0) - l(u) \quad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow & -r & \leq & p\left(\frac{u}{|\lambda|} - x_0\right) - l\left(\frac{u}{|\lambda|}\right) \quad \forall\, u \in U \\ \Leftrightarrow & r & \geq & \sup\limits_{v \in U}(l(v) - p(v - x_0)). \end{array}$$

Daher existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $L_r \leq p$ genau dann, wenn

$$l(w) - p(w - x_0) \leq p(v + x_0) - l(v) \quad \forall\, v, w \in U$$

gilt, also dann und nur dann, wenn

$$l(v) + l(w) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0) \quad \forall\, v, w \in U \tag{2.2}$$

gilt. Nun gilt aber:

$$l(v) + l(w) = l(v + w) \leq p(v + w) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0),$$

sodass (2.2) richtig ist. Somit existiert (nicht notwendig eindeutig!) ein $r \in \mathbb{R}$ mit $L_r \leq p$.

2. Schritt: Sei

$$\begin{aligned} A := \{(V, L_V) | V\, &\text{Teilraum von}\, X\, \text{mit}\, U \subset V, \\ &L_V : V \to \mathbb{R}\, \text{linear mit}\, L_V \leq p|_V \text{ und } L_V|_U = l\}. \end{aligned}$$

Es ist $A \neq \emptyset$, da $(U, l) \in A$. Definiere auf A die Halbordnung

$$(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) \Leftrightarrow V_1 \subset V_2, L_{V_2}|_{V_1} = L_{V_1}.$$

Ist $((V_i, L_{V_i})_{i \in I})$ total geordnet, so ist (V, L_V) mit $V = \cup_{i \in I} V_i, L_V(x) = L_{V_i}(x)$ für $x \in V_i$ eine obere Schranke (L_V wohldefiniert, da $((V_i, L_{V_i})_{i \in I})$ total geordnet ist). Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $m = (X_0, L_{X_0}) \in A$.

Nun zeigen wir, dass $X_0 = X$. Wäre $X_0 \neq X$, so gäbe es nach dem ersten Schritt eine Fortsetzung von L_{X_0}, d.h. (X_0, L_{X_0}) könnte nicht maximal sein. Es folgt $X_0 = X$ und $L := L_X$ ist die gesuchte Fortsetzung. □

Für $\mathbb{C}$-wertige Abbildungen l ergibt $l(x) \leq p(x)$ keinen Sinn. Jedoch gibt es folgenden Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}$-linearen und $\mathbb{C}$-linearen Funktionalen:

Lemma 2.8. *Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum*

(a) *Ist $l : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und $\widetilde{l} : X \to \mathbb{C}$ definiert durch $\widetilde{l}(x) := l(x) - il(ix)$, so ist $\widetilde{l}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional mit $l = \operatorname{Re} \widetilde{l}$*

(b) *Ist $k : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $l = \operatorname{Re} k$ und $\widetilde{l}$ wie in (a), so ist l $\mathbb{R}$-linear mit $\widetilde{l} = k$.*

(c) *Ist $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $l : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, so gilt:*

$$|l(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in X \Leftrightarrow |\operatorname{Re} l(x)| \leq p(x)\ \forall\, x \in X.$$

(d) *Ist X ein normierter Raum und $l : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares stetiges Funktional, so ist $\|l\| = \|\operatorname{Re} l\|$. Also ist $l \mapsto \operatorname{Re} l$ eine bijektive isometrische $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}$-linearen und dem der $\mathbb{R}$-wertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale.*

BEWEIS. (a), (b) selbst nachrechnen.

(c) „⇒" folgt aus $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Für „⇐" schreibe $l(x) = \lambda_x |l(x)|$ mit $\lambda_x \in \mathbb{C}$, $|\lambda_x| = 1$. Dann ist

(2.3)
$$|l(x)| = \lambda_x^{-1} l(x) = l(\lambda_x^{-1} x) = |\operatorname{Re} l(\lambda_x^{-1})| \leq p(\lambda_x^{-1} x) = |\lambda_x^{-1}| p(x) = p(x).$$

(d) Folgt ebenfalls aus (2.3). □

SATZ 2.9 (Satz von Hahn-Banach, Version der linearen Algebra, komplexe Fassung). *Sei X ein kopmlexer Vektorraum und sei U ein Teilraum von X. Ferner seien $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $l : U \to \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re} l(x) \leq p(x)$ für alle $x \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{C}$, $L|_U = l$ mit $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.*

BEWEIS. Nach Satz 2.7 gibt es ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F|_U = \operatorname{Re} l$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Mit Lemma 2.8(a) existiert ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $L : X \to \mathbb{C}$ mit $F = \operatorname{Re} L$, also $\operatorname{Re} L|_U = \operatorname{Re} l$. Nach Lemma 2.8(b) ist damit schon $L|_U = l$. □

SATZ 2.10 (Satz von Hahn-Banach, Fortzsetzungsversion). *Sei X ein normierter Raum, $U \subset X$ ein Teilraum. Dann existiert zu jedem stetigen linearen Funktional $u' : U \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional $x' : X \to \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|x'\| = \|u'\|$.*

Die Hahn-Banach-Fortsetzung ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Es ist leicht einzusehen, dass die Menge aller Hahn-Banach-Fortsetzungen eines linearen stetigen Funktionals konvex in X' ist. In einigen Fällen ist die Hahn-Banach-Fortsetzung eindeutig, z.B.

(1) wenn X ein Hilbertraum und U abgeschlossen ist,
(2) $X = \ell^\infty$ und $U = c_0$.

BEWEIS. 1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Setze $p(x) := \|u'\|\|x\|$ für $x \in X$. Mit Satz 2.7 folgt, dass es ein lineares Funktional $x' : X \to \mathbb{R}$ gibt mit $x'|_U = u'$ und $x'(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Wegen $x'(-x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt $|x'(x)| \leq \|u'\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, d.h. $\|x'\| \leq \|u'\|$.

Umgekehrt:
$$\|u'\| = \sup_{\substack{u \in I \\ \|u\|=1}} |u'(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|x\|=1}} |x'(u)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |u'(x)| \leq \|x'\|.$$

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mit Satz 2.9 erhält man analog $x' : X \to \mathbb{C}$ mit $x'|_U = u'$ und $\|u'\| = \|\operatorname{Re} x'\| = \|x'\|$, wobei die letzte Gleichung aus Lemma 2.8(d) folgt. □

BEMERKUNG. *Ein Analogon zu Satz 2.10 für Operatoren ist im Allgemeinen falsch. Man kann zum Beispiel zeigen, dass die Identität* $\operatorname{id} : c_0 \to c_0$ *keine stetige Fotsetzung $T : \ell^\infty \to c_0$ besitzt.*

Es gilt jedoch:

LEMMA 2.11. *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $U \subset X$ ein Teilraum und $T \in \mathcal{L}(U, Y)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung $\overline{T} \in \mathcal{L}(\overline{U}, Y)$ mit $\overline{T}|_U = T$ und $\|\overline{T}\| = \|T\|$.*

BEWEIS selbst.

KOROLLAR 2.12. *X sei ein normierter Raum.*

(a) *Für alle $x \in X$, $x \neq 0$, gibt es ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$, $x'(x) = \|x\|$. X' trennt die Punkte von X, d.h., zu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existiert $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.*

(b) *$\|x\| = \sup\limits_{x' \in X', \|x'\| \leq 1} |x'(x)|$ für alle $x \in X$. Das Supremum wird angenommen.*

(c) *Ist $U \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $x \in X$, $x \notin U$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ und $x'(x) \neq 0$.*

(d) *Ist $U \subset X$ ein Teilraum, so sind äquivalent:*
   (1) *U ist dicht in X;*
   (2) *Falls $x' \in X'$ und $x'|_U = 0$, so gilt $x' = 0$.*

BEWEIS. (a) Sei $x \in X$, $x \neq 0$, beliebig. Setze $u' : \mathrm{lin}\{x\} \to \mathbb{K}$, $u'(\lambda x) := \lambda \|x\|$. Offenbar ist u' ein lineares Funktional. Nach Satz 2.10 gibt es eine Fortsetzung $x' : X \to \mathbb{K}$ mit $\|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = u'(x)$.

Seien $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ beliebig. Wähle $x := x_1 - x_2 \neq 0$. Dann ist $x'(x) = x'(x_1) - x'(x_2) \neq 0$, also $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.

(b) Es gilt $\sup\limits_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} |x'(x)| \geq \|x\|$. Umgekehrt:

$$1 = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\| \leq 1}} \|x'\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup_{x \in X} \frac{|x'(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X} \frac{1}{\|x\|} \sup_{\|x'\|} |x'(x)|$$

Also ist $\sup\limits_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)| \leq \|x\|$.

(c) Sei $\omega : X \to X/U$, $x \mapsto [x] := \{x + U\}$. Es ist $\omega(u) = 0$ für alle $u \in U$ und $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \notin U$.

BEHAUPTUNG: X/U ist ein normierter Raum mit $\|[x]\|_{X/U} := \inf\limits_{y \in U} \|x - y\|_X$.

BEWEIS selbst.

Nach (a) gibt es ein $l \in (X/U)'$ mit $l(\omega(x)) \neq 0$. Da $\omega : X \to X/U$ linear ist, ist $x' := l \circ \omega$ ebenfalls linear.

(d) (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ beliebig. Nach Lemma lem:210 ist $x'(x) = 0$ für alle $x \in X$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Angenommen, U wäre nicht dicht in X, d.h. $\overline{U} \subsetneq X$. Dann gäbe es ein $x \in X$ mit $x \notin \overline{U}$. Mit (c) gäbe es dann ein $x' \in X'$ mit $x'|_{\overline{U}} = 0$ und $x'(x) \neq 0$. Widerspruch! □

Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mit Korollar 2.12(b) erhält man die folgende Formel für die Norm von T:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X, \|x\| \leq 1 \\ y' \in Y', \|y'\| \leq 1}} |y'(Tx)|. \tag{2.4}$$

SATZ 2.13. *Die Abbildung $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})'$, $(Tx)(y) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n t_n$, $x = (s_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$, $y = (t_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})'$ ist isometrisch, aber nicht surjektiv.*

BEWEIS selbst.

SATZ 2.14. *Sei X ein normierter Raum. Ist X' separabel, so ist X ebenfalls separabel.*

BEMERKUNG. *Die Implikation „X separabel $\Rightarrow$ X' separabel" ist im Allgemeinen falsch. Beispiel: $X = \ell^1$, $X' = \ell^\infty$.*

BEWEIS. $S_{X'} := \{x' \in X' \mid \|x'\| = 1\}$ ist separabel, d.h. es gibt eine Menge $\{x'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{\{x'_k\}} = S_X$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wähle ein $x_k \in S_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ mit $|x'_k(x_k)| \geq \frac{1}{2}$. Setze $U := \operatorname{lin}\{x_k\}$.

BEHAUPTUNG: U ist eine dichte Teilmenge von X.

BEWEIS. Sei $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$ beliebig. Angenommen, $x' \neq 0$. O.B.d.A. sei $\|x'\| = 1$. Dann ist $x' \in S_{X'}$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x' - x'_{k_0}\| \leq \frac{1}{4}$. Es folgt

$$\frac{1}{2} \leq |x'_{k_0}(x_{k_0})| = |x'_{k_0}(x_{k_0}) - x'(x_{k_0})| \leq \|x'_{k_0} - x'\|_{X'} \cdot \|x_{k_0}\|_X \leq \frac{1}{4}.$$

Widerspruch! Also ist $x' = 0$. Wegen Korollar 2.12(d) liegt U dicht. $\boxed{\text{B}}$

Da U abzählbar ist, ist X separabel. □

KOROLLAR 2.15. $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$

BEWEIS. Angenommen, $\ell^1 \cong (\ell^\infty)'$. Da ℓ^1 separabel ist, ist auch $(\ell^\infty)'$ separabel. Nach Satz 2.14 ist somit ℓ^∞ separabel. Widerspruch! (vgl. Beispiel (2) in Abschnitt 1.7) □

2.3. Der Satz von Baire und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

SATZ 2.16 (Satz von Baire oder Bairescher Kategoriensatz). *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum. Dann ist jeder abzählbare Durchschnitt dichter offener Teilmengen dicht in X.*

BEWEIS. Seien $(\mathcal{O}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dichte offene Teilmengen von X. Seien $x_1 \in X$ und $r_1 > 0$ beliebig. Nach Satz 1.47(a) genügt es zu zeigen, dass

$$\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_k\right) \cap B_{r_1}(x_1) \neq \emptyset.$$

Der Dutchschnitt $\mathcal{O}_1 \cap B_{r_1}(x_1)$ ist offen und nichtleer. Wähle ein $x_2 \in X$ und ein $0 < r_2 < r_1/2$ so, dass $K_{r_2}(x_2) \subset \mathcal{O}_1 \cap B_{r_1}(x_1)$. Der Durchschnitt $\mathcal{O}_2 \cap B_{r_2}(x_2)$ ist offen und nichtleer. Wähle ein $x_3 \in X$ und ein $0 < r_3 < r_2/2$ so, dass $K_{r_3}(x_3) \subset \mathcal{O}_2 \cap B_{r_2}(x_2)$ u.s.w. Also gilt

$$K_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \mathcal{O}_n \cap B_{r_n}(x_n) \subset B_{r_1}(x_1) \cap \mathcal{O}_n \tag{2.5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r_n \to 0$. Nach dem Satz von Cantor (Satz 1.13) besitzt die geschachtelte Folge von abgeschlossenen Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ genau ein Element $x \in X$ mit $x \in B_{r_n}(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen (2.5) ist $x \in B_{r_1}(x_1) \cap \mathcal{O}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$x \in \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_k\right) \cap B_{r_1}(x_1).$$

□

KOROLLAR 2.17. *Sei* (X,d) *ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und* $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ *mit* $A_k \subset X$ *abgeschlossen. Dann existiert ein* $k_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $\overset{\circ}{A}_{k_0} \neq \emptyset$.

BEMERKUNGEN. (1) *Korollar 2.17 wird auch als Satz von Baire oder Bairescher Kategoriensatz bezeichnet.*

(2) $A \subset X$ *heißt* nirgends dicht, *wenn* $\overline{A}$ *keine inneren Punkte enthält.* $A \subset X$ *heißt* mager *(oder von* erster Kategorie*), wenn* A *sich als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen darstellen lässt. Eine nichtmagere Menge heißt auch von* zweiter Kategorie. *Eine Menge, deren Komplement mager ist, wird als* residuelle *Menge bezeichnet. Insbesondere besagt der Satz von Baire, dass jeder nichtleerer vollständiger metrischer Raum* X *von zweieter Kategorie ist.*

BEISPIEL. (1) *Die Menge der rationalen Zahlen ist mager in der Menge der reellen Zahlen.*

(2) *Die Menge der irrationalen Zahlen ist residuell.*

(3) *Die Menge aller positiven reellen Zahlen ist nicht mager, aber auch nicht residuell, da das Komplement ebenfalls nicht mager ist.*

BEWEIS. Angenommen, $\overset{\circ}{A}_k = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die Mengen $\mathcal{O}_k := X \setminus A_k$ offen und dicht in X. Nach Satz 2.16 ist $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_k \neq \emptyset$. Sei $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_k$ beliebig. Dann gilt

$$x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X \setminus A_k = X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = X \setminus X = \emptyset.$$

Widerspruch! □

Hier ist eine interessante Anwendung vom Bairschen Kategoriensatz.

BEISPIEL. *Sei* $\xi \in (0,1)$ *beliebig. Die Menge aller Funktionen*

$$N := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f \quad \text{ist nicht differenzierbar in} \quad \xi\}$$

ist dicht in $\mathcal{C}([0,1])$. *Beweisidee: Sei*

$$M_k := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \sup_{h>0} \frac{|f(\xi+h) - f(\xi-h)|}{2h} \leq k \right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass alle M_k *abgeslossen sind und alle* $\mathcal{C}([0,1]) \setminus M_k$ *dicht sind. Sei nun* $\mathcal{O} := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}([0,1]) \setminus M_k$. *Nach dem Satz von Baire (s. Bemerkung (2) nach Satz 2.16) ist* $\mathcal{O}$ *dicht in* $\mathcal{C}([0,1])$. *Wegen* $\mathcal{O} \subset N$ *ist* N *ebenfalls dicht in* $\mathcal{C}([0,1])$.

Analog kann man zeigen, dass die Menge nirgends differenzierbarer Funktionen dicht in $\mathcal{C}([0,1])$ liegt.

SATZ 2.18 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit oder Satz von Banach-Steinhaus). *Sei* X *ein Banachraum,* Y *ein normierter Raum,* $M \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *Ist* M *punktweise beschränkt, d.h. für jedes* $x \in X$ *gibt es ein* $C_x \geq 0$

mit $\|Tx\| \le C_x$ für alle $T \in M$, so ist M gleichmäßig beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\|T\| \le C$ für alle $T \in M$.

BEWEIS VON SATZ 2.18. Zuerst zeigen wir, dass es eine Kugel $B_r(x_0) \subset X$ mit $r > 0$ gibt so, dass M auf $B_r(x_0)$ gleichmäßig beschränkt ist. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ sei $X_{T,k} := \{x \in X | \|Tx\| \le k\}$, $T \in M$. Setze

$$X_k := \bigcap_{T\in M} X_{T,k} = \{x \in X | \|Tx\| \le k \;\forall\, T \in M\}.$$

Die Mengen $X_{T,k}$ sind abgeschlossen. Daher sind auch X_k abgeschlossen. Aus der punktweisen Beschränktheit folgt: zu jedem $x \in X$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in X_k$. Also ist $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Mit Korollar 2.17 gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{X}_k \ne \emptyset$. Wähle $x_0 \in X_{k_0}$ und $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \subset X_{k_0}$ gilt. Es ist $\|Tx\| \le k_0$ für alle $x \in B_r(x_0)$ uns alle $T \in M$.

Sei nun $x \in B_r(0)$ beliebig. Betrachte

$$\|Tx\| = \|T(x + x_0) - Tx_0\| \le \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \le k_0 + C_{x_0}.$$

Dann gilt für jedes $T \in M$

$$\|T\| = \sup_{x\in B_r(0)} \|T(x/r)\| = \frac{1}{r} \sup_{x\in B_r(0)} \|Tx\| \le \frac{1}{r}(k_0 + C_{x_0}) =: C.$$

□

2.4. Das Prinzip der offenen Abbildung

DEFINITION 2.19. *Seien X,Y normierte Räume. Eine Abblidung $f\colon X \to Y$ heißt* offen, *wenn das Bild $f(U)$ jeder offenen Menge offen ist.*

SATZ 2.20. *Seien X,Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *T surjektiv $\iff$ T offen (Prinzip der offenen Abbildung);*
(b) *Ist T bijektiv, so ist die Inverse T^{-1} linear und stetig (Satz von der inversen Abbildung).*

BEWEIS. (a) „$\Leftarrow$" Ist $T(B_1(0))$ offen, so gibt es eein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$. Da T linear ist, gilt dann $B_1(0) \subset T(B_{1/\delta}(0))$. Folglich ist $B_R(0) \subset T(B_{R/\delta}(0))$ für alle $R > 0$. Daher ist T surjektiv.

„$\Rightarrow$"

BEHAUPTUNG 1: Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $\overline{T(B_\varepsilon(0))}$ eine offene Kugel.

BEWEIS: Offenbar ist $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k(0)$. Da T surjektiv ist, gilt dann $Y = T(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{T(B_k(0))}$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz (Korollar 2.17) gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\overline{T(B_{k_0}(0))}$ eine offene Kugel enthält. Sei $r > 0$ der Radius dieser Kugel. Dann enthält $\overline{T(B_1(0))}$ eine offene Kugel vom Radius r/k_0. Folglich enthält $\overline{T(B_\varepsilon(0))}$ enthält eine offene Kugel vom Radius $\varepsilon' := \varepsilon\frac{r}{k_0}$. $\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2: $\overline{T(B_\varepsilon(0))}$ ist konvex.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass $T\left(B_\varepsilon(0)\right)$ konvex ist. Seien $y_1, y_2 \in T\left(B_\varepsilon(0)\right)$ beliebig. Dann existieren $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(0)$ mit $y_1 = Tx_1$ und $y_2 = Tx_2$. Sei $\lambda \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = T(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}_{\in B_\varepsilon(0)}) \in T\left(B_\varepsilon(0)\right).$$

Seien nun $y_1, y_2 \in \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$ beliebig. Dann existieren Folgen $(y_{1,k}), (y_{2,k})$ in $B_\varepsilon(0)$ mit $y_{1,k} \to y_1$ und $y_{2,k} \to y_2$ für $k \to \infty$. Für $\lambda \in [0,1]$ beliebig gilt:

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \overbrace{\lim_{k\to\infty} \underbrace{(\lambda y_{1,k} + (1-\lambda)y_{2,k})}_{\in T(B_\varepsilon(0))}}^{\overline{T(B_\varepsilon(0))}}.$$

$\boxed{\text{B2}}$

Behauptung 3: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $B_{\varepsilon'}(0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$ mit $\varepsilon' := \varepsilon \frac{r}{k_0}$.

Beweis: Aus Behauptung 1 folgt, dass ein $y_0 \in T\left(B_\varepsilon(0)\right)$ existiert, so dass $B_{\varepsilon'}(y_0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$. Die Menge $\overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$ ist symmetrisch um den Nullpunkt, somit ist auch

$$B_{\varepsilon'}(-y_0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}.$$

Sei $y \in B_{\varepsilon'}(0)$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\|(y_0 + y) - y_0\| < \varepsilon' \ \Rightarrow\ y_0 + y \in B_{\varepsilon'}(y_0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)},\\
&\|(-y_0 + y) + y_0\| < \varepsilon' \ \Rightarrow\ -y_0 + y \in B_{\varepsilon'}(-y_0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}.
\end{aligned}$$

Mit Behauptung 2 ist $y = \frac{1}{2}(y_0 + y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$. Somit ist $B_{\varepsilon'}(0) \subset \overline{T\left(B_\varepsilon(0)\right)}$. $\boxed{\text{B3}}$

Behauptung 4: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varepsilon'' > 0$ mit $B_{\varepsilon''}(0) \subset T\left(B_\varepsilon(0)\right)$.

Beweis: Sei $\varepsilon_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, eine beliebige Folge mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \varepsilon$, $\varepsilon_0 := \varepsilon$. Nach Behauptung 3 ist $B_{\varepsilon'_k}(0) \subset \overline{T\left(B_{\varepsilon_k}(0)\right)}$ für geeignete $\varepsilon'_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\varepsilon'_k \to 0$ für $k \to \infty$. Sei $y \in B_{\varepsilon'_0}(0)$ beliebig. Definiere $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ durch:

- Wegen $y \in B_{\varepsilon'_0}(0)$ ist nach Behauptung 3 $y \in \overline{T\left(B_{\varepsilon_0}(0)\right)}$. Wähle ein $x_0 \in B_{\varepsilon_0}(0)$ mit $\|y - Tx_0\|_Y < \varepsilon'_1$.
- Wegen $y - Tx_0 \in B_{\varepsilon'_1}(0)$ ist nach Behauptung 3 $y - Tx_0 \in \overline{T\left(B_{\varepsilon_1}(0)\right)}$. Wähle ein $x_1 \in B_{\varepsilon_1}(0)$ mit $\|y - Tx_0 - Tx_1\|_Y < \varepsilon'_2$ usw.
- Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ wähle ein $x_k \in B_{\varepsilon_k}(0)$ mit $\|y - \sum_{i=0}^{k} Tx_i\|_Y < \varepsilon'_{k+1}$.

Wegen $\|x_k\| < \varepsilon_k$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$ und somit auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k =: x$. Es gilt

$$\|x\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 2\varepsilon_0$$

und
$$y = T \sum_{k=0}^{\infty} x_k = Tx \in B_{\varepsilon_0'}(0).$$
Da y beliebig ist, erhalten wir somit $B_{\varepsilon_0'} \subset T\left(B_{2\varepsilon_0}(0)\right)$ und daher $B_{\varepsilon_0'/2} \subset T\left(B_{\varepsilon_0}(0)\right)$. $\boxed{\text{B4}}$

Behauptung 5: Für $M \subset X$ offen ist $T(M)$ offen.

Beweis: Sei $y \in T(M)$ beliebig. Dann existiert ein $x \in M$ mit $y = Tx$ und $0 \in T(M - x)$. Wähle ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(0) \in M - x$. Aus Behauptung 4 folgt, dass 0 ein innerer Punkt von $T\left(B_\varepsilon(0)\right) \subset T(M - x)$. Daher ist y ein innerer Punkt von $T(M)$. Folglich ist $T(M)$ offen. $\boxed{\text{B5}}$

(b) T^{-1} ist linear. Mit (a) folgt, dass T offen ist und T^{-1} damit stetig. $\square$

KAPITEL 3

Dualitätstheorie

3.1. Schwache Konvergenz

DEFINITION 3.1. *Sei X ein normierter Raum.*

(a) *Eine Folge (x_k) in X* konvergiert schwach *gegen $x \in X$ (schreibweise: $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} x$ oder $x_k \rightharpoonup x$, $x_k \rightharpoondown x$), falls für alle $x' \in X'$ gilt:*

$$x'(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} x'(x).$$

(b) *Eine Folge (x_k') in X'* konvergiert schwach* *gegen $x' \in X'$ (schreibweise: $x_k' \xrightarrow[k\to\infty]{w*} x'$ oder $x_k' \overset{*}{\rightharpoonup} x'$, $x_k' \overset{*}{\rightharpoondown} x'$), falls für alle $x \in X$ gilt: $x_k'(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} x'(x)$.*

(c) *Schwache und schwach* Cauchyfolgen werden analog definiert.*

(d) *Eine Menge $A \subset X$ (bzw. X') heißt* schwach folgenkompakt *(bzw. schwach* folgenkompakt), falls jede Folge in A eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt.*

BEMERKUNGEN. (1) *Um den Unterschied zu der schwachen Konvergenz zu verdeutlichen, wird manchmal die Normkonvergenz als die starke Konvergenz bezeichnet.*

(2) *Die starke Konvergenz impliziert sowohl die schwache als auch die schwach* Konvergenz.*

(3) *Da X' Punkte trennt (vgl. Korollar 2.12(a)), ist der schwache Grenzwert eindeutig (falls er existiert).*

(4) *Es gibt eine Topologie auf X (bzw. X'), welche die schwache (bzw. schwach*) Konvergenz erzeugt.*

BEISPIELE. (1) *Sei $1 \leq p < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ schwach in $L^p(\Omega)$ gilt genau dann, wenn*

$$\int_\Omega g(x) f_k(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_\Omega g(x) f(x)dx \qquad \text{für alle} \qquad g \in L^q(\Omega).$$

(2) *Sei $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ schwach* in $L^p(\Omega)$ gilt genau dann, wenn*

$$\int_\Omega g(x) f_k(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_\Omega g(x) f(x)dx \qquad \text{für alle} \qquad g \in L^q(\Omega).$$

(3) *Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und es seien $f_k, f \in \mathcal{C}(S)$. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ schwach in $\mathcal{C}(S)$ gilt genau dann, wenn*

$$\sup_{x\in S}\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| < \infty$$

und $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$ für alle $x \in S$.

SATZ 3.2. *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Aus $x'_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x'$ schwach* in X' folgt: $\|x'\|_{X'} \le \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}$,*

(b) *Aus $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ schwach in X folgt: $\|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.*

Ist X ein Banachraum, so gilt:

(c) *schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.*

(d) *Es gelte $x_k \to x$ (stark) in X und $x'_k \to x'$ schwach* in X'. Dann ist*

$$x'_k(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} x'(x).$$

BEMERKUNGEN. (1) *(b) bedeutet, dass die Norm unter der schwachen Konvergenz unterhalbstetig ist.*

(2) *Schwach konvergente Folgen sind im Allgemeinen nicht konvergent. Betrachte etwa die Folge (e_k), $e_k = (\delta_{kj})_j$, in ℓ^p, $1 < p < \infty$, oder c_0. Dann ist $e_k \to 0$ schwach, aber $\|e_k\| = 1$. Schwach konvergente Folgen sind jedoch stets beschränkt (s. Lemma 3.7 unten). Damit zeigt man analog zu (d) in normierten Räumen: $x_k \to x$ schwach in X und $x'_k \to x'$ in X' impliziert, dass $x'_k(x_k) \to x'(x)$ ist.*

(3) *Der Folgenraum ℓ^1 zeigt ein merkwürdiges Phänomen, was die schwache Konvergent angeht, nämlich: In ℓ^1 ist jede schwach konvergente Folge stark konvergent (Lemma von Schur).*

(4) *Vollständigkeit in (c) ist wesentlich: Betrachte auf $(d, \|\cdot\|_\infty)$ die Folge*

$$x'_k\left((x_n)_n\right) := kx_k.$$

Dann ist $x'_k \to 0$ schwach in d', aber $\|x'_k\| = k$.*

BEWEIS. (a) Für alle $x \in X$ gilt: $|x'_k(x)| \le \|x'_k\|_{X'} \cdot \|x\|_X$. Wegen $|x'_k(x)| \to |x'(x)|$ folgt daraus, dass $|x'(x)| \le \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'} \cdot \|x\|_X$ und folglich

$$\|x'\| = \sup_{x\in X} \frac{|x'(x)|}{\|x\|_X} \le \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}.$$

(b) Analog zu (a) erhält man $|x'(x)| \le \|x'\|_{X'} \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X$ für alle $x' \in X'$. Wähle nun ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x) = \|x\|_X$ (existiert nach Korollar 2.12). Somit gilt $\|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.

(c) Sei (x'_k) eine schwach* konvergente Folge mit Grenzwert x', d.h. $x'_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} x'(x)$ für alle $x \in X$. Folglich ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x'_k(x)| < \infty$ für alle $x \in X$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 2.18) mit $M := \{x'_k | k \in \mathbb{N}\}$ gilt $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x'_k\|_{X'} < \infty$.

(d) Es gelte $x_k \to x$ stark, $x'_k \to x'$ schwach*. Betrachte

$$\begin{aligned}|x'(x) - x'_k(x_k)| &\leq |(x' - x'_k)(x)| + |x'_k(x_k - x)| \\ &\leq \underbrace{|(x' - x'_k)(x)|}_{\to 0} + \underbrace{\|x'_k\|_{X'}}_{\text{beschränkt wegen (c)}} \underbrace{\|x_k - x\|_X}_{\to 0} .\end{aligned}$$

□

SATZ 3.3 (Satz von Banach-Alaoglu). *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) \subset X'$ schwach* folgenkompakt.*

BEMERKUNG. *Es gilt eine andere Version dieses Satzes: Sei X ein nicht notwendig separabler normierter Raum. Dann ist $K_1(0) \subset X'$ schwach* kompakt. Auf die schwache* Folgenkompaktheit von $K_1(0)$ kann aber aus diesem Satz nicht geschlossen werden, weil die schwache* Topologie nicht notwendig das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Betrachte z.B. die Folge (x'_k) in $(\ell^\infty)'$ mit $x'_k((x_n)_n) := x_k$. Die schwache* Kompaktheit wird in Teil II der Vorlesung erklärt.*

BEWEIS. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Ist (x'_k) eine Folge in X' mit $\|x'_k\| \leq 1$, so sind $(x'_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{K}$. Mit dem Diagonalverfahren findet man eine Teilfolge $(x'_{k(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ so, dass $\lim_{l\to\infty} x'_{k(l)}(x_n)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher existiert für alle $y \in \operatorname{lin}\{x_n\}$ ein $x'(y) := \lim_{l\to\infty} x'_{k(l)}(y)$. Das Funktional $x' : y \to \mathbb{K}$ ist linear und stetig, denn $|x'(y)| = \lim_{l\to\infty} |x'_{k(l)}(y)| \leq \|y\|$. Nach Lemma 2.11 gibt es eine eindeutige lineare Fortsetzung x' auf $\overline{\operatorname{lin}\{x_n\}} = X$ mit $\|x'\| \leq 1$. Sei nun $x \in X$ beliebig. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle $y \in \operatorname{lin}\{x_n\}$ so, dass $\|x - y\| < \varepsilon$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}|(x' - x'_{k(l)})(x)| &\leq |(x' - x'_{k(l)})(x - y)| + |(x' - x'_{k(l)})(y)| \\ &\leq 2\underbrace{\|x - y\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|(x' - x'_{k(l)})(y)|}_{\to 0 \text{ für } l\to\infty} .\end{aligned}$$

Somit ist $x'_{k(l)} \to x'$ schwach*. □

BEMERKUNG. *Die schwache Stetigkeit impliziert die Stetigkeit, d.h. aus $Tx_n \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$ für jede schwach konvergente Nullfoge (x_n) folgt, dass $Tx_n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ für jede stark konvergente Nullfolge (x_n).* BEWEIS *selbst.*

3.2. Bidualraum und Reflexivität

DEFINITION 3.4. *Sei X ein normierter Raum. Der Dualraum von X' heißt* Bidualraum *und wird mit X'' bezeichnet. Zu jedem $x \in X$ ordne ein Element $x'' \in X''$ durch $x''(x') := x'(x)\ \forall x' \in X'$ zu. Die Abbildung $J : X \to X''$, $x \mapsto x''$ heißt* Dualitätsabbildung *oder* kanonische Inklusion *oder* kanonische Einbettung.

BEMERKUNG. *X'' ist ein Banachraum.*

LEMMA 3.5. *Sei X ein normierter Raum. Die Abbilung $J : X \to X''$ ist eine lineare Isometrie, also $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Ferner ist* Bild(J) *genau dann abgeschlossen in X'', also selber ein Banachraum, wenn X ein Banachraum ist.*

BEMERKUNG. *Lemma 3.5 liefert eine einfache Konstruktion einer Vervollständigung für normierte Räume.*

BEWEIS. Betrachte

$$\begin{aligned}\|J(x)\|_{X''} &= \sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|\le 1}} |x''(x')| \\ &= \sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|\le 1}} |x'(x)| \\ &\overset{\text{Korollar 2.12(b)}}{=} \|x\|_X.\end{aligned}$$

Somit ist J als Abbildung von X nach $\mathrm{Bild}(J)$ ein isometrischer Isomorphismus. Folglich ist $(\mathrm{Bild}(J), \|\cdot\|_{X''})$ genau dann ein Banachraum, wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum ist. □

LEMMA 3.6. *Sei X ein normierter Raum und $J : X \to X''$ die kanonische Inklusion. Dann sind äquivalent:*

(a) *$x_k \to x$ schwach in X*
(b) *$J(x_k) \to J(x)$ schwach* in X''.*

BEWEIS. Für alle $x' \in X'$ ist $x'(x_k) = J(x_k)(x')$ und $x'(x) = J(x)(x')$. □

LEMMA 3.7. *Sei X ein normierter Raum. Dann sind schwach konvergente Folgen beschränkt (vgl. Satz 3.2(c) und Bemerkung (2) nach dem Satz).*

BEWEIS. Es gelte $x_n \to x$ schwach in X. Mit Lemma 3.6 folgt, dass $J(x_n) \to J(x)$ schwach* in X'' konvergiert. Nach Satz 3.2(c) gilt dann $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|J(x_n)\| < \infty$. Da J isometrisch ist, gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. □

BEMERKUNG. *(Vergleich schwache und schwach* Konvergenz in X'.) Die Folge $x'_k \to x'$ konvergiert schwach in X' genau dann, wenn $x''(x'_k) \to x''(x')$ für alle $x'' \in X''$. Die Folge $x'_k \to x'$ schwach* in X' genau dann, wenn $x'_k(x) \to x'(x)$ für alle $x \in X$, d.h. wenn $J(x)(x'_k) \to J(x)(x')$ für alle $x \in X$. Also impliziert die schwache Konvergenz in X' die schwach* Konvergenz in X'. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Sei $X = c_0$, dann ist $X' \cong \ell^1$ und $X'' \cong \ell^\infty$. Betrachte die Folge (e_k) in ℓ^1 mit $(e_k)_j = \delta_{kj}$. Sie konvergiert schwach* gegen Null, denn*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{kj} x_j = x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

für alle $(x_j) \in c_0$. Sie ist nicht schwach konvergent, denn

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 1 \cdot \delta_{kj} = 1.$$

DEFINITION 3.8. *Ein Banachraum heißt* reflexiv, *wenn die kanonische Inklusion $J : X \to X''$ surjektiv ist.*

BEMERKUNGEN. (1) *Aus der Tatsache $X \cong X''$ (isometrisch isomorph) folgt nicht die Reflexivität von X. Beispiel: Für $x \in c_0$ setze*

$$\|x\| = \sup_{n_1 < n_2 < \ldots < n_r} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|^2 + |x_{n_r} - x_{n_1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $X = \{x \in c_0 | \|x\| < \infty\}$. Dann gilt:
(a) *$(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.*
(b) *$X \cong X''$*
(c) *X ist nicht reflexiv, d.h. die kanonische Inklusion ist keine Bijektion.*

(2) *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann reflexiv, wenn jede geschachtelte Folge von abgeschlossenen konvexen Teilmengen nichtleeren Durchschnitt hat (vgl. Bemerkung (3) nach Satz 1.13 und Satz 1.14).*
(3) *Ein Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann reflexiv, wenn jedes $x' \in X'$ seine Norm auf $B_1(0) \subset X$ annimmt, d.h. wenn es ein $x \in B_1(0)$ gibt mit $x'(x) = \|x'\|$ (Satz von James).*

BEISPIELE. (1) *ℓ^p und $L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ sind reflexiv.*
(2) *ℓ^1 und $L^1(\Omega)$ sind nicht reflexiv.*
(3) *ℓ^∞ und $L^\infty(\Omega)$ sind nicht reflexiv.*
(4) *c_0 ist nicht reflexiv.*

SATZ 3.9. *Seien X, Y Banachräume. Dann gilt:*
(a) *Ist X reflexiv, so stimmen schwach* und schwache Folgenonvergenz in X' überein.*
(b) *Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Teilraum von X reflexiv.*
(c) *Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so gilt: X reflexiv $\Leftrightarrow$ Y reflexiv.*
(d) *X reflexiv $\Leftrightarrow$ X' reflexiv.*
(e) *Ist X reflexiv, so gilt: X ist genau dann seperabel, wenn X' separabel ist.*

BEWEIS. (a) klar nach Bemerkung vor Definition 3.8.

(b) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Sei $y'' \in Y''$. Zu $x' \in X'$ bezeichne $x'|_Y$ die Einschränkung von x' auf Y. Definiere zu $y'' \in Y''$ ein Element $x'' \in X''$ durch $x''(x') = y''(x'|_Y)$. Sei $x := J_X^{-1}(x'')$. Wir zeigen: $x \in Y$ und $x = J_Y^{-1}(y'')$.

BEHAUPTUNG 1: $x \in Y$.

BEWEIS. Für alle $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$ gilt: $x'(x) = x''(x') = y''(x'|_Y) = 0$. Nach Korollar 2.12 (c) existiert zu jedem $z \in X \setminus Y$ ein $z' \in X'$ mit $z'|_Y = 0$ und $z'(z) \neq 0$. Folglich ist $x \in Y$. $\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2: $J_Y(x) = y''$.

BEWEIS. Sei $y' \in Y'$ beliebig, $x' \in X'$ eine Fortsetzung von y' nach dem Satz von Hahn-Banach. Dann folgt: $y'(x) = x'(x) = x''(x') = y''(x'|_Y) = y''(y')$. Also ist $y'' = J_Y(x)$. $\boxed{\text{B2}}$

(c) Es genügt den Fall zu betrachten, wenn X reflexiv ist. Sei $y'' \in Y''$. Dann sei $x'' \in X''$ durch $x''(x') := y''(x' \circ T^{-1})$, $x' \in X'$ definiert. Sei $y' \in Y'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y''(y') &= y''(y' \circ T \circ T^{-1}) = x''(y' \circ T) \\ &= (y' \circ T)(J_X^{-1}(x'')) = y'(T \circ J_X^{-1}(x'')). \end{aligned}$$

Also ist $y'' = J_Y \circ T \circ J_X^{-1} x''$. Daher ist $J_Y \circ T \circ J_X^{-1}$ surjektiv und somit ist auch J_Y surjektiv.

(d) „$\Rightarrow$“ Sei X reflexiv, $x''' \in X'''$ beliebig. Dann ist $x''' \circ J_X \in X'$ und

$$x'''(x'') = (x''' \circ J_X)(J_X^{-1} x'') = x''(x''' \circ J_X)$$

für alle $x'' \in X''$, d.h. $x''' = J_{X'}(x''' \circ J_X)$, also ist $J_{X'}$ surjektiv.

„$\Leftarrow$“ Sei X' reflexiv, dann ist nach ($\Rightarrow$) auch X'' reflexiv. Andererseits ist $J_X(X) \subset X''$ ein abgeschlossener Teilraum von X'', also nach (b) ist $J_X(X)$ reflexiv. Mit (c) ist X ebenfalls reflexiv.

(e) „$\Leftarrow$“ ist Satz 2.14.

„$\Rightarrow$“ Da X und X'' isometrisch isomorph sind, ist X'' separabel. Nach Satz 2.14 ist X' ebenfalls separabel. □

SATZ 3.10 (Satz von Eberlein-Smulyan). *Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) \subset X$ schwach folgenkompakt ist.*

Wir beweisen nur die Implikation „$\Rightarrow$“.

BEWEIS. Sei (x_k) eine Folge in $K_1(0) \subset X$ und $Y := \overline{\operatorname{lin}\{x_k\}}$. Der Banachraum Y ist reflexiv und separabel. Daher ist $Y'' = J_Y(Y)$ separabel. Nach Satz 2.14 ist Y' ebenfalls separabel. Mit Satz 3.3 besitzt die Folge $(J_Y x_k)_k$ eine schwach* konvergente Teilfolge $(J_Y x_{k_l})_l$ mit Grenzwert $y'' \in Y''$, d.h. $(J_Y x_{k_l})(y') \xrightarrow[l\to\infty]{} y''(y')$ für alle $y' \in Y'$. Setze $x := J_Y^{-1}(y'') \in Y$. Dann gilt für alle $y' \in Y'$:

$$y'(x_{k_l}) = J_Y(x_{k_l})(y') \xrightarrow[l\to\infty]{} y''(y') = y'(x). \tag{3.1}$$

Sei wieder für $x' \in X' x'|_Y$ die Einschränkung von x' auf Y. Dann folgt aus (3.1): $x'(x_{k_l}) = (x'|_Y)(x_{k_l}) \to x'(x)$, d.h. $x_{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} x$ schwach. □

3.3. Das Spektrum

DEFINITION 3.11. *Sei X ein Banachraum, sowie $T \in \mathcal{L}(X)$.*

(a) *Die* Resolventenmenge $\rho(T)$ *von T ist*
$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, (T - \lambda I_X)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{L}(X) \right\}.$$
Wir schreiben kurz $T - \lambda := T - \lambda I_X$.

(b) *Die Abbildung $R : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$, $R(\lambda) = (T-\lambda)^{-1}$ heißt die* Resolventenabbildung *oder* Resolvente *von T.*

(c) $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ *heißt* Spektrum *von T.*

(d) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$ *heißt* Punktspektrum,
$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \text{ ist injektiv,nicht surjektiv mit dichtem Bild}\}$ *heißt das* stetige Sprektrum,
$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \text{ ist injektiv ohne dichtes Bild}\}$ *heißt* Restspektrum.

Es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.

BEMERKUNG. *Alle $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind Eigenvektoren, d.h. es existiert ein Eigenvektor $x \in X \setminus \{0\}$ mit $Tx = \lambda x$.*

BEWEIS. Für alle $\lambda \in \sigma_p(T)$ folgt, dass $(T - \lambda)$ nicht injektiv ist. Folglich ist $\operatorname{Kern}(T) \neq \{0\}$. Also finden wir ein $x \in \operatorname{Kern}(T - \lambda)$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

BEISPIEL.

Sei $\dim X < \infty$, $T \in \mathcal{L}(X)$ *beliebig. Dann gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } T\}$$
$$\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \varnothing$$

PROPOSITION 3.12. *Sei* $X = \mathcal{C}([0,1])$ *und* $(Tx)(s) = \int_0^s x(t)\,dt$ *(siehe Proposition 1.44). Es gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\},\ \sigma_c(T) = \sigma_p(T) = \varnothing.$$

BEWEIS. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist T injektiv. $\mathrm{Bild}(T)$ ist nicht dicht, denn $(Tx)(0) = 0$ gilt für alle $x \in X$. Folglich ist $0 \in \sigma_r(T)$.

BEHAUPTUNG: Sei $\lambda \neq 0$. Dann ist $T - \lambda$ bijektiv.

BEWEIS: Sei $y \in \mathcal{C}([0,1])$ beliebig. Betrachte die Gleichung $Tx - \lambda x = y$, d.h.

$$(*) \qquad \int_0^s x(t)\,dt - \lambda x(s) = y(s)$$

Sei zunächst $y \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Dann ist $(*)$ dem Anfangswertproblem äquivalent

$$\begin{cases} x'(s) - \dfrac{1}{\lambda}x(s) = -\dfrac{1}{\lambda}y'(s), \\ \qquad\qquad x(0) = -\dfrac{y(0)}{\lambda}. \end{cases}$$

Das Problem besitzt eine eindeutige Lösung

$$x(s) = -\frac{y(s)}{\lambda} - \frac{e^{s/\lambda}}{\lambda^2}\int_0^s e^{-t/\lambda}y(t)\,dt.$$

Sei nun $y \in \mathcal{C}([0,1])$ beliebig. Da $\mathcal{C}^1([0,1])$ dicht in $\mathcal{C}([0,1])$ liegt, existiert eine Folge $(y_n) \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ mit $y_n \to y$. Folglich ist die Folge (x_n) mit

$$x_n(s) = -\frac{y_n(s)}{\lambda} - \frac{e^{s/\lambda}}{\lambda^2}\int_0^s e^{-t/\lambda}y_n(t)\,dt$$

konvergiert mit Grenzwert $x \in \mathcal{C}([0,1])$. Aus $Tx_n - \lambda x_n = y_n$ folgt dann $Tx - \lambda x = y$. Also ist $T - \lambda$ surjektiv.

Annahme: $T - \lambda$ sei nicht injektiv. Folglich gibt es ein $x \neq 0$ so, dass $Tx - \lambda x = 0$, d.h.

$$\int_0^s x(t)\,dt = \lambda x(s) \text{ für alle } s \in [0,1].$$

Zu dieser Integralgleichung ist das folgende Anfangswertproblem äqivalent:

$$\begin{cases} x(s) = \lambda x'(s), \\ \quad x(0) = 0. \end{cases}$$

Somit ist $x = 0$. Widerspruch! $\boxed{\text{B}}$ □

Als Nebenprodukt des Beweis haben wir die Resolvente von T bestimmt:

$$[R(\lambda)y](s) = -\frac{y(s)}{\lambda} - \frac{e^{s/\lambda}}{\lambda^2}\int_0^s e^{-t/\lambda}y(t)dt.$$

PROPOSITION 3.13. *Sei* $X = \{x \in \mathcal{C}([0,1]) \,|\, x(0) = 0\}$ *und* $(Tx)(s) = \int_0^s x(t)\,dt$. *Es gilt*

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = \{0\},\ \sigma_r(T) = \sigma_p(T) = \varnothing.$$

BEWEIS. Wie in Proposition 3.12 zeigt man, dass T injektiv ist. T ist nicht surjektiv, denn

$$y(s) = \begin{cases} 0, & s \le 1/2 \\ s - 1/2, & s > 1/2. \end{cases}$$

ist ein Element von X. Jedoch gibt es kein $x \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $\int_0^s x(t)\,dt = y(s)$.

BEHAUPTUNG: Bild(T) liegt dicht in X.

BEWEIS: $Y := \left\{x \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, x(0) = x'(0) = 0\right\}$ liegt dicht in X (Beweis selbst). Sei $y \in Y$ beliebig. Also gilt $y' \in X$ und $y(s) = \int_0^s y'(t)\,dt$ liegt im Bild(T). $\boxed{\text{B}}$

Sei nun $\lambda \neq 0$ beliebig. $T - \lambda$ ist bijektiv, denn für jedes $y \in X$ liegt

$$\frac{y(s)}{\lambda} + \frac{\mathrm{e}^{s/\lambda}}{\lambda^2} \int_0^s \mathrm{e}^{-t/\lambda} y(t) dt$$

wieder in X. □

PROPOSITION 3.14. *Sei* $X = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, $a \in \ell^\infty$. *Sei*

$$T : \ell^p \to \ell^p,\ (x_n) \mapsto (a_n x_n) \text{ mit } a = (a_n) \in \ell^\infty.$$

der Multiplikationsoperator mit a. Dann gilt

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, \lambda = \lambda_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\},$$

$$\{\lambda \in \mathbb{K} \,|\, \lambda \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_k) \text{ und } \lambda \neq a_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$
$$= \begin{cases} \sigma_s(T), & p < \infty, \\ \sigma_r(T), & p = \infty. \end{cases}$$

BEWEIS. Sei (e_n) die Folge mit $(e_n)_k = \delta_{nk}$. Dann gilt $Te_n = a_n e_n$. Somit ist $T - a_n$ nicht injektiv, d.h. $a_n \in \sigma_p(T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun λ ein Häufungswert von (a_n) mit $\lambda \neq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall ist $T - \lambda$ injektiv.

BEHAUPTUNG 1: $(T - \lambda)$ ist nicht surjektiv.

BEWEIS: Angenommen $(T - \lambda)$ wäre surjektiv. Folglich wäre $(T - \lambda)^{-1}$ stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge von a mit $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$. Wähle ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_{n_{k_0}} - \lambda| < \varepsilon$. Dann ist

$$\|(T - \lambda)^{-1} e_{k_0}\| = \|(a_{n_{k_0}} - \lambda)^{-1}) e_{k_0}\| = |\lambda_{n_{k_0}} - \lambda|^{-1} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also ist $(T - \lambda)^{-1}$ undbeschräkt. Ein Widerspruch! $\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2: Bild$(T - \lambda)$ liegt dicht in X, falls $1 \le p < \infty$, und nicht, falls $p = \infty$.

Beweis: Sei zunächst $1 \leq p < \infty$. Dann ist ℓ^p separabel, d.h. zu jedem $y \in X$ gibt es ein $y_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$, mit $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Betrachte die Folge x_ε mit

$$(x_\varepsilon)_n := \frac{(y_\varepsilon)_n}{a_n - \lambda}.$$

Offenbar ist $x_\varepsilon \in \ell^p$ und $(T - \lambda)x_\varepsilon = y_\varepsilon$. Also ist $y_\varepsilon \in \mathrm{Bild}(T)$.

Sei nun $p = \infty$, sowie $e := (1,1,1,\dots) \in \ell^\infty$. Angenommen $\mathrm{Bild}(T - \lambda)$ wäre dicht in X. Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in \ell^\infty$ mit $\|y - e\|_\infty < \varepsilon$, $y = (T - \lambda)x$. Sei (a_{n_k}) wieder eine Teilfolge von a mit $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$. Es gilt

$$|y_{n_k}| = |a_{n_k} - \lambda||x_{n_k}| \leq |a_{n_k} - \lambda|\|x\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Desweiteren folgt aus $\|y - e\|_\infty < \varepsilon$, dass

$$|y_{n_k} - 1| \leq \|y - e\|_\infty < \varepsilon.$$

Also gilt $|y_{n_k}| > 1 - \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ein Widerspruch! $\boxed{\text{B2}}$

Behauptung 3:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \neq a_k\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda \text{ ist kein Häufungswert der Folge } (a_k)\ \}.$$

Beweis selbst. □

Hier sind einige weitere Beispiele ohne Beweis.

Beispiele. (1) *Sei* $X = L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$, $(Tx)(s) := t(s)x(s)$ *der Multiplikationsoperator mit* $t \in C([0,1])$. *Dann ist*

$$\sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \,\middle|\, |t^{-1}(\{\lambda\})| > 0\right\},$$
$$\sigma(T) = \{t(s) \mid s \in [0,1]\}.$$

wobei $|\cdot|$ *das Lebesgue-Maß bezeichnet.*

(2) *Sei nun* $t \in L^\infty([0,1])$. *Dann ist*

$$\begin{aligned}\sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\,\mathrm{Bild}(t) \cap B_\varepsilon(\lambda)| > 0\ \forall \varepsilon > 0\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |t^{-1}(U)| > 0 \textit{ für jede offene Umgebung } U \ni \lambda\right\},\end{aligned}$$

das wesentliche Bild der Funktion t.

Satz 3.15. *Es gilt:*

(a) $\rho(T)$ *ist offen*
(b) $\|R_T(\lambda)\| \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda,\sigma(T))}$, $\forall \lambda \in \rho(T)$
(c) $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R_T(\lambda)$ *ist analytisch*
(d) *Es gelten die erste Resolventengleichung:*

$$\begin{aligned}R_T(\lambda) - R_T(\lambda') &= (\lambda - \lambda')R_T(\lambda)R_T(\lambda') \\ &= (\lambda - \lambda')R_T(\lambda')R_T(\lambda)\end{aligned}$$

sowie die zweite Resolventengleichung:

$$\begin{aligned}R_T(\lambda) - R_S(\lambda) &= R_T(\lambda)(S - T)R_S(\lambda) \\ &= R_S(\lambda)(S - T)R_T(\lambda).\end{aligned}$$

(e) *$\sigma(T)$ ist kompakt. Genauer:* $|\lambda| \leq \|T\| \quad \forall \lambda \in \sigma(T)$

(f) *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *so ist* $\sigma(T) \neq \varnothing$

Beweis. (a),(b),(c): Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$, und

$$(*) \qquad |\lambda_0 - \lambda| < \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}$$

Es gilt

$$T - \lambda = (T-\lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) = (T-\lambda_0)\left(I - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\right)$$

Desweiteren konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}\left((\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0)\right)^k$ gegen $(I-(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0))^{-1}$. Also ist $\left(I-(\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\right)$ stetig invertierbar; also auch $T-\lambda$. Damit ist $\lambda \in \rho(T)$ und $\rho(T)$ offen. Sei $\lambda \in \sigma(T)$ beliebig. Mit $(*)$ folgt

$$|\lambda-\lambda_0| \geq \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1} \Rightarrow |\lambda-\lambda_0|^{-1} \leq \|R_T(\lambda_0)\|$$

$$\Rightarrow \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda-\lambda_0|^{-1} \leq \|R_T(\lambda_0)\| \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_0,\sigma(T))} \leq \|R_T(\lambda_0)\|$$

Desweiteren gilt:

$$R_T(\lambda) = \left(I-(\lambda-\lambda_0)R_T(\lambda_0)^{-1}\right)^{-1} R_T(\lambda_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_T(\lambda_0)^{k+1}$$

Also ist $R_T(\lambda)$ analytisch.

