

Grundkurs Mathematik

ANALYSIS 2

I.2 Farbenproduktion

Ein kleines Unternehmen produziert Farben für die Bauindustrie. Alle in der Aufgabe genannten Daten beziehen sich auf einen Produktionszeitraum von einem Monat.

- a) Aus den Daten einer Marktanalyse ist bekannt, dass der erzielbare Preis in Abhängigkeit von der zu verkaufenden Menge x durch die folgende Funktion p beschrieben werden kann:

$$p: x \rightarrow -62 \cdot x + 4092 \quad \text{bzw.} \quad p: x \rightarrow -62 \cdot (x - 66).$$

Der Erlös E ergibt sich aus dem Produkt „Menge mal Preis“ ($E: x \rightarrow x \cdot p(x)$).

Bestimmen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E und zeigen Sie, dass E ein Maximum annimmt, wenn die produzierte Menge 33 Mengeneinheiten beträgt.

- b) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Farben hängen von der zu produzierenden Menge x ab und werden beschrieben durch eine Kostenfunktion K . K lässt sich mit hinreichender Genauigkeit angeben durch:

$$K: x \rightarrow 2x^3 - 147x^2 + 3792x + 3375$$

Zeigen Sie, dass K keine Extremstellen besitzt.

Erläutern Sie die Bedeutung dieser Aussage für den Verlauf des Graphen von K .

Interpretieren Sie dies im Sachkontext.

Der Gewinn G in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x ist die Differenz aus dem Erlös E und den entstandenen Gesamtkosten K . Es gilt also: $G(x) = E(x) - K(x)$. Die möglichen Produktionsmengen, bei denen das Unternehmen keinen Verlust macht, für die der Gewinn also nicht negativ ist, bilden die so genannte **Gewinnzone**.

- c) Die anliegende Abbildung zeigt die vier Graphen der Funktionen p , E , K und G . Schreiben Sie die zugehörigen Funktionsnamen an die einzelnen Graphen.
- d) Auf Grund verschiedener Produktionsmengen aus der Vergangenheit ist der Unternehmensleitung bekannt, dass mit Gewinn produziert wird, wenn die hergestellten Mengen zwischen 5 und 45 Mengeneinheiten liegen. Ferner ist bekannt, dass der Gewinn bei einer Produktion von 30 Mengeneinheiten maximal ist.

Aus der Abbildung kann man erkennen, dass diese Aussagen grob zutreffen.

Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion G gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -2x^3 + 85x^2 + 300x - 3375.$$

Zeigen Sie durch Rechnungen, dass die beiden Aussagen für die Funktion G genau zutreffen, und berechnen Sie den maximalen Gewinn.

- e) Den Wert $K(0)$ bezeichnet man als **Fixkosten**. Auf Grund eines neuen Pachtvertrages für das Firmengrundstück steigen die Fixkosten des Unternehmens von 3375 Geldeinheiten auf 4000 Geldeinheiten. In der Firmenleitung entsteht eine Diskussion über die Auswirkungen dieser Veränderung.

Ein Firmenmitglied behauptet, dass man nach wie vor 30 Mengeneinheiten produzieren sollte, um den Gewinn zu maximieren. Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Grundkurs Mathematik

Anlage zur Aufgabe „Farbenproduktion“:

