
Ü B U N G

M A S C H I N E N E L E M E N T E

Achsen und Wellen:
Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743

Stephan Voigt, M.Eng.

Agenda

1. Einleitung
2. Kerbform- und Kerbwirkungszahlen
3. Einflussfaktoren
4. Nachweis des Vermeidens bleibender Verformung
5. Nachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen
6. Zusammenfassung und Vorgehensweise
7. Beispiel

1 Einleitung

1.1 Anwendungsbereich

- Die Norm 743 gilt für den Sicherheitsnachweis von Wellen und Achsen gegen
 - Ermüdungsbruch (Dauerbruch, Schwingungsbruch) bei Überschreitung der Dauerfestigkeit
 - maßgebend: konstante, schädigungsäquivalente Spannungsamplituden
 - Resultat der gegebenen Belastungen
 - Annahme: Amplituden der einzelnen Beanspruchungsarten (Zug/Druck, Biegung, Torsion) treten gleichzeitig auf
 - Phasengleichheit
 - Bleibende Verformung (oder Anriss oder Gewaltbruch)
 - maßgebend: maximal auftretende Spannungen
 - Werkstoffe: Achsen und Wellen aus Stahl (nicht geschweißt)

- Eigenspannungen werden nicht explizit erfasst

- Anwendungsgrenzen
 - Zug/Druck, Biegung und Torsion als Einzelbeanspruchung oder kombiniert im Wechsel- oder Schwellbereich;
kein dominierender Querkraftschub; kein Knicken

 - Temperaturbereich: $-40\text{ °C} \leq \vartheta \leq 150\text{ °C}$

 - Umlauf- und Flachbiegung werden nicht unterschieden

 - Korrosionsfreie Umgebungsmedien (Luft, säurefreies Öl)

- Grenzlastspielzahl der Festigkeitswerte für Sicherheit gegen Dauerbruch: $N_G = 10^7$

1.2 Grundlagen des Nachweises

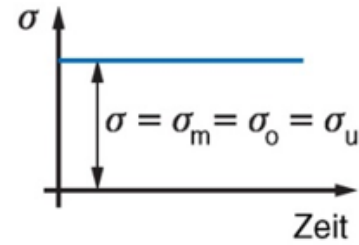
▪ Nennspannungen

- Grundsätzlich sind die wirkenden Spannungen nach den Regeln der Technischen Mechanik zu berechnen.
- Die folgenden Beanspruchungsarten sind zu berücksichtigen:

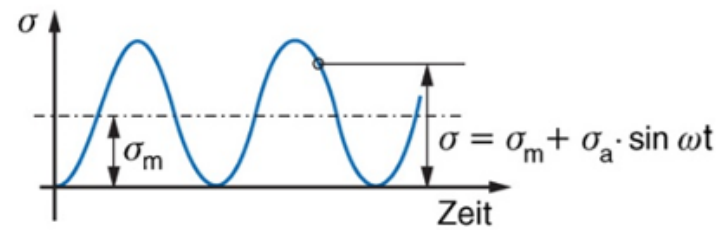
| Beanspruchung | Wirkende Spannung | | | Querschnittsfläche bzw. Widerstandsmoment |
|------------------|------------------------------------|------------------------------------|--|--|
| | Amplitude | Mittelwert | Maximalwert | |
| Zug/Druck | $\sigma_{zda} = \frac{F_{zda}}{A}$ | $\sigma_{zdm} = \frac{F_{zdm}}{A}$ | $\sigma_{zdmax} = \frac{F_{zdmax}}{A}$ | $A = \frac{\pi}{4} \cdot (d^2 - d_i^2)$ |
| Biegung | $\sigma_{ba} = \frac{M_{ba}}{W_b}$ | $\sigma_{bm} = \frac{M_{bm}}{W_b}$ | $\sigma_{bmax} = \frac{M_{bmax}}{W_b}$ | $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(d^4 - d_i^4)}{d}$ |
| Torsion | $\tau_{ta} = \frac{M_{ta}}{W_t}$ | $\tau_{tm} = \frac{M_{tm}}{W_t}$ | $\tau_{tmax} = \frac{M_{tmax}}{W_t}$ | $W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d^4 - d_i^4)}{d}$ |

- **Wiederholung: Belastungsfälle nach von Bach**

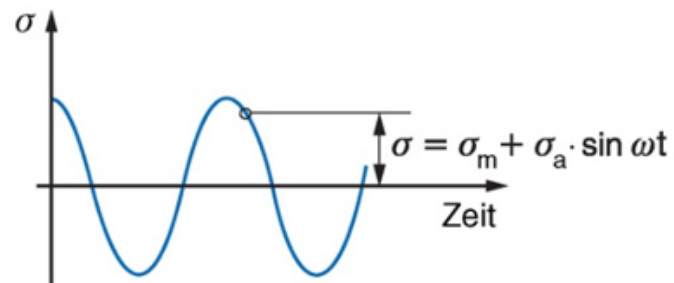
- Fall 1: ruhend



- Fall 2: rein schwellend

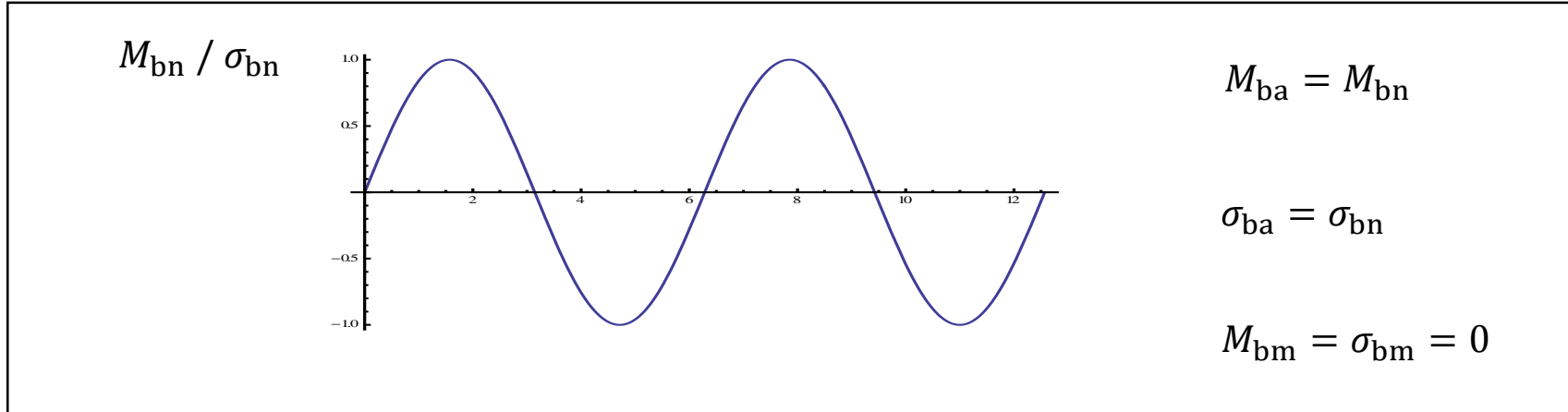


- Fall 3: wechselnd
(allg. wenn $\sigma_u < 0$)

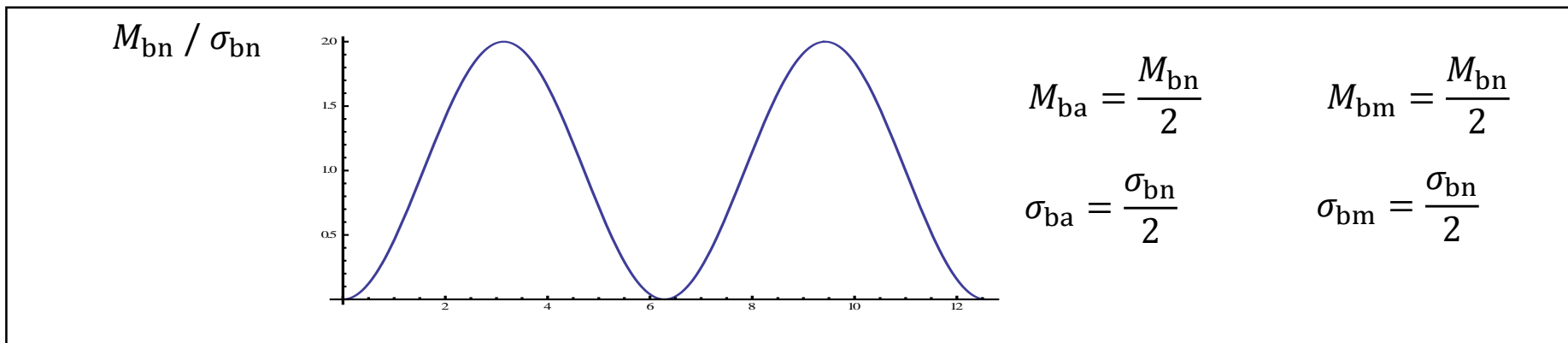


- Bei Achsen und Wellen treten typischerweise folgende Belastungsfälle auf:

- Bei Wellen und umlaufenden Achsen tritt Biegung immer wechselnd auf! → Wechselbiegung