(d) Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} A^{-1} - B^{-1} &= A^{-1}(I - AB^{-1}) = A^{-1}(B-A)B^{-1} \\ &= B^{-1}(BA^{-1} - I) = B^{-1}(B-A)A^{-1} \end{aligned}$$

Setze nun $A = T - \lambda$ und $B = T - \lambda'$. Dann ist $B - A = \lambda - \lambda'$ und die erste Resolventengleichung ist gezeigt.
Ist hingegen $A = T - \lambda$ und $B = S - \lambda$, so ist $B - A = S - T$. Es folgt die zweite Resolventengleichung.

(e) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$. Dann folgt

$$(**) \qquad \left\|\frac{T}{\lambda}\right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} (T-\lambda)^{-1} &= \left(-\lambda\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)\right)^{-1} \\ = -\lambda^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1} &\overset{(**)}{=} -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}T^n \\ &\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \end{aligned}$$

(f) Angenommen $\sigma(T) = \varnothing \Rightarrow \rho(T) = \mathbb{C}$. Wähle ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|(T-\lambda_0)^{-1}\|^{-1}$

$$\Rightarrow R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k R_T(\lambda_0)^{k+1}$$

Sei $l \in \mathcal{L}(X)'$ beliebig. Dann gilt

$$l(R_T(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k l(R_T(\lambda_0)^{k+1})$$

$$\overset{\lambda_0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} f_l \colon \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto l(R_T(\lambda)) \text{ ist analytisch}$$

Sei $|\lambda| > 2\|T\|$ dann gilt

$$\begin{aligned} |l(R_T(\lambda))| &\leq \|l\|\|R_T(\lambda)\| \overset{\text{(e)}}{\leq} \|l\||\lambda|^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^k \\ &\leq \|l\||\lambda|^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{2\|l\|}{|\lambda|} < \frac{\|l\|}{\|T\|} \end{aligned}$$

Folglich ist f_l beschränkt, und somit nach dem Satz von Liouville konstant. Sei $\lambda_0 = 0$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k l(T^{-k-1}) = l((T-\lambda)^{-1}) \overset{f_l \text{ konst.}}{=} l(T^{-1})$$

$$\Rightarrow l(T^{-k-1}) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow l(T^{-2}) = 0 \; \forall l \in \mathcal{L}(X)'.$$

Ist $T^{-2} \neq 0$, so gibt es nach Korollar 2.12 (a) ein $l \in \mathcal{L}(X)'$ mit $l(T^{-2}) \neq 0$. Also ist $l(T^{-2}) = 0$. Ein Widerspruch! □

SATZ 3.16. *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$.*

(a) *Für alle $\lambda \in \sigma(T)$ gilt: $|\lambda| \leq r(T) := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$.*
(b) *Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.*

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt also $r(T) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Daher nennt man $r(T)$ den *Spektralradius* von T.

3.4. Schlussbemerkungen

3.4.1. Konvexität und schwache Konvergenz.

SATZ 3.17 (Satz von Mazur). *Sei X ein Banachraum und (x_k) eine Folge in X, die schwach gegen $x \in X$ konvergiert. Dann gibt es eine Folge (y_k), die aus endlichen Konvexkombinationen der x_k besteht, die stark gegen x konvergiert. Genauer: Es gibt reelle Zahlen $t_{k,i}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $0 \leq t_{k,i} \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{\infty} t_{k,i} = 1$, wobei für jedes k nur endlich viele $t_{k,i}$ nicht verschwinden, mit*

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} t_{k,i}x_i \xrightarrow[k\to\infty]{} x.$$

Im Hilbertraum lässt sich der Satz von Mazur zum Satz von Banach-Saks verschärfen.

SATZ 3.18 (Satz von Banach-Saks). *Sei X ein Hilbertraum und (x_k) eine Folge in X, die schwach gegen $x \in X$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge (x_{k_l}) mit*

$$\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_{k_i} \to x.$$

3.4.2. Konvexität und Reflexivität.

DEFINITION 3.19. *Ein normierter Raum X heißt* gleichmäßig konvex, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass folgendes gilt: Sind $x, y \in X$ mit $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ und $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1-\delta$, so folgt $\|x-y\| < \varepsilon$.*

Dies ist eine Eigenschaft der Norm. Geht man zu einer äquivalenten Norm über, so kann diese Eigenschaft verlorengehen.

SATZ 3.20 (Satz von Milman). *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

Es gibt jedoch reflexive Banachräume, die nicht gleichmäßig konvex sind.

KAPITEL 4

Hilberträume

4.1. Vektorräume mit Skalarprodukt

Definition 4.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt ein* Skalarprodukt *(oder* inneres Produkt*) auf X, wenn gilt:*

(a) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *für alle $x \in X$, $\langle x, x \rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$,*
(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall\, x, y \in X$,
(c) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall\, x, y \in X, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$,
(d) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \forall\, x, y, z \in X$.

Gilt statt (a) nur

(a′) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *für alle $x \in X$,*

so heiß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Semiskalarprodukt. *$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt ein* Vektorraum mit Skalarprodukt *oder* Prähilbertraum.

Bemerkung. *In manchen Büchern wird statt (c) die Bedingung $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ verlangt.*

Zunächst listen wir einige einfache Eigenschaften des Skalarproduktes auf:

- $\langle \lambda x, y \rangle \overset{(b)}{=} \overline{\langle y, \lambda x \rangle} \overset{(c)}{=} \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x \rangle} \overset{(b)}{=} \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$, (Antilinearität)
- $\langle x + y, z \rangle \overset{(b)}{=} \overline{\langle z, x + y \rangle} \overset{(d)}{=} \overline{\langle z, x \rangle} + \overline{\langle z, y \rangle} \overset{(b)}{=} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Satz 4.2 (Schwarzsche Ungleichung oder Cauchy-Schwarz-Ungleichung oder CauchySchwarz-Bunjakowski-Ungleichung). *Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X und ist $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, so gilt:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall\, x, y \in X. \tag{4.1}$$

Es gilt $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. O.B.d.A. seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ betrachte

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle \\ &= \|x\|^2 + t(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) + t^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 =: p(t). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $p(t)$ sind

$$t = -\frac{\mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \pm \frac{\sqrt{(\mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}{\|y\|^2}.$$

Aus $p(t) \geq 0$ folgt, dass das Polynom höchstens eine Nullstelle besitzt. Somit gilt

$$\mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Re}\, \langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist die Ungleichung $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ bewiesen. Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wähle ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ so, dass $|\langle x,y\rangle| = c\langle x,y\rangle$. Dann ist

$$|\langle x,y\rangle| = c\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\, c\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x,cy\rangle = |\mathrm{Re}\,\langle x,cy\rangle| \le \|x\|\|cy\| = \|x\|\|y\|,$$

denn

$$\|cy\|^2 = \langle cy,cy\rangle = c\langle cy,y\rangle = c\bar{c}\langle y,y\rangle = |c|^2\langle y,y\rangle = \langle y,y\rangle = \|y\|^2.$$

Somit ist (4.1) bewiesen.

Seien nun x und y linear abhängig. Dann ist $x = ay$ oder $y = ax$ für ein $a \in \mathbb{K}$. Für $x = ay$ ist

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle| &= |\langle ay,y\rangle| = |\bar{a}\langle y,y\rangle| = |a|\langle y,y\rangle = |a|\|y\|^2\\ &= \|y\|(|a|\|y\|) = \|y\|\sqrt{a\bar{a}\langle y,y\rangle} = \|y\|\sqrt{\langle ay,ay\rangle} = \|y\|\sqrt{\langle x,x\rangle} = \|y\|\|x\|.\end{aligned}$$

Analog für $y = ax$ erhält man die Gleichung $|\langle x,y\rangle| = \|y\|\|x\|$.

Es gelte umgekehrt $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$. Wähle ein $c \in \mathbb{K}$ mit $|c| = 1$ so, dass $|\langle x,y\rangle| = c\langle x,y\rangle$. Dann ist

$$\langle \bar{c}x,y\rangle = c\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\| = \|\bar{c}x\|\|y\|.$$

Sei $\tilde{x} := \bar{c}x$. Dann ist $\langle \tilde{x},y\rangle = \|\tilde{x}\|\|y\|$. O.B.d.A. sei $y \ne 0$. Folglich gilt $(\mathrm{Re}\,\langle \tilde{x},y\rangle)^2 = \|\tilde{x}\|^2\|y\|^2$ und das quadratische Polynom $\tilde{p}(t) := \|\tilde{x} + ty\|^2$ hat eine doppelte Nullstelle $t_0 = -\frac{\mathrm{Re}\,\langle \tilde{x},y\rangle}{\|y\|^2}$, d.h.

$$\begin{aligned}\langle \tilde{x} + t_0y, \tilde{x} + t_0y\rangle &= \|\tilde{x} + t_0y\|^2 = 0\\ &\Rightarrow \tilde{x} + t_0y = 0 \Rightarrow \bar{c}x + t_0y = 0.\end{aligned}$$

Folglich sind x und y linear abhängig. □

Bemerkung. *Die Schwarzsche Ungleichung gilt auch für Semiskalarprodukte. Beweis selbst.*

Korollar 4.3. *Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein (semi)Skalarprodukt, so ist $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine (halb)Norm.*

Beweis. Man verifiziert die Eigenschaften (a)-(c) aus Definition 1.3:

(a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\lambda x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} = |\lambda|\|x\|$,
(c)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle\\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle\\ &\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle|\\ &\overset{\text{Schwarz}}{\le} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Sei X ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann ist $X \times X = \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in X\}$ ein normierter Raum mit der Norm

$$\|(x_1,x_2)\|_{X\times X} := \sqrt{\langle x_1,x_1\rangle} + \sqrt{\langle x_2,x_2\rangle}.$$

SATZ 4.4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ *ist stetig.*

BEWEIS. Seien $x, y \in X$ beliebig. Seien (x_n) und (y_n) Folgen mit $x_n \to x$, $y_n \to y$. Betrachte

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle| &= |\langle x, y-y_n\rangle + \langle x-x_n, y_n\rangle| \\ &\leq |\langle x, y-y_n\rangle| + |\langle x-x_n, y_n\rangle| \\ &\overset{\text{Schwarz}}{\leq} \underbrace{\|x_n\|}_{\to x}\underbrace{\|y-y_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x-x_n\|}_{\to 0}\underbrace{\|y_n\|}_{\to y} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

□

BEISPIELE. *Die Vektorräume*

(1) $\mathbb{K}^n$ *mit* $\langle x,y\rangle := \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{x}_j y_j$,

(2) ℓ^2 *mit* $\langle x,y\rangle := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \overline{x}_j y_j$,

(3) $C([0,1])$ *mit* $\langle f,g\rangle := \int\limits_0^1 \overline{f(x)} g(x)dx$

sind Prähilberträume.

Eine Verallgemeinerung des Skalarproduktes ist die Sesquilinearform.

DEFINITION 4.5. *Eine Abbildung* $s : X \times X \to \mathbb{K}$ *heißt* Sesquilinearform *auf* X, *wenn für alle* $x, y, z \in X$ *und alle* $a, b \in \mathbb{K}$ *gilt:*

(a) $s(x, ay+bz) = as(x,y) + bs(x,z)$

(b) $s(ax+by, z) = \overline{a}s(x,z) + \overline{b}s(y,z)$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *so nennt man* s *auch* Bilinearform. *Die Abbildung* $q : X \to \mathbb{K}$, $q(x) := s(x,x)$ *heißt die durch* s *erzeugte* quadratische Form.

Man beachte, dass wir keine Symmetrie für $s(x,y)$ vorausgesetzt haben.

SATZ 4.6. *Es sei* X *ein komplexer Vektorraum,* s *eine Sesquilinearform auf* X, q *die zugehörige quadratische Form. Dann gilt für alle* $x, y \in X$ *die* Polarisierungsidentität

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)\big).$$

Beweis selbst.

BEMERKUNG. *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *so wird im Allgemeinen die Sesquilinearform durch ihre quadratische Form nicht eindeutig bestimmt. Beispiel:*

$$s(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Die zugehörige quadratische Form ist $q(x) = s(x,x) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$.

SATZ 4.7. *Ist* s *eine Sesquilinearform auf dem (reellen oder komplexen) Vektorraum* X *und* q *die durch* s *erzeugte quadratische Form, so gilt für alle* $x, y \in X$ *die* Parallelogrammidentität*:*

$$q(x+y) + q(x-y) = 2\big(q(x) + q(y)\big).$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}q(x+y)+q(x-y) &= s(x+y,x+y)+s(x-y,x-y)\\ &= s(x,x)+s(y,y)+s(x,y)+s(y,x)\\ &+s(x,x)+s(y,y)-s(x,y)-s(y,x)\\ &= s(x,x)+s(y,y)+s(x,x)+s(y,y)\\ &= 2q(x)+2q(y).\end{aligned}$$

□

DEFINITION 4.8. *Eine Sesquilinearform s auf X heißt* hermitesch, *wenn für alle $x,y \in X$ gilt: $\overline{s(x,y)} = s(y,x)$. Im reellen Fall heißt eine hermitesche Sesquilinearform auch* symmetrisch.

SATZ 4.9. *Es sei s eine Sesquilinearform auf einem komplexen Vektorraum X und q die zugehörige quadratische Form. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *s ist hermitesch,*
(b) *q ist reell, d.h. $q(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$,*
(c) $\operatorname{Re} s(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)\big)$ *für alle* $x,y \in X$,
(d) $\operatorname{Im} s(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x-iy)-q(x+iy)\big)$ *für alle* $x,y \in X$.

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b): $\overline{q(x)} = \overline{s(x,x)} = s(x,x) = q(x) \in \mathbb{R}$.
(b) $\Rightarrow$ (c): Aus der Polarisierungsidentität (Satz 4.6) folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} s(x,y) &= \frac{1}{4}\operatorname{Re}\big(q(x+y)-q(x-y)+iq(x-iy)-iq(x+iy)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)\big).\end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (d): $\operatorname{Im} s(x,y) = -\operatorname{Re} is(x,y) = \operatorname{Re} s(x,-iy) \overset{(c)}{=} \frac{1}{4}\big(q(x-iy)-q(x+iy)\big)$.
(d) $\Rightarrow$ (a):

$$\begin{aligned}\overline{s(x,y)} &= \operatorname{Re} s(x,y) - i\operatorname{Im} s(x,y)\\ &= \operatorname{Im} is(x,y) - i\operatorname{Im} s(x,y)\\ &= \operatorname{Im} s(x,iy) - i\operatorname{Im} s(x,y)\\ &= \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)-iq(x-iy)+iq(x+iy)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)-iq(y+ix)+iq(y-ix)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big(q(y+x)-q(y-x)-iq(y+ix)+iq(y-ix)\big)\\ &= s(y,x).\end{aligned}$$

d.h. s ist hermitesch. □

SATZ 4.10. *Ist s eine Sesquilinearform auf einem reellen Vektorraum X und q die zugehörige quadratische Form, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *s ist symmetrisch,*
(b) $s(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)\big)$ *für alle* $x,y \in X$.

Beweis selbst.

Definition 4.11. *Eine hermitesche Sesquilinearform s auf X heißt* positiv, *wenn $s(x,x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Sie heißt* strikt positiv, *wenn $s(x,x) > 0$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$. Die zugehörige quadratische Form q heißt positiv, bzw. strikt positiv, wenn s positiv, bzw. strikt positiv ist.*

Satz 4.12. *Eine strikt positive (bzw. positive) Sesquilinearform s auf X ist ein Skalarprodukt (bzw. Semiskalarprodukt).*

Beweis ist klar.

Satz 4.13 (Satz von Jordan-von Neumann). *Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum X ist genau dann durch ein Skalaprodukt erzeugt, wenn die Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

gilt. Das Skalarprodukt ist dann gegeben durch

$$\langle x,y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2\right), & \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), & \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ bereits bewiesen.
„$\Leftarrow$“ Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definiere $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

(1) Positivität: $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0$ und $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) Symmetrie: $\langle y,x\rangle = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \langle x,y\rangle$.
(3) Additivität:

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\Bigg(\left\|x + \frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2}\right\|^2 + \left\|x + \frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2}\right\|^2 \\ &\quad - \left\|x - \frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2}\right\|^2 - \left\|x - \frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2}\right\|^2 \Bigg). \end{aligned}$$

Mit der Parallelogrammidentität erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle &= \frac{1}{2}\left(\left\|x + \frac{y+z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 - \left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|x + \frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2 \right) \\ &= 2\left\langle x, \frac{y+z}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Mit $z = 0$ folgt

$$\langle x,y\rangle = 2\left\langle x, \frac{1}{2}y \right\rangle \quad \text{für alle} \quad x,y \in X \tag{4.2}$$

und daher
$$\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle = 2\left\langle x, \frac{1}{2}(y+z)\right\rangle = \langle x, y+z\rangle.$$

(4) Mit Induktion folgt aus (4.2), dass $2^{-n}\langle x,y\rangle = \langle x, 2^{-n}y\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wegen (3) ist $\langle x, 2y\rangle = 2\langle x,y\rangle$. Wieder mit Induktion erhalten wir die folgende Gleichung
$$2^{-n}m\langle x,y\rangle = \langle x, 2^{-n}my\rangle \quad \text{für alle} \quad n,m \in \mathbb{N}_0.$$
Sei nun $\lambda \geq 0$ beliebig. Dann existieren Zahlen $\lambda_k = m_k 2^{-n_k}$ mit $m_k, n_k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \big|\|x \pm \lambda_k y\| - \|x \pm \lambda y\|\big| &\leq \|(x \pm \lambda_k y) - (x \pm \lambda y)\| \\ &= \|(\lambda_k - \lambda)y\| \\ &= |\lambda_k - \lambda|\|y\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$
Folglich ist $\langle x, \lambda_k y\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle x, \lambda y\rangle$ und daher
$$\lambda\langle x,y\rangle = \lim_{k\to\infty} \lambda_k\langle x,y\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x, \lambda_k y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle.$$
Außerdem gilt
$$\begin{aligned} \langle x, -y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x-y\|^2 - \|x+y\|^2\right) = \\ -\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ = -\langle x,y\rangle. \end{aligned}$$
Also ist $\lambda\langle x,y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ behandelt man analog. □

DEFINITION 4.14. *Ein vollständiger Prähilbertraum heißt* Hilbertraum.

BEISPIELE. (1) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ *mit Skalarprodukt* $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i$ *ist ein Hilbertraum (vgl. Beispiel (4) nach Definition 1.12).*

(2) *Der Prähilbertraum* $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ *mit Skalarprodukt* $\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ *ist kein Hilbertraum (vgl. Beispiel (1) nach Definition 1.12).*

BEMERKUNG. *Jeder Prähilbertraum* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ *besitzt eine Vervollständigung zu einem Hilbertraum* $(\widetilde{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{X}})$. *Die lineare Isometrie EE* $: X \to \widetilde{X}$ *erfüllt*
$$\langle E(x), E(y)\rangle_{\widetilde{X}} = \langle x,y\rangle_X$$
für alle $x,y \in X$.

4.2. Orthogonalität

DEFINITION 4.15. *Sei* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Prähilbertraum. Seien* $A, B \subset X$ *beliebig.*

(a) $x \in X$ *heißt* orthogonal *zu* $y \in X$, *in Zeichen* $x \perp y$, *wenn* $\langle x,y\rangle = 0$.
(b) $x \in X$ *heißt orthogonal zu* A, *in Zeichen* $x \perp A$, *wenn* $x \perp y$ *für alle* $y \in A$.

(c) *A heißt* orthogonal *zu B, in Zeichen* $A \perp B$, *wenn* $x \perp y$ *für alle* $x \in A$, $y \in B$.
(d) *Das* orthogonale Komplement *zu A (oder* Orthogonalraum *zu A) ist die Menge* $A^\perp := \{x \in X | x \perp y \;\forall\, y \in A\}$

BEMERKUNG. (1) *Offenbar gilt:* $\{0\}^\perp = X$, $X^\perp = \{0\}$.
(2) *Aus* $A \subset B$ *folgt* $A^\perp \supset B^\perp$. *Zum Beweis wähle ein* $x \in B^\perp$. *Es gilt* $\langle x, y\rangle = 0$ *für alle* $y \in B \overset{A \subseteq B}{\Rightarrow} \langle x, y\rangle = 0 \;\forall\, y \in A \Rightarrow x \in A^\perp$.
(3) *Aus* $x \perp y$ *folgt* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ *(Satz von Pythagoras).*

SATZ 4.16. *Sei* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Prähilbertraum. Sei* $A \subset X$ *beliebig. Dann gilt:*
(a) $A^\perp$ *ist ein abgeschlossener Teilraum von X*
(b) $A^\perp = (\overline{A})^\perp$
(c) $A^\perp = (\operatorname{lin} A)^\perp = (\overline{\operatorname{lin} A})^\perp$

BEWEIS. (a) Seien $x, y \in A^\perp$ beliebig. Dann gilt $\langle x, z\rangle = 0$ und $\langle y, z\rangle = 0$ für alle $z \in A$. Folglich ist $\langle ax + by, z\rangle = \overline{a}\langle x, z\rangle + \overline{b}\langle y, z\rangle = 0$ und somit ist $ax + by \in A^\perp$, d.h. $A^\perp$ ist ein Vektorraum.

Sei $z \in A$ beliebig. Die Menge $\{x \in X | \langle x, z\rangle = 0\}$ ist abgeschlossen. da die Abbildung $x \mapsto \langle x, z\rangle$ stetig und $\{0\}$ abgeschlossen ist. Folglich ist $A^\perp = \bigcap\limits_{z \in A} \{x \in X | \langle x, z\rangle = 0\}$ abgeschlossen.

(b) „$\supset$“ Wegen Bemerkung (2) nach Definition 4.15 folgt aus $A \subset \overline{A}$ die Inklusion $A^\perp \supset (\overline{A})^\perp$.

„$\subset$“ Sei $x \in A^\perp$ beliebig. Dann gilt $\langle x, z\rangle = 0$ für alle $z \in A$ und daher $\langle x, z\rangle = 0$ für alle $z \in \overline{A}$. Folglich ist $x \in (\overline{A})^\perp \Rightarrow A^\perp \subset (\overline{A})^\perp$.

(c) Wegen Bemerkung (2) nach Definition 4.15 folgt aus $A \subset \operatorname{lin} A$ die Inklusion $A^\perp \supset (\operatorname{lin} A)^\perp$.

Sei $x \in A^\perp$ beliebig. Dann ist $\langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle = 0$ für alle $z_1, z_2 \in A$ und daher $\langle x, az_1 + bz_2\rangle = 0$. Somit gilt $\langle x, z\rangle = 0$ für alle $z \in \operatorname{lin} A$, d.h. $x \in (\operatorname{lin} A)^\perp$ □

SATZ 4.17 (Approximationssatz). *Sei X ein Hilbertraum. Sei A eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von X. Dann gibt es zu jedem* $x \in X$ *genau eine beste Approximation in A, d.h. es gibt genau ein* $y \in A$ *mit*

$$\|x - y\| = d(x, A) := \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

BEMERKUNG. *Die Aussage ist für allgemeine Prähilberträume oder Banachräume falsch! Zum Beispiel betrachte den Prähilbertraum* $X = C([-1,1])$ *ausgestattet mit der* $\|\cdot\|_2$*-Norm. Er ist kein Hilbertraum. Die Menge*

$$A := \{f \in C([-1,1]) | f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \leq 0\}$$

ist abgeschlossen und konvex. Sei $g(x) = 1$ *für alle* $x \in [-1,1]$. *Dann ist* $d(g, A) = 1$. *Für jedes* $f \in A$ *gilt jedoch* $\|f - g\| > 1$. *Sommit gibt es in A keine beste Approximation zu g.*

BEWEIS VON SATZ 4.17. (1) Existenz: Es gibt eine Folge (y_n) in A mit $\|x - y_n\| \to d(x, A)$. Da A konvex ist, gilt $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in A$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$

und $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\| \to d(x,A)$ für $n,m \to \infty$. Betrachte

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x-y_n) - (x-y_m)\|^2 \\ &\overset{\text{Satz 4.7}}{=} 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - \|2x - (y_n+y_m)\|^2 \\ &= 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Somit ist (y_n) eine Cauchyfolge. Folglich existiert ein $y \in A$ mit $y_n \to y$ und $\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d(x,A)$.

(2) Eindeutigkeit: Seien $y,z \in A$ mit $\|x-y\| = \|x-z\| = d(x,A)$. Die Folge $(y,z,y,z,...)$ ist eine Cauchyfolge. Da sie konvergent ist, gilt $y = z$. □

Satz 4.18 (Projektionssatz). *Sei X ein Hilbertraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt:*

(a) *Jedes $x \in X$ lässt sich eindeutig in der Form $x = y+z$ schreiben mit $y \in M$ und $z \in M^\perp$. Das Element y heißt die* orthogonale Projektion *von x auf M.*
(b) *$M^{\perp\perp} = M$.*

Beweis. (a) (1) Existenz. Wähle $y \in M$ als die beste Approximation von x in M. Setze $z = x-y$. Es genügt zu zeigen, dass $z \in M^\perp$, d.h. $\langle w,z\rangle = 0$ für alle $w \in M$. O.B.d.A. sei $w \neq 0$. Da M ein Vektorraum ist, ist $y + aw \in M$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Betrachte

$$\begin{aligned} d^2 := d(x,M)^2 &\le \|x - (y+aw)\|^2 \\ &= \|(x-y) - aw\|^2 \\ &= \|z - aw\|^2 \\ &= \|z\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(a\langle z,w\rangle) + |a|^2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt $d^2 = \|z\|^2$. Folglich ist

$$|a|^2\|w\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(a\langle z,w\rangle) \ge 0.$$

Insbesondere für $a := \frac{\langle w,z\rangle}{\|w\|^2}$ erhalten wir:

$$\frac{|\langle w,z\rangle|^2}{\|w\|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{|\langle w,z\rangle|^2}{\|w\|^2}\right) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{|\langle w,z\rangle|^2}{\|w\|^2} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \langle w,z\rangle = 0,$$

d.h. $w \perp z$ für alle $w \in M$. Somit ist $z \in M^\perp$.

(2) Eindeutigkeit: Es gäbe zwei orthogonale Projektionen von X auf M, d.h. $x = y+z$ und $x = y'+z'$ mit $y,y' \in M$ und $z,z' \in M^\perp$. Dann gilt $y - y' \in M$ und $z - z' \in M^\perp$ und somit $y - y' = z' - z \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d.h. $y = y'$ und $z = z'$.

(b) Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt $\langle x,y\rangle = 0$ für alle $y \in M^\perp$, d.h. $x \in M^{\perp\perp}$ und damit $M \subset M^{\perp\perp}$. Umgekehrt, sei $x \in M^{\perp\perp}$. Sei $y \in M \subset M^{\perp\perp}$ die orthogonale Projektion von y auf M, d.h. $x = y+z$ mit $z \in M^\perp$. Dann ist $z = x - y \in M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$ und damit $x = y$. Folglich ist $x \in M$ und damit $M^{\perp\perp} \subset M$. □

Korollar 4.19. *Sei X ein Hilbertraum, $A \subset X$ eine Menge. Dann gilt:*

(a) $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{lin} A}$ *ist der kleinste abgeschlossene Teilraum, der* A *enthält;*
(b) *Es gilt* $A^{\perp} = \{0\}$ *genau dann, wenn* $\overline{\operatorname{lin} A} = X$*, d.h. wenn* A *total ist.*

Beweis selbst.

