Inhalt

Operationen

Eine zweistellige Funktion

$$f : M \times M \to M$$

heißt auch (zweistellige) Operation auf der Menge M.

Beispiele:

- die Rechenoperationen auf den Zahlmengen
- Durchschnitt, Vereinigung, Mengendifferenz auf $\mathcal{P}(M)$
- die logischen Operationen AND, OR auf den Boole'schen Werten

2-stellige Operationen

Zweistellige Operationen werden häufig mit einem Operationssymbol statt eines Funktionsnamens beschrieben. Das Operationssymbol schreibt man dann zwischen die beiden Operanden (Infix-Notation).

Präfix-Notation	Infix-Notation
$add(x, y)$	$x + y$
$mult(x, y)$	$x \cdot y$
$sub(x, y)$	$x - y$
$div(x, y)$	x/y
$pow(x, y)$	$x \uparrow y$

Präfix-Notation	Infix-Notation
$union(M, N)$	$M \cup N$
$intersect(M, N)$	$M \cap N$
$OR(a, b)$	$a \vee b$
$AND(a, b)$	$a \wedge b$
$comp(f, g)$	$f \circ g$

1-stellige Operationen

Wir kennen auch einstellige Operationen auf einer Menge M

$$f : M \to M$$

Funktions-Notation	„Operator-“ Notation	
$neg(x)$	$-x$	Negatives
$abs(x)$	$\|x\|$	(Absolut-) Betrag
$sqr(x)$	x^2	sqare
$sqrt(x)$	$\sqrt{x}$	squareroot
$fak(n)$	$n!$	Fakultät
$succ(n)$	$n+1$	successor - Nachfolger
$pred(n)$	$n-1$	predecessor - Vorgänger
$Comp(M)$	$\overline{M}$	Komplementmenge
$NOT(a)$	$\neg a$	Logische Negation

Wechsel der Darstellung

Aus mehreren (möglicherweise verschiedenen) Operatoren zusammengesetzte Ausdrücke entsprechen in der Präfixdarstellung der Hintereinanderausführung von Funktionen.

Beispiele:

- Arithmetischer Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{3}) \equiv \mathit{mult}(\mathit{div}(1,2), \mathit{add}(x, \mathit{sqrt}(3)))$$

- „symmetrische Differenz" zweier Mengen:

$$\begin{aligned} M \div N &:= (M \cup N) \setminus (M \cap N) = (M \cup N) \cap \overline{(M \cap N)} \\ &\equiv \mathit{intersect}(\mathit{union}(M, N), \mathit{Comp}(\mathit{intersect}(M, N))) \end{aligned}$$

- Logischer Audruck „exklusives Oder":

$$\begin{aligned} A \ \mathit{XOR} \ B &:= \mathit{AND}(\mathit{OR}(A, B), \mathit{NOT}(\mathit{AND}(A, B))) \\ &\equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \end{aligned}$$

Ad-Hoc-Aufgabe

Stellen Sie die Differenz von a und b als Summe von a mit dem Negativen von b dar:

- Mit Operatorsymbolen.
- Mit Funktionsnamen.

Eigenschaften von Operationen

Eine (zweistellige) Operation $*$ auf M heißt

- kommutativ, wenn für alle Elemente $a, b \in M$ gilt:

$$a * b = b * a$$

- assoziativ, wenn für alle Elemente $a, b, c \in M$ gilt:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

- Ein Element $n \in M$ heißt
  neutrales Element, wenn für alle $a \in M$ gilt:

$$a * n = n * a = a$$

.

- Wenn die Operation $*$ ein neutrales Element n hat, dann heißt $b \in M$
  inverses Element zu $a \in M$, wenn

$$a * b = b * a = n$$

Beispiel $(\mathbb{N}_0, +)$

Die Addition auf den natürlichen Zahlen ist

- kommutativ,
- assoziativ,
- und hat 0 als neutrales Element.
- Außer der 0 hat kein Element ein inverses Element ($\in \mathbb{N}_0$).

Beispiel $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Die Multiplikation auf den reellen Zahlen $\neq 0$ ist

- kommutativ,
- assoziativ,
- hat 1 als neutrales Element
- und jedes Element $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat ein inverses Element $(\in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Beispiel $(\mathbb{R}^{n\times m}, +)$ (Matrizenaddition)

Unter einer (reellwertigen) $(n \times m)$-Matrix Matrix versteht man ein rechteckiges Schema aus n Zeilen und m Spalten, in das reelle Zahlen eingetragen sind.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ mit } i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots m$$

Zwei Matrizen gleicher Größe kann man komponentenweise addieren. Die Addition ist

- kommutativ,
- assoziativ,
- hat die „Nullmatrix“ als neutrales Element
- und jede Matrix hat ein inverses Element, nämlich die „negative“ Matrix.

Multiplikation von Matrizen

Für zwei Matrizen A und B kann das Produkt C definiert werden durch

$$A \cdot B = C = (c_{ij})$$

mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Voraussetzung:
Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

Beispiel und Merkregel

$$(m \times n) \cdot (n \times r) = (m \times r)$$

B

2	-1	3	7
0	5	2	6
-3	0	1	-2

A

4	2	-1
0	8	5

C = AB

11	x	15	42
-15	40	21	38

$$x = (4, 2, -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 = 6$$

Beispiel $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ (Matrizenmultiplikation)

Eingeschränkt auf quadratische Matrizen fester Größe ($m = n$) ist die Multiplikation eine „wohldefinierte“ Operation. Sie ist

- nicht (!) kommutativ,
- aber assoziativ
- und hat die Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  als neutrales Element.
- Manche Matrizen sind invertierbar, andere nicht.

Ad-Hoc-Aufgabe

Überlegen Sie, ob

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Multiplikation) invertierbar ist.