- Bei stillstehenden Achsen tritt Biegung zumeist schwellend auf! → Flachbiegung



- Die Torsionsbelastung von Wellen kann

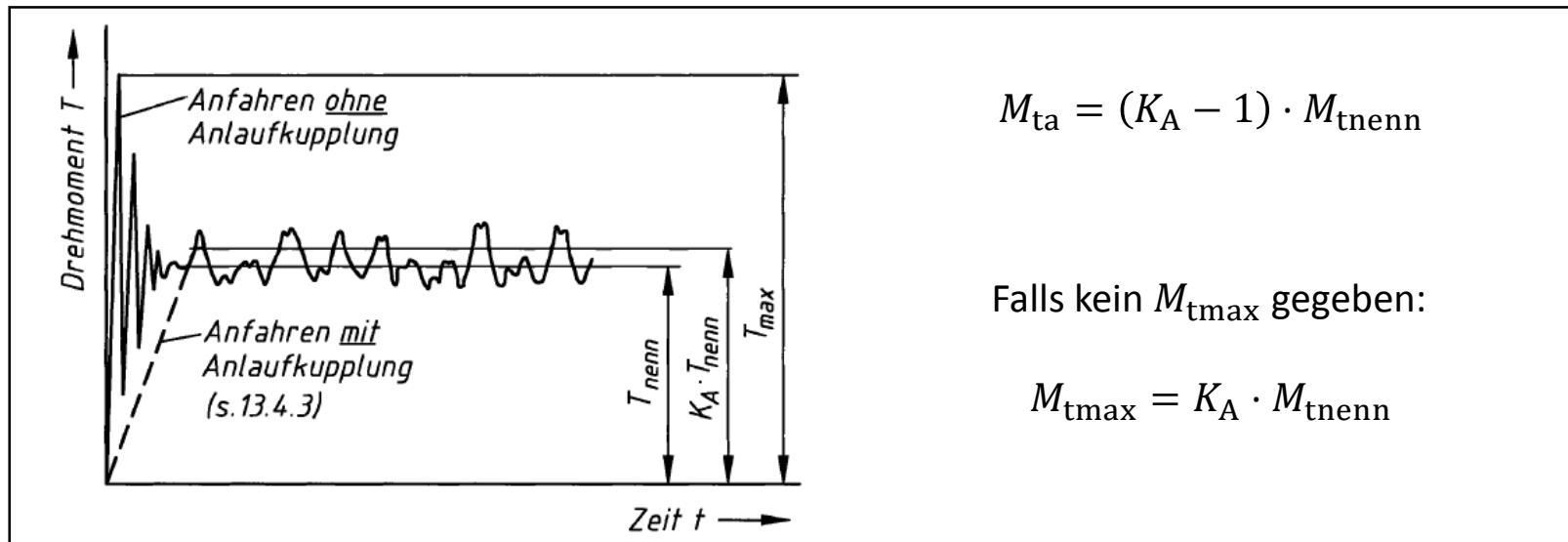
- statisch
- schwellend oder
- wechselnd sein.

Dauerbetrieb in eine Drehrichtung

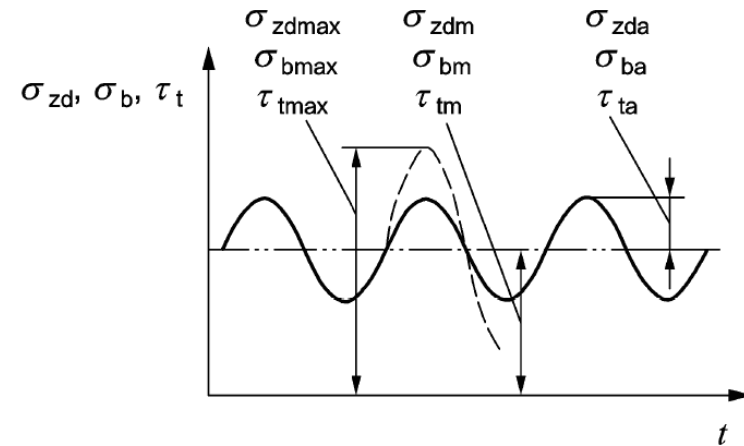
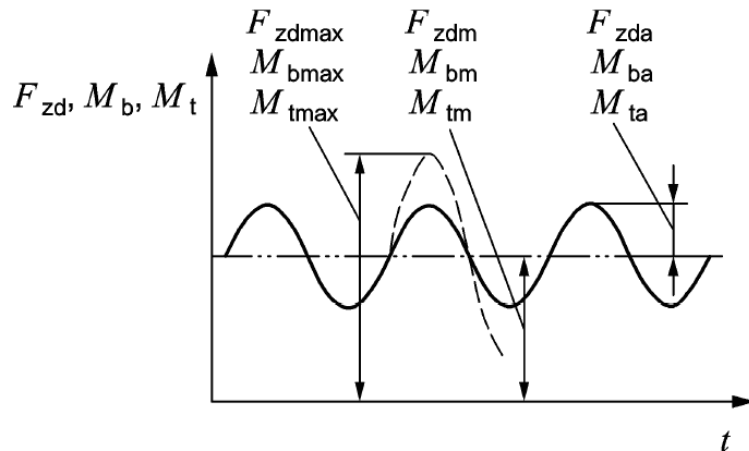
häufige An- und Ausschaltvorgänge

Reversierbetrieb

- Doch auch bei statischer Torsion ist der dynamische Anteil zu berücksichtigen:



- Zusammengefasst sind folgende Belastungs- bzw. Spannungsgrößen zu ermitteln:



- Belastungen und Spannungen weisen immer einen qualitativ identischen zeitlichen Verlauf auf!

→ Nennspannungskonzept

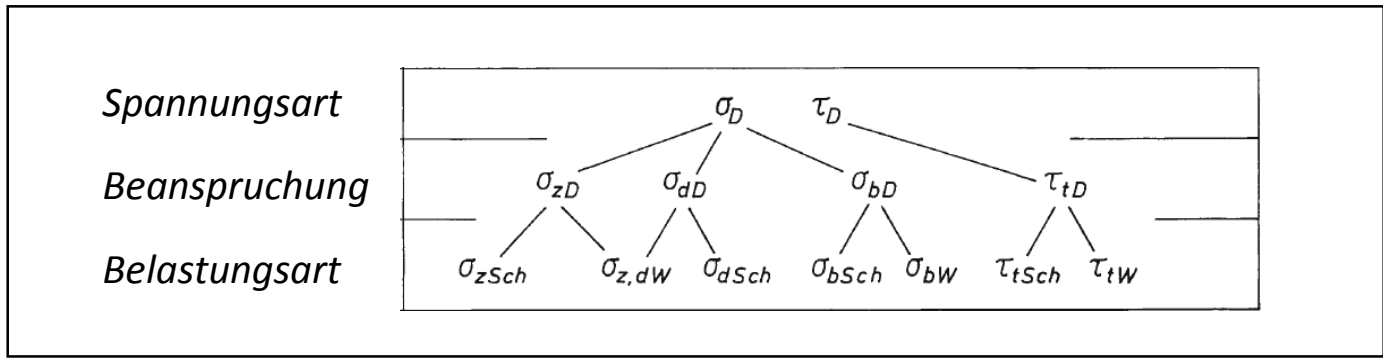
▪ Festigkeiten (Beanspruchbarkeit)

- Wiederholung: Relevante statische Werkstoffkennwerte bei Raumtemperatur

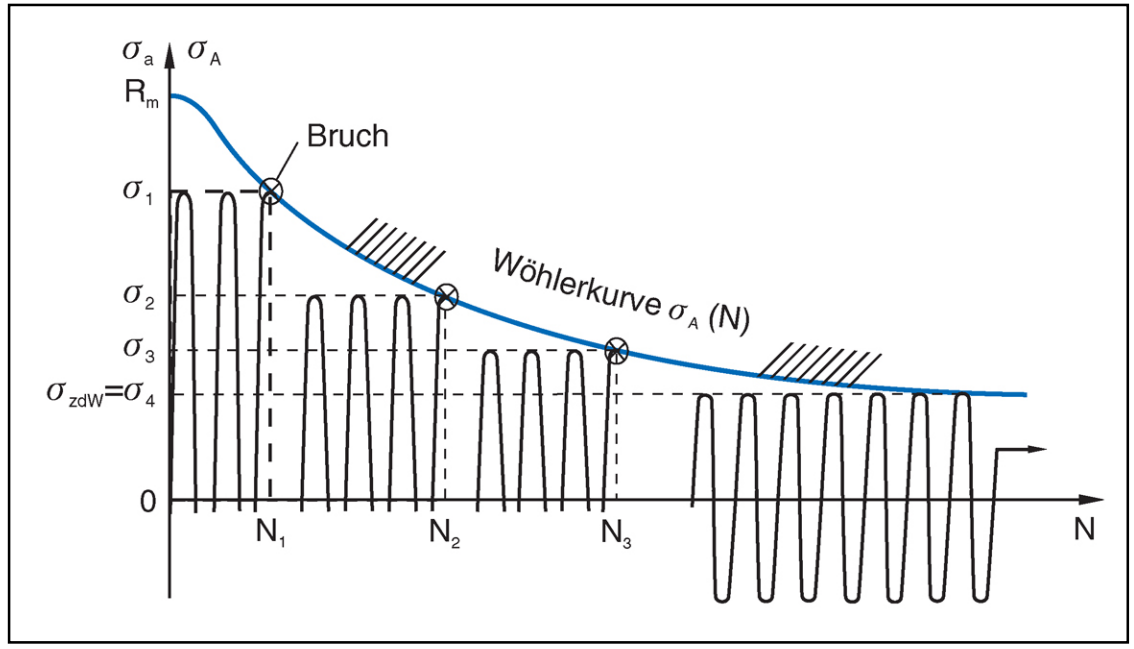
| Beanspruchung | Bezeichnung | Zeichen | Ersatzwert bei Stahlwerkstoffen |
|------------------|---|--------------------------|---|
| Zug/Druck | Streck- bzw. Fließgrenze/Druckfließgrenze | R_e, σ_S | - |
| | 0,2%-Dehn-/Stauchgrenze | $R_{p0,2}, \sigma_{0,2}$ | - |
| | Zug-/Druckfestigkeit | R_m, σ_B | - |
| Biegung | Biegefließgrenze | σ_{bF} | $\approx R_e$ |
| | 0,2%-Biegedehngrenze | $\sigma_{b0,2}$ | $\approx R_{p0,2}$ |
| | Biegefestigkeit | σ_{bB} | $\approx R_m$ |
| Torsion | Torsionsfließgrenze | τ_{tF} | $\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot R_e$ |
| | 0,4%-Torsionsdehngrenze | $\tau_{t0,4}$ | $\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot R_{p0,2}$ |
| | Torsionsfestigkeit | τ_{tB} | $\approx R_m$ |

• **Wiederholung: Dauerfestigkeit**

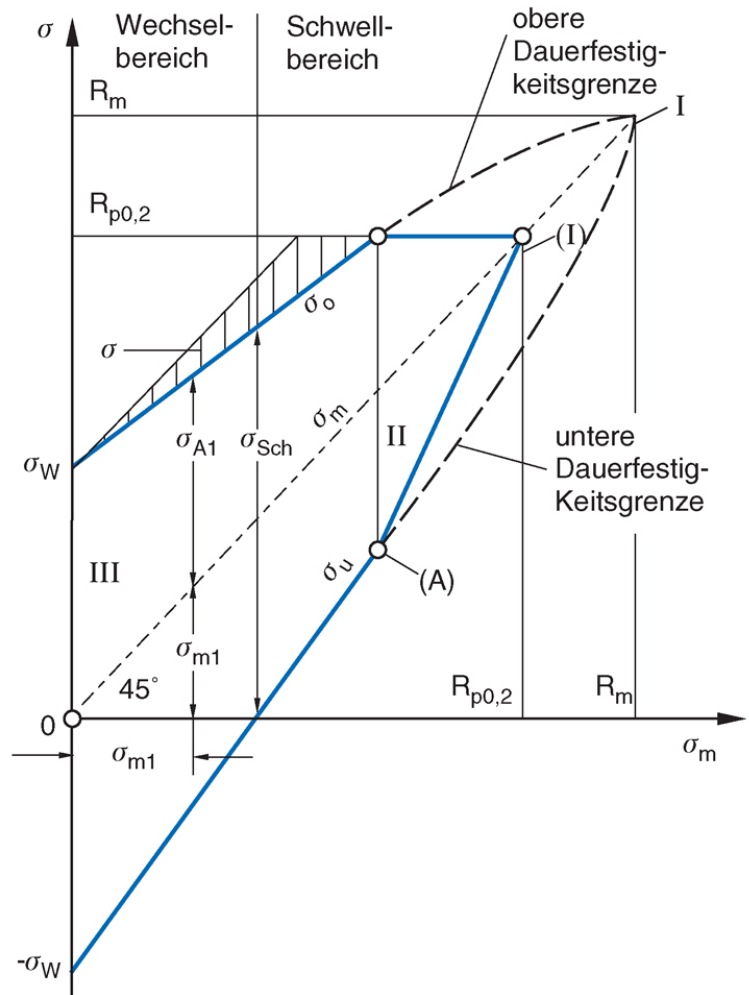
– Arten



– Wöhlerlinie



– Smith-Diagramm



Ausschlagsfestigkeit in Abhängigkeit der Mittelspannung

- **Festigkeitswerte**

- Unlegierte Baustähle nach DIN EN 10025-2

| Kurzname ^{a)} | σ_B ^{a)} N/mm ² | σ_s ^{a),c)} N/mm ² | σ_{zdW} ^{b)} N/mm ² | σ_{bW} ^{b), d)} N/mm ² | τ_{tW} ^{b), d)} N/mm ² |
|------------------------|---|--|---|--|--|
| S235JR | 360 | 235 | 140 | 180 | 105 |
| S275JR | 410 | 275 | 170 | 215 | 125 |
| E295 | 470 | 295 | 195 | 245 | 145 |
| S355JO | 470 | 355 | 205 | 255 | 150 |
| E335 | 570 | 335 | 235 | 290 | 180 |
| E360 | 670 | 360 | 275 | 345 | 205 |

a) Nach DIN EN 10025, $d_B \leq 100$ mm
b) Richtwerte berechnet nach Gleichung (1) bis (3)
c) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B < 16$ mm
d) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 7,5$ mm

- Schweißgeeignete Feinkornbaustähle nach DIN EN 10025-3

| Kurzname ^{a)} | σ_B ^{a)} N/mm ² | σ_s ^{a), c)} N/mm ² | σ_{zdW} ^{b)} N/mm ² | σ_{bW} ^{b), d)} N/mm ² | τ_{tW} ^{b), d)} N/mm ² |
|------------------------|---|---|---|--|--|
| S275N | 370 | 275 | 150 | 185 | 110 |
| S355N | 470 | 355 | 190 | 235 | 140 |
| S420N | 520 | 420 | 210 | 260 | 155 |
| S460N | 550 | 460 | 220 | 275 | 165 |

a) Nach DIN EN 10025, $d_B \leq 100$ mm
b) Richtwerte berechnet nach Gleichung (1) bis (3)
c) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B < 16$ mm
d) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 7,5$ mm

- Einsatzstähle (Kernfestigkeit, entspricht blindgehärtetem Zustand) nach DIN EN 10084

| Kurzname ^{a)} | $\sigma_B^a)$ N/mm ² | $\sigma_s^c)$ N/mm ² | $\sigma_{zdW}^b)$ N/mm ² | $\sigma_{bW}^{b), d)}$ N/mm ² | $\tau_{tW}^{b), d)}$ N/mm ² |
|------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--|---|---|
| C10E | 500 | 310 | 200 | 250 | 150 |
| 17Cr3 | 800 | 545 | 320 | 400 | 240 |
| 16MnCr5 | 1000 | 695 | 400 | 500 | 300 |
| 20MnCr5 | 1200 | 850 | 480 | 600 | 360 |
| 18MoCrS4 | 1100 | 775 | 440 | 550 | 330 |
| 18CrNiMo7-6 | 1200 | 850 | 480 | 600 | 360 |

Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B < 16$ mm

a) Nach DIN EN 10084
b) Richtwerte berechnet nach Gleichung 61 bis 63
c) Erfahrungswerte
d) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 7,5$ mm

- Nitrierstähle nach DIN 17211

| Kurzname ^{a)} | $\sigma_B^a)$ N/mm ² | $\sigma_s^a)$ N/mm ² | $\sigma_{zdW}^b)$ N/mm ² | $\sigma_{bW}^{b), c)}$ N/mm ² | $\tau_{tW}^{b), c)}$ N/mm ² |
|------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--|---|---|
| 31CrMo12 | 1 000 | 800 | 400 | 500 | 300 |
| 31CrMoV9 | 1 000 | 800 | 400 | 500 | 300 |
| 15CrMoV59 | 900 | 750 | 360 | 450 | 270 |
| 34CrAlMo5 | 800 | 600 | 320 | 400 | 240 |
| 34CrAlNi7 | 850 | 650 | 340 | 425 | 255 |

Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 100$ mm

a) Nach DIN 17211
b) Richtwerte berechnet nach Gleichung (1) bis (3)
c) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 7,5$ mm

– Vergütungsstähle im vergüteten Zustand nach DIN EN 10083-2/3

| Kurzname ^{a)} | σ_B ^{a)} N/mm ² | σ_S ^{a)} N/mm ² | σ_{zdW} ^{b)} N/mm ² | σ_{bW} ^{b), d)} N/mm ² | τ_{tW} ^{b), d)} N/mm ² |
|------------------------|---|---|---|--|--|
| 1 C 22 | 500 | 340 | 200 | 250 | 150 |
| 2 C 22 | 500 | 340 | 200 | 250 | 150 |
| 1 C 25 | 550 | 370 | 220 | 275 | 165 |
| 1 C 30 | 600 | 400 | 240 | 300 | 180 |
| 1 C 35 | 630 | 430 | 250 | 315 | 190 |
| 1 C 40 | 650 | 460 | 260 | 325 | 200 |
| 1 C 45 | 700 | 490 | 280 | 350 | 210 |
| 2 C 45 | 700 | 490 | 280 | 350 | 210 |
| 1 C 50 | 750 | 520 | 300 | 375 | 220 |
| (1 C 60) | 850 | 580 | 340 | 425 | 250 |
| 46Cr2 | 900 | 650 | 360 | 450 | 270 |
| 41Cr4 | 1 000 | 800 | 400 | 500 | 300 |
| 34CrMo4 | 1 000 | 800 | 400 | 500 | 300 |
| 42CrMo4 | 1 100 | 900 | 440 | 550 | 330 |
| 50CrMo4 | 1 100 | 900 | 440 | 550 | 330 |
| 36CrNiMo4 | 1 100 | 900 | 440 | 550 | 330 |
| 30CrNiMo8 | 1 250 | 1 050 | 500 | 625 | 375 |
| 34CrNiMo6 | 1 200 | 1 000 | 480 | 600 | 360 |

Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 16$ mm

a) Nach DIN EN 10083

b) Richtwerte berechnet nach Gleichung (1) bis (3)

d) gilt für Werkstoff-Bezugsdurchmesser $d_B \leq 7,5$ mm

- Liegen keine Versuchsergebnisse vor, so lassen sich Wechselfestigkeiten wie folgt aus der Zugfestigkeit berechnen (σ_B gilt für Raumtemperatur, nur für $d_B \leq 7,5$ mm):

- Biegung:

$$\sigma_{bW} \approx 0,5 \cdot \sigma_B$$

- Zug/Druck:

$$\sigma_{zdW} \approx 0,4 \cdot \sigma_B$$

- Torsion:

$$\tau_{tW} \approx 0,3 \cdot \sigma_B$$

- Liegen Brinellhärten H_{HB} (bei Raumtemperatur) vor, so kann nach DIN EN ISO 18265 die Zugfestigkeit σ_B abgeleitet werden:

- Vergütete Stähle und im Kernbereich einsatzgehärtete Stähle:

$$\sigma_B \approx 3,2 \cdot H_{HB}$$

- Weichgeglühte normalisierte Stähle:

$$\sigma_B \approx 3,4 \cdot H_{HB}$$

- Die angegebenen Werte der Beanspruchbarkeit gelten *ausschließlich* für die definierte Probengeometrie mit dem maßgebendem Werkstoff-Bezugsdurchmesser d_B .
- Weicht die zu untersuchende Geometrie von der eines Probenkörpers ab, so sind spezifische Festigkeiten zu ermitteln:

| | Beanspruchung | Probenkörper | Bauteil | |
|-----------------------------|---------------|----------------|------------------|---------------------------|
| | | | Zeichen | Bezeichnung |
| Statische Festigkeit | Zug/Druck | σ_S | σ_{zdFK} | <u>Bauteilfließgrenze</u> |
| | Biegung | σ_{bF} | σ_{bFK} | |
| | Torsion | τ_{tF} | τ_{tFK} | |
| Dauerfestigkeit | Zug/Druck | σ_{zdD} | σ_{zdADK} | <u>Gestaltfestigkeit</u> |
| | Biegung | σ_{bD} | σ_{bADK} | |
| | Torsion | τ_{tD} | τ_{tADK} | |

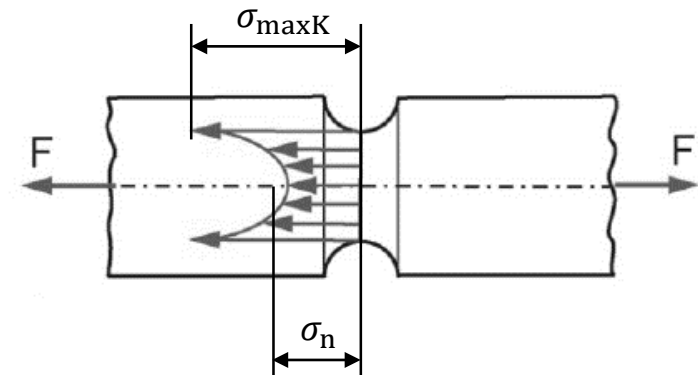


- Bauteilfließgrenzen und Gestaltfestigkeiten werden mittels Kerbform- bzw. Kerbwirkungszahlen und weiteren Einflussfaktoren aus den probenspezifischen Festigkeiten berechnet.

2. Kerbform- und Kerbwirkungszahlen

2.1 Wiederholung: Definitionen

- Die **Kerbformzahl** ist das Verhältnis aus
 - größter örtlicher Spannung zu
 - Nennspannung im Kerbgrund bei statischer Belastung.



$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max K}}{\sigma_n} \qquad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max K}}{\tau_n}$$

- Dabei sind
 - $\sigma_{\max K}$ größte Normalspannung an der Oberfläche im Berechnungsquerschnitt infolge der Kerbwirkung bei linearelastischem Materialverhalten
 - $\tau_{\max K}$ größte örtliche Torsionsspannung
 - σ_n, τ_n Nennspannung: Spannung im kleinsten Querschnitt (Kerbgrund) ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung bei linearelastischem Materialverhalten

- Die **Kerbwirkungszahl** ist das Verhältnis
 - der Wechselfestigkeit einer ungekerbten, polierten Rundprobe mit dem Durchmesser d und
 - der Wechselfestigkeit einer gekerbten Probe mit dem Durchmesser d im Kerbgrund.

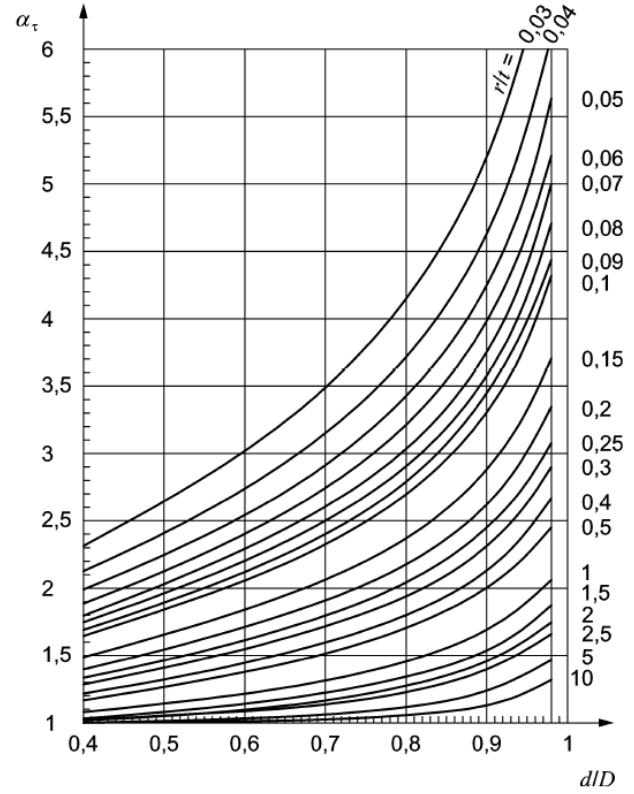
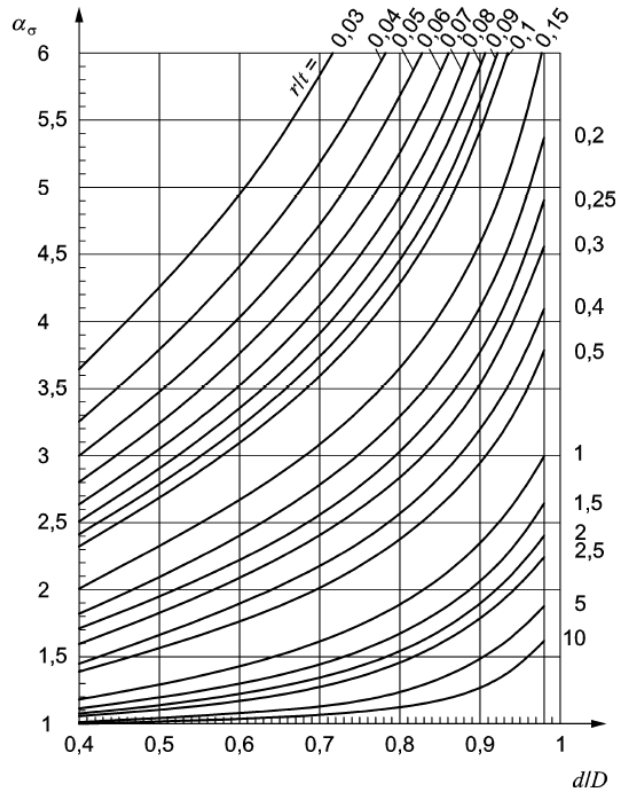
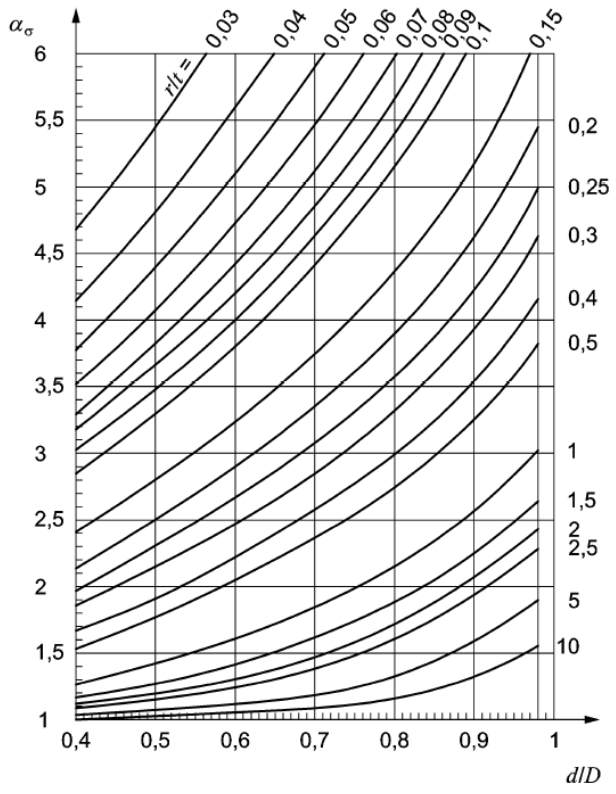
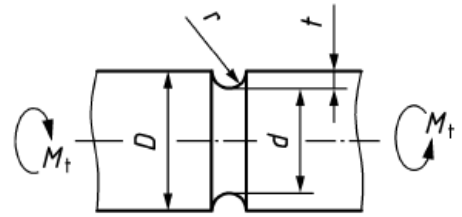
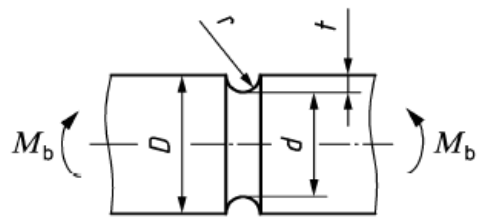
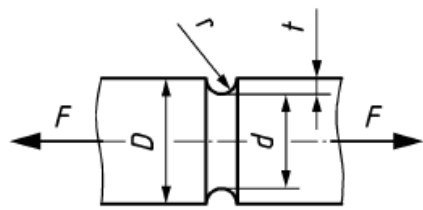
$$\beta_{\sigma z} = \frac{\sigma_{zdW}(d)}{\sigma_{zdWK}} \quad \beta_{\sigma b} = \frac{\sigma_{bW}(d)}{\sigma_{bWK}} \quad \beta_{\tau} = \frac{\tau_{tW}(d)}{\tau_{tWK}}$$

- Dabei muss die Ermittlung der Festigkeiten (Dauerschwingversuche) unter gleichen Bedingungen (Beanspruchungsart, Spannungsamplitude, Mittelspannung etc.) stattgefunden haben.
- Im Gegensatz zur Formzahl ist die Kerbwirkungszahl insbesondere von den Werkstoffeigenschaften abhängig.

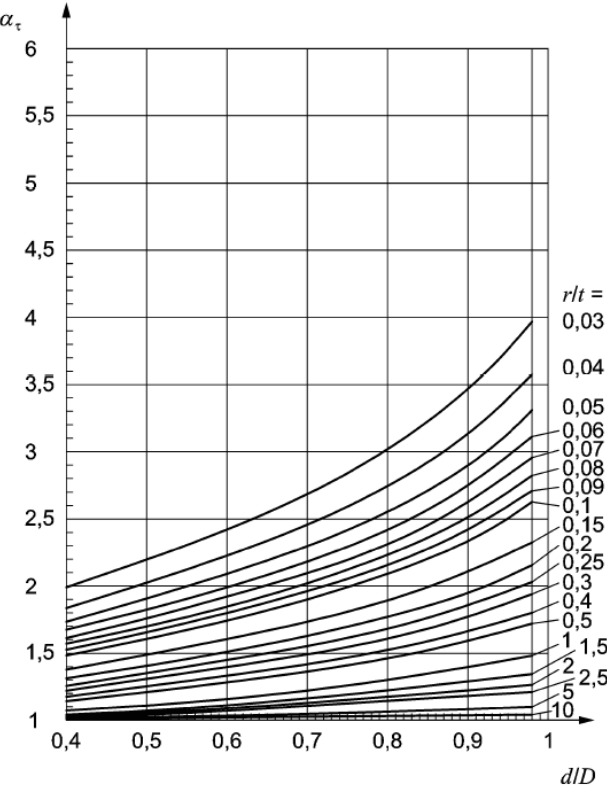
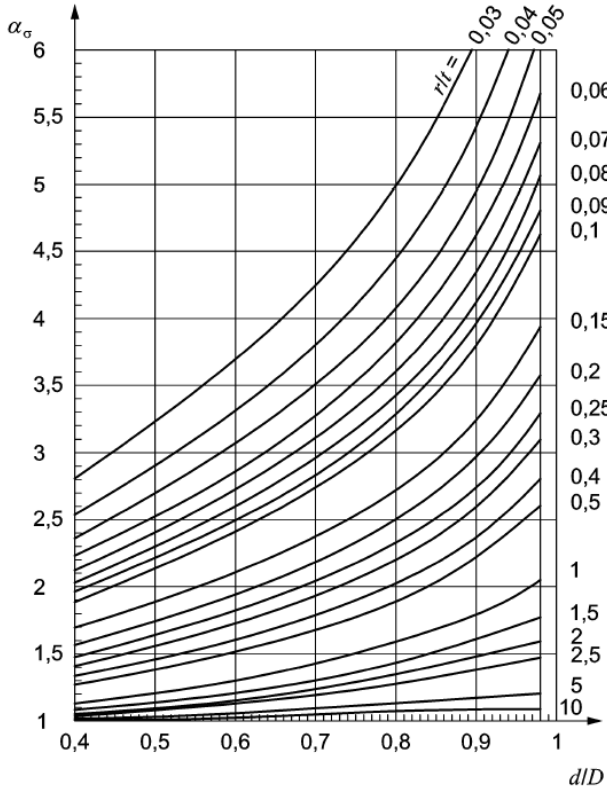
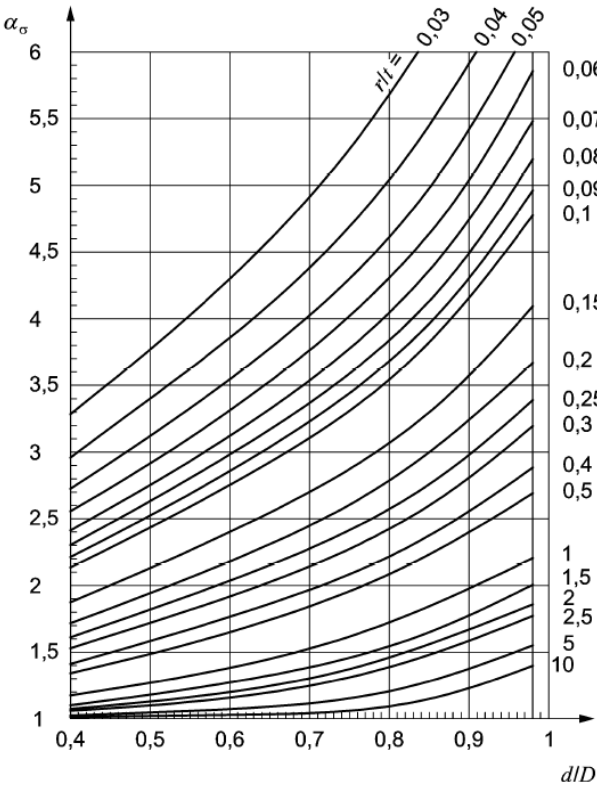
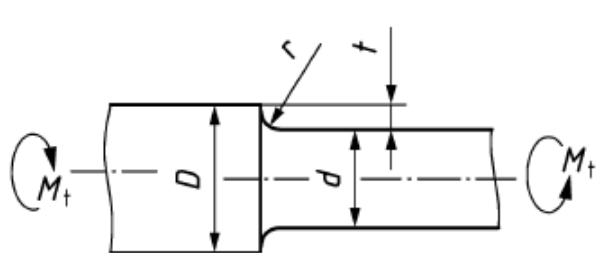
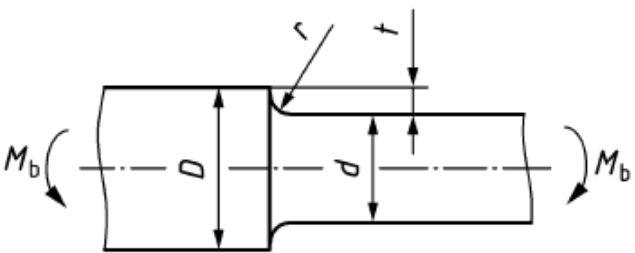
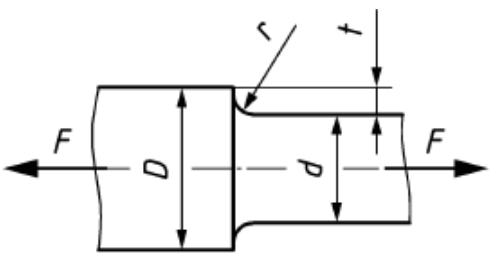
2.2 Formzahlen

- Formzahlen für Rundstäbe mit umlaufender Kerbe (Ringnut)

d ... Kerbgrunddurchmesser



Formzahlen für abgesetzte Rundstäbe



▪ Alternative Berechnung

- Die dargestellten Diagramme basieren auf folgender Vorschrift:

$$\alpha_{\sigma,\tau} = 1 + \frac{1}{\sqrt{A \cdot \frac{r}{t} + 2 \cdot B \cdot \frac{r}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{r}{t}\right)^z \cdot \frac{d}{D}}} \leq 6$$

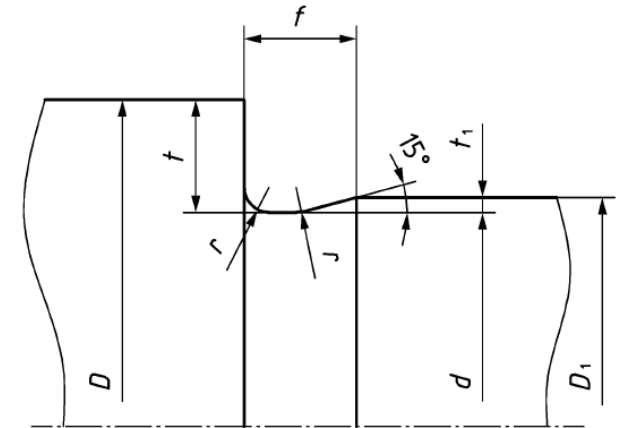
- Gilt für $r/t \geq 0,03$ und $d/D \leq 0,98$

| Kerbform | umlaufende Rundnut | | | Absatz | | |
|----------|--------------------|---------|---------|-----------|---------|---------|
| | Zug/Druck | Biegung | Torsion | Zug/Druck | Biegung | Torsion |
| <i>A</i> | 0,22 | 0,2 | 0,7 | 0,62 | 0,62 | 3,4 |
| <i>B</i> | 1,37 | 2,75 | 10,3 | 3,5 | 5,8 | 19 |
| <i>C</i> | - | - | - | - | 0,2 | 1 |
| <i>z</i> | - | - | - | - | 3 | 2 |

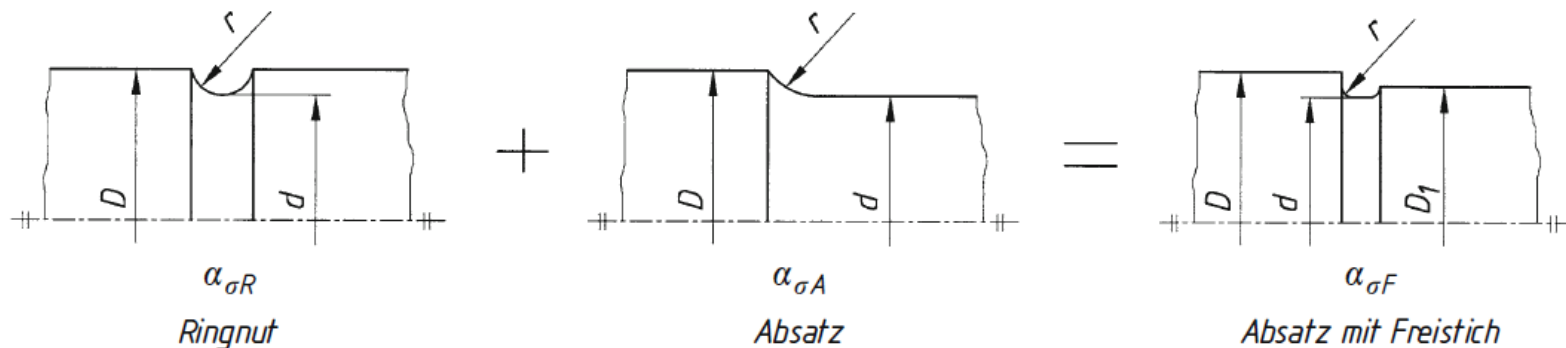
- Zur Berechnung der Nennspannung σ_n bzw. τ_n ist immer der Kerbgrunddurchmesser d zu verwenden!

▪ Formzahlen für abgesetzte Rundstäbe mit Freistich

- Nach DIN 743 kann in ausreichender Näherung ebenfalls obige Formel angewendet werden, wobei die geometrischen Größen entsprechend der nebenstehenden Abbildung einzusetzen sind.



- Alternativ dazu kann die Formzahl eines Freistichs als gewichtete Summe der Formzahlen einer Ringnut und eines Absatzes berechnet werden.



$$\alpha_{\sigma F} = (\alpha_{\sigma R} - \alpha_{\sigma A}) \cdot \sqrt{\frac{D_1 - d}{D - d}} + \alpha_{\sigma A}; \quad \alpha_{\tau F} = 1,04 \cdot \alpha_{\tau A}$$

Formzahlen für Rundstäbe mit Querbohrung

- Es gilt

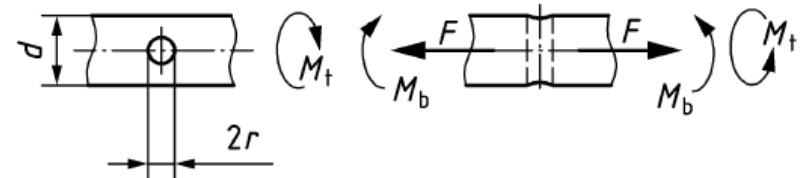
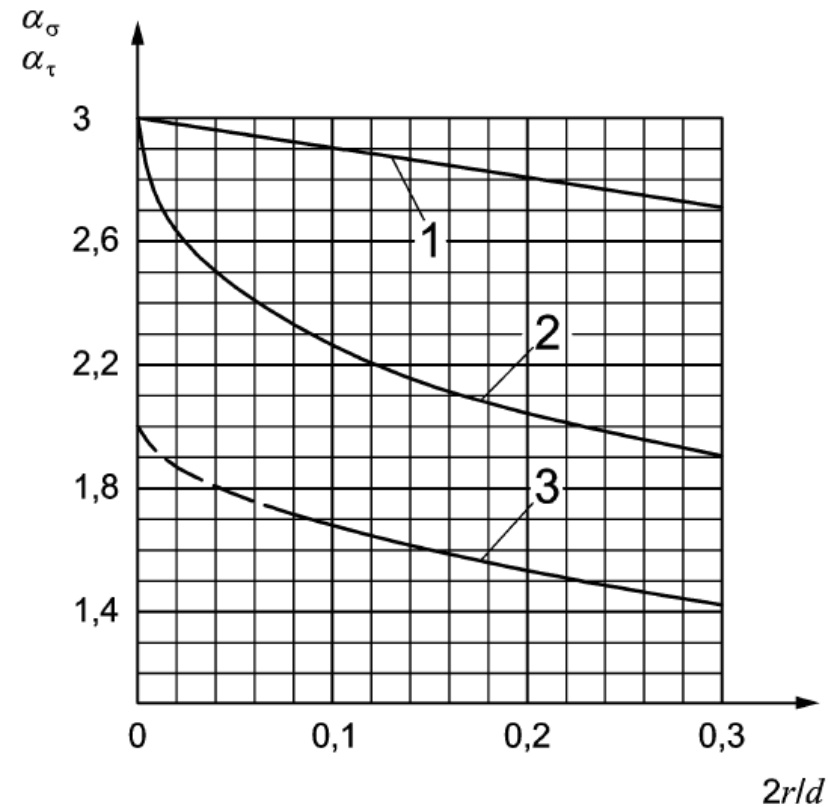
$$\alpha_{\sigma, \tau} = A + B \cdot \left(2 \cdot \frac{r}{d}\right) + C \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{r}{d}}$$

mit folgenden Konstanten:

| | Zug/Druck | Biegung | Torsion |
|-----|-----------|---------|---------|
| A | 3 | 3 | 2,023 |
| B | -1 | 1,4 | 0 |
| C | 0 | -2,8 | -1,125 |