Definition 4.20. *Sind* M_1, M_2 *Teilräume von* X *mit* $M_1 \cap M_2 = \{0\}$*, so heißt* $M_1 \dot{+} M_2 := \{y_1 + y_2 | y_1 \in M_1, y_2 \in M_2\}$ *die* direkte Summe *von* M_1 *und* M_2*. Ist* $M_1 \perp M_2$*, so gilt offenbar* $M_1 \cap M_2 = \{0\}$*. In diesem Fall schreibt man* $M_1 \oplus M_2$ *statt* $M_1 \dot{+} M_2$*.* $M_1 \oplus M_2$ *heißt* orthogonale Summe*. Ist* $M = M_1 \oplus M_2$ *mit* M_1, M_2 *abgeschlossen, so schreibt man* $M_1 = M \ominus M_2$*.*

Satz 4.21. *Es sei* X *ein Hilbertraum. Dann gilt:*

(a) *Für Teilräume* $M_1, M_2 \subset X$ *ist* $M_1 \oplus M_2$ *genau dann abgeschlossen, wenn* M_1 *und* M_2 *abgeschlossen sind.*
(b) *Sind* M_1 *und* M *abgeschlossene Teilräume mit* $M_1 \subset M$*, so existiert genau ein abgeschlossener Teilraum* $M_2 \subset M$ *mit* $M = M_1 \oplus M_2$*.*

Beweis. (a) ($\Leftarrow$) Sei (y_n) eine Cauchyfolge in $M := M_1 \oplus M_2$, d.h. zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Nach Satz 4.18 existieren eindeutige $y_{1,n} \in M_1$, $y_{2,n} \in M_2$ mit $y_n = y_{1,n} + y_{2,n}$. Folglich gilt $\|y_n - y_m\|^2 = \|y_{1,n} - y_{1,m}\|^2 + \|y_{2,n} - y_{2,m}\|^2 < \varepsilon^2$ für alle $n, m \geq N$. Daraus folgt $\|y_{1,n} - y_{1,m}\| < \varepsilon$ und $\|y_{2,n} - y_{2,m}\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, d.h. $(y_{1,n})$, $(y_{2,n})$ sind Cauchyfolgen. Da M_1 und M_2 vollständig sind (als abgeschlossene Teilmengen eines Hilbertraumes), sind diese Folgen konvergent. Somit ist die Folge (y_n) konvergent, d.h. $M_1 \oplus M_2$ ist vollständig. Mit Satz 1.16 folgt daraus, dass $M_1 \oplus M_2$ abgeschlossen ist.

($\Rightarrow$) Seien $(y_{1,n})$ und $(y_{2,n})$ Cauchyfolgen in M_1 bzw. M_2. Dann ist (y_n) mit $y_n = y_{1,n} + y_{2,n}$ eine Cauchyfolge in $M_1 \oplus M_2$. Da $M_1 \oplus M_2$ vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein $y \in M_1 \oplus M_2$. Der Grenzwert y besitzt die eindeutige Zerlegung $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in M_1$ und $y_2 \in M_2$. Aus

$$\|y_{1,n} - y_1\|^2 + \|y_{2,n} - y_2\|^2 = \|y_n - y\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

folgt, dass $y_{1,n} \to y_1$ und $y_{2,n} \to y_2$. Mit Satz 1.11 sind M_1 und M_2 abgeschlossen.

(b) O.B.d.A. sei $M = X$. Setze $M_2 := M_1^{\perp} \Rightarrow X = M_1 \oplus M_2$. □

Definition 4.22. *Eine Familie* $M = \{e_\alpha \in X \,|\, \alpha \in I\}$ *in einem Prähilbertraum* X *heißt* Orthonormalsystem *(ONS), wenn gilt:*

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} := \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Ein totales Orthonormalsystem heißt Orthonormalbasis *(ONB).*

Satz 4.23. *Sei* X *ein Prähilbertraum. Dann gilt:*

(a) *Jedes Orthonormalsystem ist linear unabhängig.*
(b) *Jede Orthonormalbasis ist ein maximales Orthonormalsystem.*
(c) *In jedem Hilbertraum ist jedes maximale Orthonormalsysten eine Orthonormalbasis.*

BEWEIS. (a) Aus $\sum_{j=1}^{n} c_j e_{\alpha_j} = 0$ folgt

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \Rightarrow c_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \{1, ..., n\}.$$

(b) Angenommen, die Orthonormalbasis $M := \{e_\alpha | \alpha \in I\}$ ist nicht maximal, d.h. es gibt ein $e \in X$ mit $\|e\| = 1$, $e \perp M$, so dass $M \cup \{e\}$ eine Orthonormalbasis ist. Dann ist $e \in M^\perp = (\overline{\operatorname{lin} M})^\perp$ und folglich $\overline{\operatorname{lin} M} \neq X$. Dann ist M nicht total und damit M keine Orthonormalbasis. Widerspruch!

(c) Sei $M := \{e_\alpha | \alpha \in I\}$ ein maximales Orthonormalsystem. Angenommen, M ist nicht total, d.h. $\overline{\operatorname{lin} M} \neq X$. Dann folgt aus dem Projektionssatz (Satz 4.18), dass $(\overline{\operatorname{lin} M})^\perp \neq \{0\}$. Mit Satz 4.16 (c) bedeutet dies, dass $M^\perp \neq \{0\}$. Also gibt es ein $e \in X$ mit $\|e\| = 1$, $e \perp e_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, d.h. M ist nicht maximal. Widerspruch! □

BEISPIEL. *In $\ell^2(\mathbb{N})$ ist $\{e_j | j \in \mathbb{N}\}, (e_j)_k = \delta_{jk}$ eine Orthonormalbasis.*

SATZ 4.24. *Sei X ein Prähilbertraum, $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ ein Orthonormalsystem in X. Dann gilt:*

(a) *Ist (α_n) eine Folge paarweise verschiedener Elemente aus I und (c_n) eine Folge aus $\mathbb{K}$, so gilt:*

  (1) *Ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_{\alpha_n}$ konvergent, bzw. $\left(\sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so ist $(c_n) \in \ell^2$.*

  (2) *Ist $(c_n) \in \ell^2$, so ist $\left(\sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d.h. $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_{\alpha_n}$ ist konvergent, falls X ein Hilbertraum ist.*

(b) *Ist $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_{\alpha_n}$, so gilt*

$$\begin{aligned} c_n &= \langle e_{\alpha_n}, y \rangle, \\ \|y\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2, \\ \langle y, x \rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, e_{\alpha_n} \rangle \langle e_{\alpha_n}, x \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in X. \end{aligned}$$

BEWEIS. (a) Die Folge (x_m) mit $x_m = \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt

$$\sum_{n=m+1}^{k} |c_n|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{k} c_n e_{\alpha_n} \right\|^2 = \|x_k - x_m\|^2 \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c_n) \in \ell^2.$$

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} c_n = \langle e_{\alpha_n}, c_n e_{\alpha_n} \rangle &= \lim_{m\to\infty} \langle e_{\alpha_n}, \sum_{j=1}^{m} c_j e_{\alpha_j} \rangle \\ &= \langle e_{\alpha_n}, \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} c_j e_{\alpha_j} \rangle = \langle e_{\alpha_n}, y \rangle. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_{\alpha_n} \right\|^2 = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n} \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

und

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \lim_{m\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}, x \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \overline{c_n} \langle e_{\alpha_n}, x\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \langle y, e_{\alpha_n}\rangle \langle e_{\alpha_n}, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_{\alpha_n}\rangle \langle e_{\alpha_n}, x\rangle.\end{aligned}$$

□

SATZ 4.25 (Besselsche Ungleichung). *Sei X ein Prähilbertraum. Ist $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem und $x \in X$, so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

BEWEIS. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setze $x_N := x - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n$. Dann ist $x_N \perp e_k$ für alle $k = 1, \ldots, N$. Folglich gilt

$$\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\|^2 \overset{\text{Satz } 4.24}{=} \|x_N\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, x\rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle e_n, x\rangle|^2.$$

Mit $N \to \infty$ folgt daraus die Behauptung. □

LEMMA 4.26. *Sei X ein Prähilbertraum. Sei $M = \{e_\alpha | \alpha \in I\}$ ein Orthonormalsystem in X und $x \in X$. Dann ist*

$$S_x := \{e_\alpha | \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$$

höchstens abzählbar.

BEWEIS. Betrachte $S_{x,n} := \{e_\alpha | |\langle e_\alpha, x\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$. Nach der Besselschen Ungleichung ist $S_{x,n}$ endlich. Folglich ist $S_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{x,n}$ abzählbar. □

SATZ 4.27 (Entwicklungssatz). *Sei X ein Prähilbertraum.*

(a) *Ist $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ ein Orthonormalsysten im Prähilbertraum X, so gilt für alle $x \in X$:*

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \qquad \text{(allgemeine Besselsche Ungleichung)}$$

(b) *Ein Orthonormalsystem $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ im Prähilbertraum X ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn für jedes $x \in X$ gilt:*

$$\sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \|x\|^2. \qquad \text{(Parsevalsche Gleichung)}$$

Es ist dann $x = \sum_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$.

(c) *Ist $\{e_\alpha | \alpha \in I\}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum X, so ist $\sum_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$ die orthogonale Projektion von x auf den abgeschlossenen Teilraum $\overline{\mathrm{lin}\{e_\alpha | \alpha \in I\}}$.*

BEWEIS. (a) Seien $x \in X$ und $y = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n} \in \operatorname{lin}\{e_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ beliebig. Nach Lemma 4.26 hat die Summe höchstens abzählbar viele Summanden. Betrachte:

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{m} c_n\langle x, e_{\alpha_n}\rangle + \sum_{n=1}^{m}|c_n|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \\
&\qquad - 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{m} c_n\langle x, e_{\alpha_n}\rangle + \sum_{n=1}^{m}|c_n|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle - c_n|^2 \\
&\geq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Bemerke, dass $\|x-y\|$ minimal wird, wenn $c_n = \langle e_{\alpha_n}, x\rangle$. In diesem Fall ist $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2$ und folglich $\sum\limits_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x-y\|^2 \leq \|x\|^2$.

(b) ($\Rightarrow$) Sei $\{e_\alpha|\alpha \in I\}$ eine Orthonormalbasis, d.h. $\overline{\operatorname{lin}\{e_\alpha|\alpha \in I\}} = X$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Indices $\alpha_1, ..., \alpha_m \in I$ und Zahlen $c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}$ mit $\|x-y\| \leq \varepsilon$ für $y = \sum\limits_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}$. Somit folgt aus (4.3):

$$
\begin{aligned}
&\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \leq \|x-y\|^2 \leq \varepsilon^2 \\
\Rightarrow &\sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2 \\
\Rightarrow &\sum_{\alpha\in I}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \geq \|x\|^2 - \varepsilon^2 \\
\Rightarrow &\sum_{\alpha\in I}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \geq \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

Mit der Besselschen Ungleichung folgt daraus, dass $\sum_{\alpha\in I}|\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \|x\|^2$.

($\Leftarrow$) Sei $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\} = \{\alpha \in I \,|\, \langle e_\alpha, x\rangle \neq 0\}$ und $y_m = \sum\limits_{n=1}^{m}\langle e_{\alpha_n}, x\rangle e_{\alpha_n}$. Aus der Parsevalschen Gleichung und (4.3) folgt: $\|x-y_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{m}|\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Somit gilt

$$
x = \lim_{m\to\infty} y_m = \sum_{m=1}^{\infty}\langle e_{\alpha_n}, x\rangle e_{\alpha_n}.
$$

(c) Sei $y := \sum\limits_{\alpha\in I} \langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle e_{\alpha_n}, x\rangle e_{\alpha_n}$. Seien $c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in I} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \\
&\leq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle e_{\alpha_n}, x\rangle|^2 \\
&\overset{(4.3)}{\leq} \|x - \sum_{n=1}^{m} c_n e_{\alpha_n}\|^2
\end{aligned}$$

und folglich

$$\|x-y\| = \inf_{z\in\operatorname{lin}\{e_\alpha\}} \|x-z\| = \inf_{z\in\overline{\operatorname{lin}\{e_\alpha\}}} \|x-z\|.$$

Folglich ist y die beste Approximation zu x und somit die Projektion von x auf $\overline{\operatorname{lin}\{e_\alpha\}}$. □

Satz 4.28. (a) *Jeder separable Prähilbertraum besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.*
(b) *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis*

Bemerkungen. (1) *(a) gilt im Allgemeinen nicht in nichtseparablen Prähilberträumen.*
(2) *Der Beweis von (b) stützt sich auf das Zornsche Lemma: Besitzt in einer halbgeordneten Menge M mit der Halbordnung $\prec$ jede geordnete Teilmenge eine obere Schranke, so existiert mindestens ein maximales Element. Zur Erinnerung: $a \in M$ heißt* obere Schranke *einer geordneten Teilmenge $S \subset M$, falls $b \prec a$ für alle $b \in S$ gilt; $a \in M$ heißt* maximales Element, *falls aus $a \prec b$ die Gleichheit $a = b$ folgt.*

Beweis. (a) Da X separabel ist, gibt es in X eine abzählbare totale Menge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X. O.B.d.A. sei $\{x_n\}$ linear unabhängig. Setze $e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Angenommen, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$ sind bereits definiert. Sei $P_n x$ die orthogonale Projektion von x auf $\operatorname{lin}\{e_1, ..., e_n\}$, $P_n x = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle e_j, x\rangle e_j$ (vgl. Satz 4.27). Wir setzen

$$e_{n+1} := \frac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_{n+1}\rangle &= \|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|^{-1} \left(\langle e_k, x_{n+1}\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x_{n+1}\rangle \langle e_k, e_j\rangle \right) \\
&= \|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|^{-1} \big(\langle e_k, x_{n+1}\rangle - \langle e_k, x_{n+1}\rangle \big) = 0
\end{aligned}$$

für alle $k = 1, \ldots, n$. Folglich ist $\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{kj}$ für alle $k, j \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $\operatorname{lin}\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ und somit ist $\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis.