- Zu beachten ist die Berechnung der Nennspannung
(Beispiel Biegung):

$$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3 - \frac{r \cdot d^2}{3}}$$

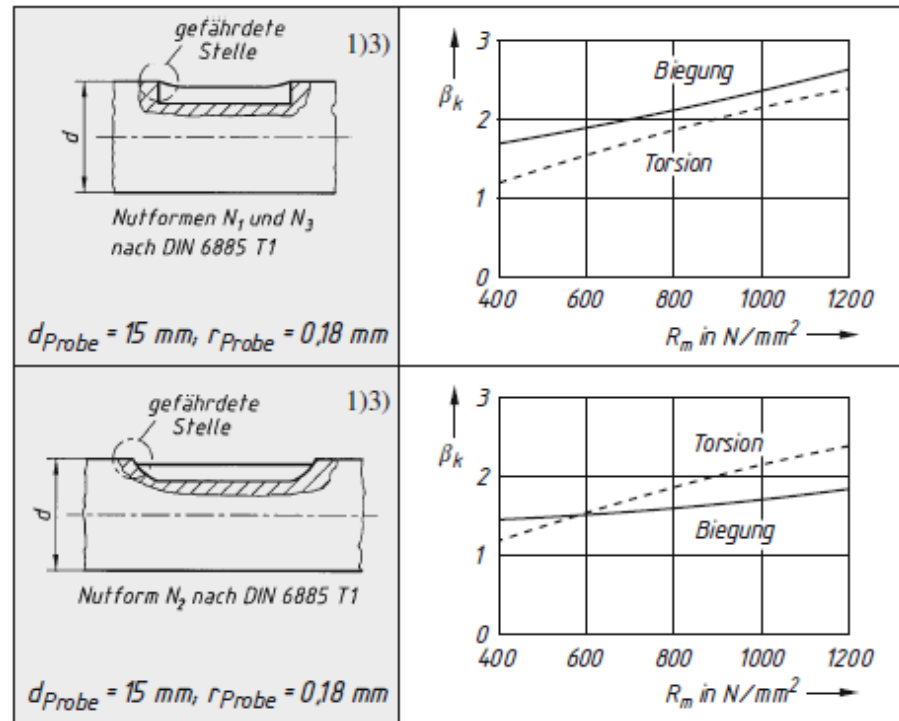


2.3 Kerbwirkungszahlen

▪ Experimentell ermittelte Kerbwirkungszahlen

- Passfedernuten

– Nach Roloff/Matek

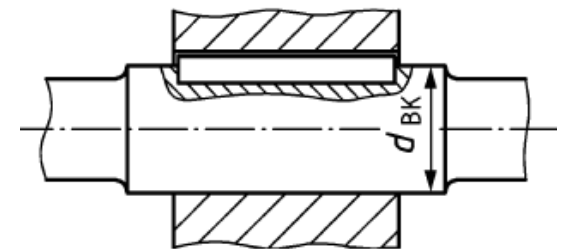


– Bei zwei Passfedern gilt: $\beta_{\sigma_{2\text{Passfedern}}} = 1,15 \cdot \beta_{\sigma}$

Nach DIN 743

$$\beta_{\sigma}(d_{BK}) \approx 3 \cdot \left(\frac{\sigma_B(d)}{1.000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}} \right)^{0,38}$$

$$\beta_{\tau}(d_{BK}) \approx 0,56 \cdot \beta_{\sigma}(d_{BK}) + 0,1$$



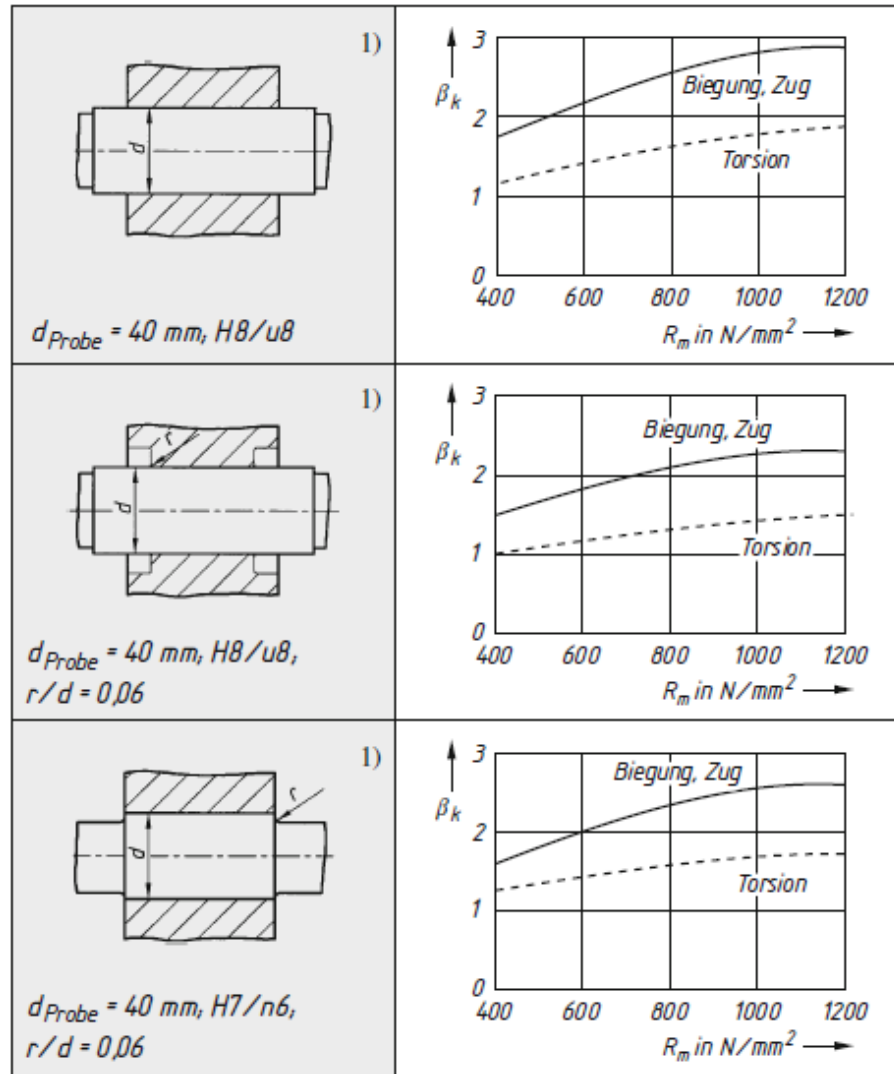
$$d_{BK} = 40 \text{ mm}$$

$$Rz_B = 20 \text{ } \mu\text{m}$$

$$K_{F\sigma,\tau} = 1$$

• Pressverbände

– Nach Roloff/Matek



Nach DIN 743

$$\beta_{\sigma}(d_{BK}) \approx 2,7 \cdot \left(\frac{\sigma_B(d)}{1.000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}} \right)^{0,43}$$

$$\beta_{\tau}(d_{BK}) \approx 0,65 \cdot \beta_{\sigma}(d_{BK})$$

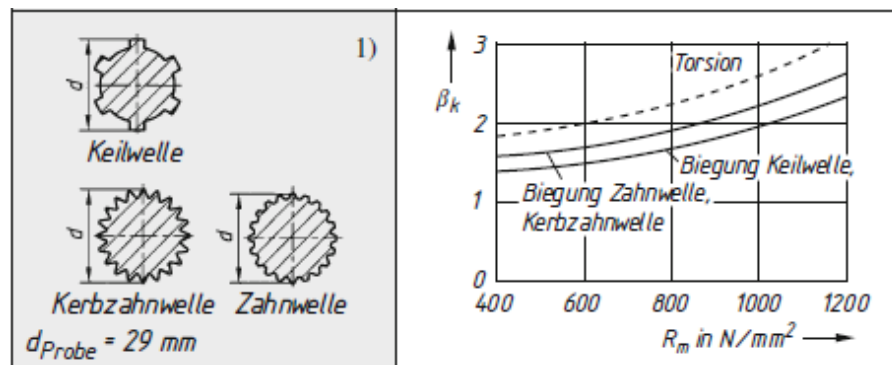
$$d_{BK} = 40 \text{ mm}$$

$$R_{ZB} = 20 \text{ } \mu\text{m}$$

$$K_{F\sigma,\tau} = 1$$

• Keil-, Kerbzahn- und Zahnwellen

– Nach Roloff/Matek



– Nach DIN 743

$$\beta_{\tau}^*(d_{BK}) = \exp \left[4,2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{\sigma_B(d)}{N \cdot \text{mm}^{-2}} \right)^2 \right]$$

$$d_{BK} = 29 \text{ mm}$$

$$K_{F\sigma,\tau} = 1$$

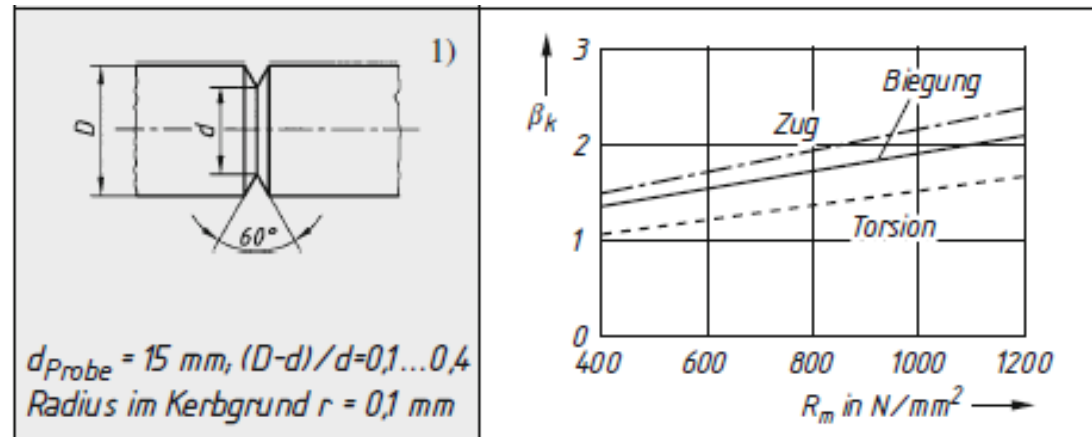
$$\beta_{\sigma,\tau}(d_{BK}) = 1 + A \cdot [\beta_{\tau}^*(d_{BK}) - 1]$$

| | Keilwelle | Kerbzahnwelle | Zahnwelle |
|---------|---|---------------|------------|
| Biegung | $A = 0,45$ | $A = 0,65$ | $A = 0,49$ |
| Torsion | $\beta_{\tau}(d_{BK}) = \beta_{\tau}^*(d_{BK})$ | | $A = 0,75$ |

Zug/Druck: näherungsweise wie Biegung

- Rundstäbe mit umlaufender Spitzkerbe

- Nach Roloff/Matek



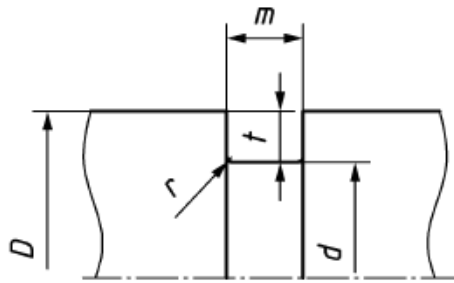
- Nach DIN 743

$$\beta_{\sigma_{zd}}(d_{\text{BK}}) = 0,109 \cdot \frac{\sigma_{\text{B}}(d)}{\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}}$$

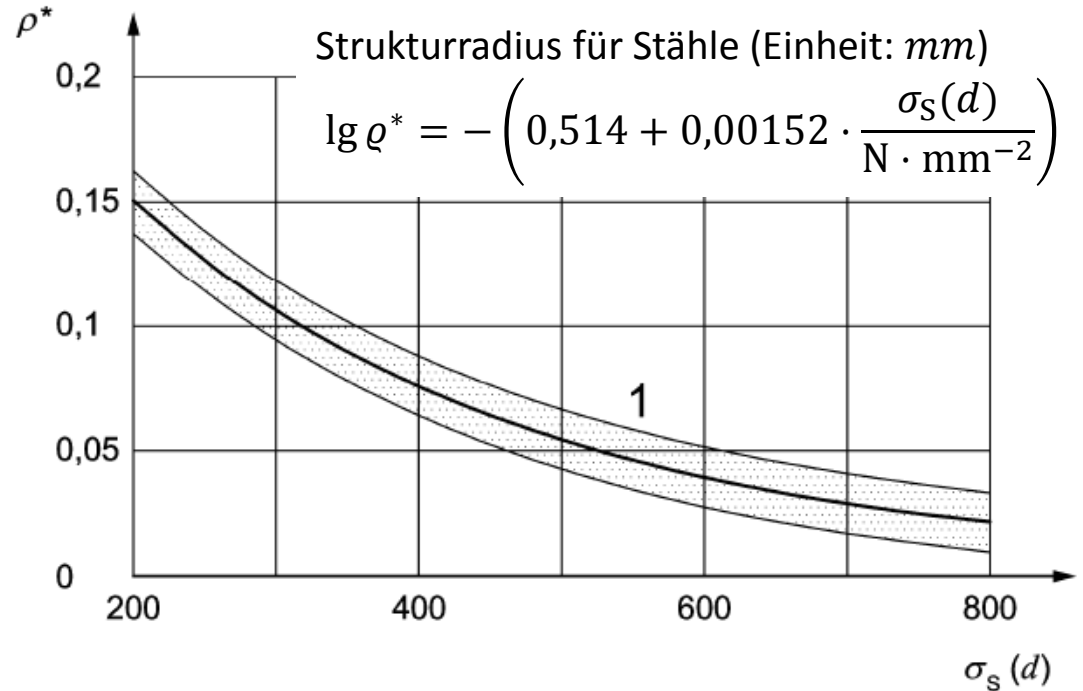
$$\beta_{\sigma_{\text{b}}}(d_{\text{BK}}) = 0,0923 \cdot \frac{\sigma_{\text{B}}(d)}{\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}}$$

$$\beta_{\tau}(d_{\text{BK}}) = 0,8 \cdot \beta_{\sigma_{\text{b}}}(d_{\text{BK}})$$

- Rundstäbe mit umlaufender Rechtecknut ($d_{BK} = 30 \text{ mm}$)



$$\beta_{\sigma,\tau}^*(d_{BK}) = A \cdot \left(B + C \cdot \sqrt{\frac{t}{r + E \cdot \varrho^*}} \right)$$



| | Zug/Druck | Biegung | Torsion |
|---|-----------|---------|---------|
| A | 0,9 | 0,9 | 1 |
| B | 1,27 | 1,14 | 1,48 |
| C | 1,17 | 1,08 | 0,45 |
| E | 2,9 | 2,9 | 1 |

Bei $m/t \geq 1,4$ ist

$$\beta_{\sigma,\tau} = \beta_{\sigma,\tau}^*(d_{BK})$$

Bei $m/t < 1,4$ ist

$$\beta_{\sigma,\tau} = \beta_{\sigma,\tau}^*(d_{BK}) \cdot 1,08 \cdot \left(\frac{m}{t} \right)^{-0,2}$$

- Die angegebenen experimentell ermittelten Kerbwirkungszahlen beziehen sich immer auf einen bestimmten Probendurchmesser d_{BK} oder d_{Probe} .
- Die Kerbwirkungszahl für einen abweichenden Bauteildurchmesser d ist gegeben durch

$$\beta_{\sigma,\tau}(d) = \beta_{\sigma,\tau}(d_{BK}) \cdot \frac{K_3(d_{BK})}{K_3(d)}$$

- Dabei ist $K_3(d)$ bzw. $K_3(d_{BK})$ der geometrische Größeneinflussfaktor.

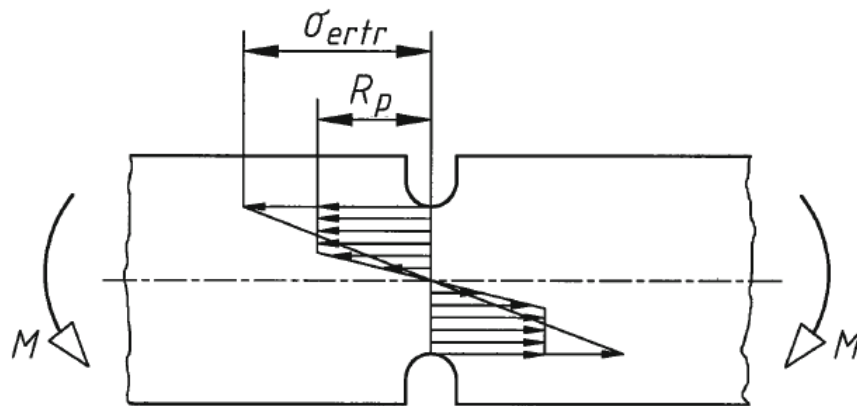
▪ Kerbwirkungszahlen bei bekannter Formzahl

- Bei bekannter Formzahl kann die Kerbwirkungszahl wie folgt berechnet werden (Verfahren von Stieler und Siebel):

$$\beta_{\sigma,\tau} = \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{n}$$

- Dabei ist n die **plastische Stützzahl**:

$$n = \frac{\sigma_{ertr}}{\sigma_S}$$



Ansatz von Neuber

$$n = \frac{1}{\alpha_{\sigma,\tau}} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \varepsilon_{ertr}}{\sigma_S}}$$

- Die Stützzahl beschreibt die Möglichkeit duktiler Werkstoffe, Spannungsspitzen durch weniger beanspruchte Bereiche (die dann plastisch verformen) abzumildern und ist abhängig von:

- Werkstoff
- Beanspruchung
- Geometrie

→ verformungsfähig, $n = 1$ für spröde Werkstoffe

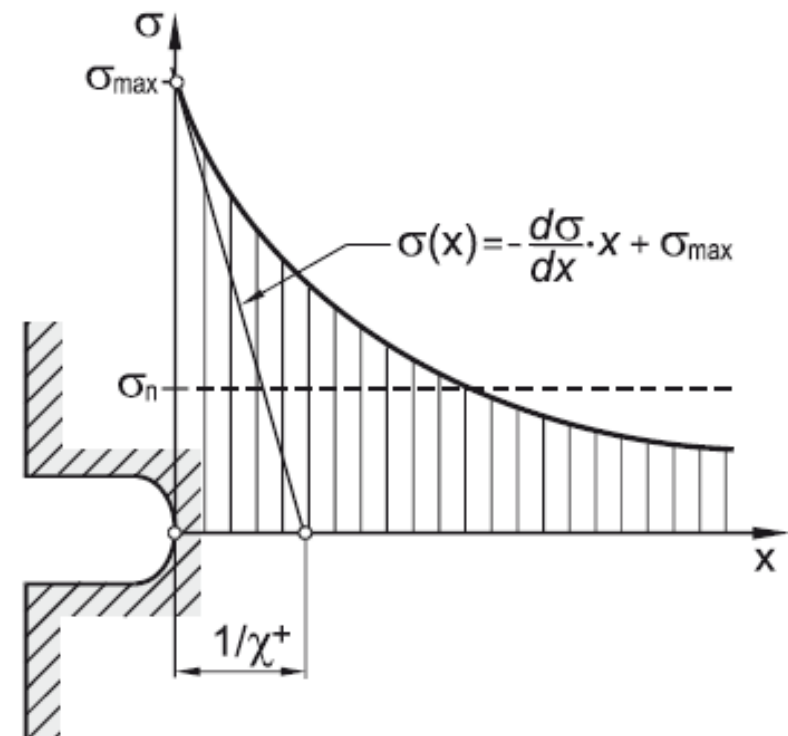
→ Stützwirkung nur bei Biegung und Torsion