(b) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Orthonormalsysteme in X. $(\mathcal{M}, \subset)$ ist halbgeordnet. Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ eine beliebige geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$. Setze $M := \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} N$.

Behauptung 1: M ist ein Orthonormalsystem.

Beweis. Seien $e_1, e_2 \in M$ beliebig. $\Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ mit $e_1 \in N_1$ und $e_2 \in N_2$.$\mathcal{N}$ ist geordnet $\Rightarrow N_1 \subset N_2$ oder $N_2 \subset N_1 \Rightarrow e_1, e_2 \in N_1$ oder $e_1, e_2 \in N_2$. $\Rightarrow e_1 \perp e_2$. $\boxed{\text{B1}}$

M ist eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Folglich besitzt jede geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke. Mit dem Lemma von Zorn folgt dann, dass M ein maximales Element $M_{\max} \in \mathcal{M}$ besitzt.

Behauptung 2: $M_{\max}$ ist eine Orthonormalbasis.

Beweis. Angenommen, $M_{\max}$ ist keine Orthonormalbasis. Dann ist

$$\overline{\operatorname{lin}(M_{\max})} \neq X.$$

Widerspruch zur Maximalität. $\boxed{\text{B2}}$

Somit ist der Beweis des Satzes vollständig. $\square$

Bemerkung. *Die im Beweis von (a) benutzte Konstruktion des Orthonormalsystems aus einer totalen abzählbaren Menge ist als Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren bekannt.*

Satz 4.29. *Alle Orthonormalbasen in einem Prähilbertraum haben die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Seien M_1 und M_2 zwei Orthonormalbasen in X. Ist X endlich dimensional, so gilt $|M_1| = |M_2|$. Sei $|M_1| \geq |\mathbb{N}|$. Für jedes $e \in M_1$ sei $K(e) := \{\varepsilon \in M_2 | \langle e, \varepsilon \rangle \neq 0\}$. Nach Lemma 4.26 ist $|K(e)| \leq |\mathbb{N}|$.

Behauptung. $M_2 = \bigcup\limits_{e \in M_1} K(e)$.

Beweis. „$\supset$" klar.
„$\subset$" Angenommen, es gibt ein $\varepsilon \in M_1 \setminus \bigcup\limits_{e \in M_1} K(e)$. Dann ist ε orthogonal zu M_1. Widerspruch zur Totalität. $\boxed{\text{B}}$

Aus der Behauptung folgt, dass $|M_2| \leq \sum\limits_{e \in M_1} |K(e)| \leq |M_1|$. Analog erhält man die Ungleichung $|M_1| \leq |M_2|$. Somit ist $|M_1| = |M_2|$. $\square$

Definition 4.30. *Die* Hilbertraumdimension $\dim X$ *eines Prähilbertraumes (der eine Orthonormalbasis besitzt) X ist die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis in X.*

4.3. Der Darstellungssatz von Riesz

Sei X ein Hilbertraum. Für beliebiges $y \in X$ ist die Abbildung $X \ni x \mapsto \langle y, x \rangle \in \mathbb{K}$ offenbar linear und stetig. Der folgende Satz zeigt, dass jedes lineare stetige Funktional (d.h. lineare stetige Abbildung $l : X \to \mathbb{K}$) in dieser Form geschrieben werden kann.

SATZ 4.31 (Der Darstellungssatz von Riesz). *Sei X ein Hilbertraum. Zu jedem linearen stetigen Funktional $l : X \to \mathbb{K}$ gibt es genau ein $y \in X$ so, dass $l(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in X$ gilt. Ferner $\|y\|_X = \|l\|_{X\to\mathbb{K}}$.*

BEWEIS. (a) Existenz: Sei $N := \operatorname{Kern} l := \{z \in X \mid l(z) = 0\}$. Da l stetig und linear ist, ist N ein abgeschlossener Teilraum von X. Ist $N = X$, so ist $l(x) = \langle y, x\rangle$ mit $y = 0$. Sei nun $N \neq X$. Dann existiert ein $x_0 \in N^\perp$, $x_0 \neq 0$. Setze

$$y := \overline{l(x_0)}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Offenbar gilt:

(1) $x \in N \Rightarrow \langle y, x\rangle = 0 = l(x)$,
(2) $l(\alpha x_0) = \alpha l(x_0) = \alpha\langle\overline{l(x_0)}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}, x_0\rangle = \langle y, \alpha x_0\rangle$.

Wegen der Linearität von l implizieren diese Eigenschaften, dass $l(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x = x_N + \alpha x_0$ mit $x_N \in N$.

BEHAUPTUNG: Jedes Element $x \in X$ besitzt die Darstellung $x = x_N + \alpha x_0$ mit $x_N \in N$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x_0 \in N^\perp$.

BEWEIS. $x = \left(x - \frac{l(x)}{l(x_0)}x_0\right) + \alpha x_0$ mit $\alpha = \frac{l(x)}{l(x_0)}$. Betrachte

$$l\left(x - \frac{l(x)}{l(x_0)}x_0\right) = l(x) - \frac{l(x)}{l(x_0)}l(x_0) = l(x) - l(x) = 0.$$

Folglich ist $x - \frac{l(x)}{l(x_0)} \in N$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\boxed{\text{B}}$

(b) Eindeutigkeit: Angenommen, $l(x) = \langle y, x\rangle$ und $l(x) = \langle y', x\rangle$ gilt für alle $x \in X$. Dann ist $\langle y - y', x\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Also ist $y - y' \perp X$, d.h. $y = y'$.

(c) Normerhaltung: Betrachte

$$\|l\| = \sup_{\|x\|<1} |l(x)| = \sup_{\|x\|<1} |\langle y, x\rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sup_{\|x\|<1} \|y\|\|x\| = \|y\|.$$

Umgekehrt gilt

$$\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |l(x)| \geq \left|l(\frac{y}{\|y\|})\right| = |\langle y, \frac{y}{\|y\|}\rangle| = \|y\|.$$

$\square$

SATZ 4.32. *Seien X, Y Hilberträume, $T : X \to Y$ ein linearer beschränkter Operator. Dann existiert genau ein linearer beschränkter Operator $T^* : Y \to X$ so, dass $\langle T^*y, x\rangle_X = \langle y, Tx\rangle_Y$ für alle $x \in X$, $y \in Y$. Die Abbildung T^* heißt zu T* adjungierter Operator. *Es gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und $(aT_1 + bT_2)^* = \overline{a}T_1^* + \overline{b}T_2^*$ für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

BEWEIS selbst.

In Teil II der Vorlesung definieren wir den adjungierten Operator auch für den Fall, wenn X und Y Banachräume.

BEMERKUNG. *Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Man definiert*

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(T) = N(T) &:= \{x \in X | Tx = 0\},\\ \operatorname{Bild}(T) &:= \{y \in Y \,|\, Tx = y \text{ für ein } x \in X\}\end{aligned}$$

Ist T stetig, so ist Kern(T) *abgeschlossen. Im Allgemeinen braucht* Bild(T) *nicht abgeschlossen zu sein.*

SATZ 4.33. *Seien X, Y Hilberträume, $T : X \to Y$ stetig und linear. Dann gilt:*

$$\operatorname{Kern}(T^*) = \operatorname{Bild}(T)^\perp$$

und folglich (wegen Korollar 4.19)

$$\overline{\operatorname{Bild}(T)} = \operatorname{Kern}(T^*)^\perp.$$

BEWEIS. Sei $y \in \operatorname{Kern}(T^*)$ beliebig. Aus $T^*y = 0$ folgt, dass $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$ für alle $x \in X$. Also ist $y \in \operatorname{Bild}(T)^\perp$. □

DEFINITION 4.34. *Sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $T : X \to X$ heißt* hermitesch *(oder* symmetrisch *oder* selbstadjungiert*), wenn $T^* = T$.*

SATZ 4.35. *Sei X ein Hilbertraum, $s : X \times X \to \mathbb{K}$ eine* beschränkte *Sesquilinearform auf X, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$, so dass*

$$|s(x, y)| \leq \alpha\|x\|\|y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in X. \tag{4.4}$$

Dann gibt es genau einen Operator $S : X \to X$ so, dass $s(x, y) = \langle Sx, y\rangle$ gilt für alle $x, y \in X$. Ist s hermitesch, so ist S selbst-adjungiert.

BEWEIS. Zu jedem $x \in X$ betrachte $l_x(y) := s(x, y)$, $y \in X$. Offenbar ist l_x ein lineares stetiges Funktional. Nach Satz 4.31 gibt es ein eindeutiges Element $z_x \in X$ mit $l_x(y) = \langle z_x, y\rangle$.

Nun definieren wir $Sx := z_x$ für alle $x \in X$. Der Operator S ist linear, denn

$$\begin{aligned}\langle x, S(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle &= s(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\\ &= \lambda_1 s(x, y_1) + \lambda_2 s(x, y_2)\\ &= \lambda_1\langle x, Sy_1\rangle + \lambda_2\langle x, Sy_2\rangle\\ &= \langle x, (\lambda_1 Sy_1 + \lambda_2 Sy_2)\rangle.\end{aligned}$$

Witerhin erhalten wir

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = s(x, Sx) = |s(x, Sx)| \overset{(4.4)}{\leq} \alpha\|Sx\|\|x\|$$

und somit

$$\|Sx\| \leq \alpha\|x\|.$$

Also ist S beschränkt.

Sei nun s hermitesch, d.h. $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$. Dann gilt

$$\langle Sx, y\rangle = \overline{\langle Sy, x\rangle} = \langle x, Sy\rangle,$$

d.h. S ist selbstadjungiert. □

DEFINITION 4.36. *Eine beschränkte Sesquilinearform s auf X heißt* koerziv, *wenn für alle $x \in X$ gilt*

$$|s(x,x)| \geq \beta \|x\|^2, \quad \beta > 0.$$

SATZ 4.37 (Satz von Lax-Milgram). *Sei X ein Hilbertraum, $s : X \times X \to \mathbb{K}$ eine beschränkte koerzive Sesquilinearform auf X. Dann gibt es zu jedem linearen stetigen Funktional $l : X \to \mathbb{K}$ genau ein Element $x \in X$, so dass*

$$s(x,y) = l(y) \quad \text{für alle} \quad y \in X.$$

BEWEIS. Mit Satz 4.35 erhält man aus der Koerzivität die Abschätzung

$$\beta\|x\|^2 \leq |s(x,x)| = |\langle x, Sx\rangle| \leq \|Sx\|\|x\|.$$

Folglich gilt

$$\|Sx\| \geq \beta\|x\|. \tag{4.5}$$

Somit ist S injektiv, denn wegen (4.5) folgt aus $Sx = 0$, dass $x = 0$ ist.

BEHAUPTUNG 1: S hat abgeschlossenes Bild.

BEWEIS: Sei (y_n) eine Folge in $\mathrm{Bild}(S)$ mit Grenzwert $y \in X$. Dann existiert eine Folge (x_n) in X mit $y_n = Sx_n$. Da (y_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Wegen (4.5) folgt daraus

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\beta}\|S(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\beta}\|y_n - y_m\| < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Also ist (x_n) ebenfalls eine Cauchyfolge. Somit ist diese konvergent. Sei x ihrere Grenzwert. Da S stetig ist, gilt dann

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = Sx.$$

Folglich gilt $y \in \mathrm{Bild}(S)$. Nach Satz 1.11 ist $\mathrm{Bild}(S)$ abgeschlossen. $\boxed{\text{B1}}$

BEHAUPTUNG 2: S ist surjektiv, d.h. $\mathrm{Bild}(S) = X$.

BEWEIS: Angenommen, $\mathrm{Bild}(S) \neq X$. Da $\mathrm{Bild}(S)$ abgeschlossen ist, gilt nach Korollar 4.19(b) $\mathrm{Bild}(S)^{\perp} \neq \{0\}$. Wähle ein $y \in \mathrm{Bild}(S)^{\perp}$, $y \neq 0$. Wegen der Koerzivität erhält man dann

$$\beta\|y\|^2 \leq |s(y,y)| = |\langle y, Sy\rangle| = 0.$$

Also ist $y = 0$. Widerspruch! $\boxed{\text{B2}}$

Sei $l : X \to \mathbb{K}$ ein beliebiges lineares stetiges Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es ein eindeutiges Element $z \in X$ mit $l(y) = \langle z, y\rangle$. Da S bijektiv ist, gibt es genau ein $x \in X$ mit $Sx = z$. Dann gilt

$$s(x,y) = \langle Sx, y\rangle = \langle z, y\rangle \quad \text{für alle} \quad y \in X.$$

□

BEMERKUNG. *Aus dem obigen Beweis ergibt sich, dass S bijektiv und stetig ist. Mit dem Satz von der inversen Abbildung (Satz 2.20) folgt daraus, dass S stetig invertierbar ist, d.h. die inverse Abbildung S^{-1} existiert und ist stetig.*

BEMERKUNG. *Ist die Sesquilinearform s hermitesch, so kann der Satz sehr einfach bewiesen werden. In diesem Fall definiert die Sesquilinearform s ein Skalarprodukt auf X. Der Vektorraum X ausgestattet mit diesem Skalarprodukt ist wieder ein Hilbertraum. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz besitzt das Funktional l die eindeutige Darstellung bezüglich des neuen Skalarproduktes. Daraus folgt die Behauptung.*

4.4. Schlussbemerkungen

4.4.1. Der Satz von Lax-Milgram für Banachräume.

SATZ 4.38. *Sei X ein reeller Banachraum, $s : X \times X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte koerzive Sesquilinearform auf X, d.h.*

$$s(x,x) \geq \beta \|x\|^2.$$

Dann gibt es zu jedem $z \in X'$ genau ein Element $x \in X$, so dass

$$s(x,y) = z(y) \quad \text{für alle} \quad y \in X.$$

Analog gibt es zu jedem $z \in X'$ genau ein Element $x \in X$, so dass

$$s(y,x) = z(y) \quad \text{für alle} \quad y \in X.$$