→ in Abhängigkeit des Spannungsgefälles G'

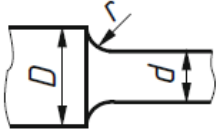
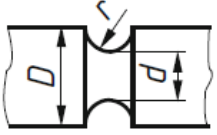
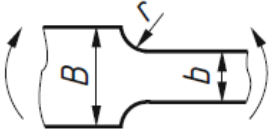
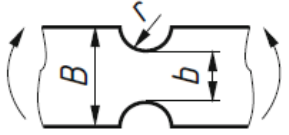

- Spannungsgefälle G'**

- Infolge der Stützwirkung ist nicht die maximale Spannung für ein Versagen verantwortlich, sondern ein mittlerer Spannungswert in unmittelbarer Umgebung des Maximums:

$$G' = \left[\frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{d\sigma}{dx} \right) \right]_{\sigma=\sigma_{\max K}}$$



– Spannungsgefälle G' für einige Bauteilformen

| | | | | | |
|--|---|---|--|---|---|
| Form des Bauteils |  |  |  |  |  <i>ungekerbt</i> |
| Zug/Druck Biegung | $G' = \frac{2,3}{r}(1 + \varphi)$ | $G' = \frac{2}{r}(1 + \varphi)$ | $G' = \frac{2,3}{r}(1 + \varphi)$ | $G' = \frac{2}{r}(1 + \varphi)$ | $G' = \frac{2}{d}$ |
| Torsion | $G' = \frac{1,15}{r}$ | $G' = \frac{1}{r}$ | – | – | $G' = \frac{2}{d}$ |
| Für $(D - d)/d \leq 0,5$ ist $\varphi = 1/(\sqrt{8(D - d)/r} + 2)$ bzw. für $(B - b)/b \leq 0,5$ ist $\varphi = 1/(\sqrt{8(B - b)/r} + 2)$; sonst ist $\varphi = 0$ Rundstäbe mit Längsbohrung können näherungsweise wie volle Rundstäbe berechnet werden. | | | | | |

 – Dabei ist φ die sogenannte Fließbehinderung.

- **Berechnung der Stützzahl**

- Bei vergüteten, normalisierten oder einsatzgehärteten Wellen ist

$$n = 1 + \sqrt{G' \cdot \text{mm}} \cdot 10^{-\left[0,33 + \frac{\sigma_S(d)}{712 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}}\right]}$$

- Bei Wellen mit harter Randschicht (bspw. durch Nitrieren) ist

$$n = 1 + \sqrt{G' \cdot \text{mm}} \cdot 10^{-0,7}$$

▪ Unbekannte Kerbfälle

- Grundsätzlich lassen sich
 - Formzahl und
 - Spannungsgefälle

numerisch oder experimentell (z.B. spannungsoptisch oder mittels DMS) ermitteln.

- Praktisch ist die numerische Bestimmung mittels FEM sicherlich am effizientesten.

3. Einflussfaktoren

3.1 Größeneinflussfaktoren

- **Technologischer Größeneinflussfaktor $K_1(d_{\text{eff}})$**

- Berücksichtigung der erreichbaren

- Härte beim Vergüten bzw.
- Kernhärte beim Einsatzhärten

→ Einfluss auf Streckgrenze bzw. Ermüdungsfestigkeit

in Abhängigkeit des Bauteildurchmessers.

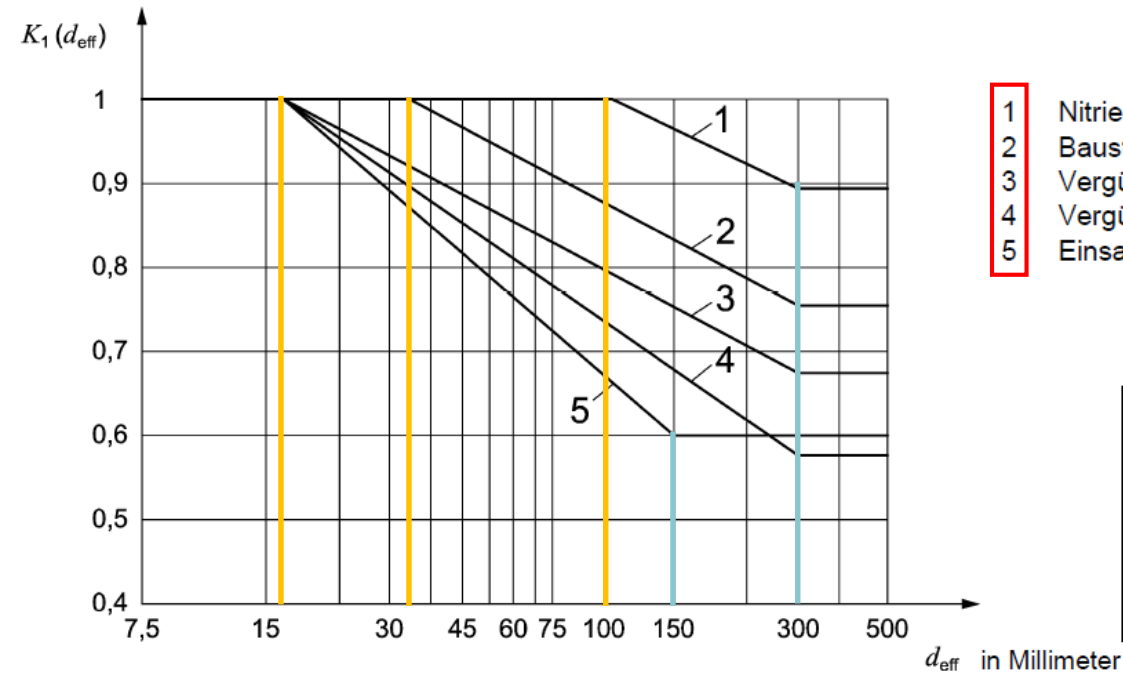
- Unabhängig von der Beanspruchungsart aber abhängig vom für die Wärmebehandlung maßgebenden Durchmesser d_{eff} , wobei zumeist gilt:

$$d_{\text{eff}} = D_{\text{max}} \quad \rightarrow \text{Halbzeugdurchmesser, Rohteilmaß}$$

- Anwendung, wenn tatsächliche Festigkeit des Bauteils nicht bekannt ist, z.B.

$$\sigma_S(d) = K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_S(d_B)$$

- Ist die Bauteilfestigkeit z.B. durch Härtemessung abgeleitet, so ist $K_1(d_{\text{eff}}) = 1$



- 1 Nitrierstähle (σ_S, σ_B) und Baustähle (σ_B)
- 2 Baustähle (σ_S)
- 3 Vergütungsstähle (σ_B) und Cr-Ni-Mo-Einsatzstähle (σ_S, σ_B)
- 4 Vergütungsstähle (σ_S)
- 5 Einsatzstähle (σ_S, σ_B) außer Cr-Ni-Mo-Einsatzstähle

$$K_1(d_{\text{eff}}) = 1 - A \cdot \lg\left(\frac{d_{\text{eff}}}{d_B}\right)$$

Unterscheidung: σ_S oder σ_B

| | d_B [mm] | d_{max} [mm] | $d_{\text{eff}} \leq d_B$ | $d_B < d_{\text{eff}} \leq d_{\text{max}}$ | $d_{\text{max}} < d_{\text{eff}} \leq 500$ mm |
|---|------------|-----------------------|---------------------------|--|---|
| 1 | 100 | 300 | 1 | $A = 0,23$ | 0,89 |
| 2 | 32 | 300 | 1 | $A = 0,26$ | 0,75 |
| 3 | 16 | 300 | 1 | $A = 0,26$ | 0,67 |
| 4 | 16 | 300 | 1 | $A = 0,34$ | 0,57 |
| 5 | 16 | 150 | 1 | $A = 0,41$ | 0,6 |

▪ Geometrischer Größeneinfluss $K_2(d)$

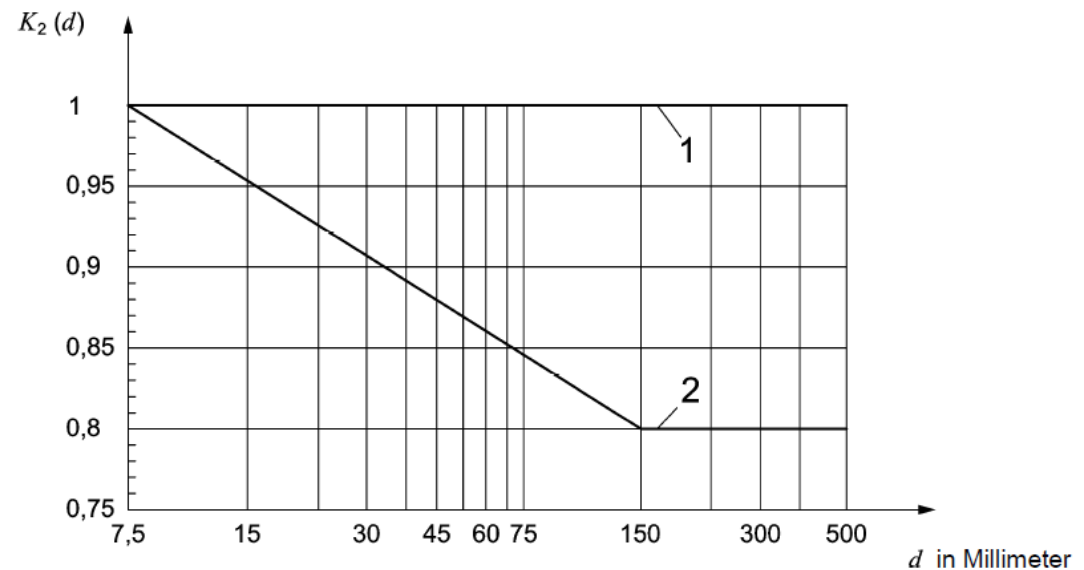
- Im Gegensatz zur Zug/Druckwechselfestigkeit σ_{zdW} sind Biege- σ_{bW} und Torsionswechselfestigkeit τ_{tW} abhängig vom Bauteildurchmesser.

(Warum?)

- Kurve 1: Zug/Druck

$$K_2(d) = 1 \text{ für alle } d$$

- Kurve 2: Biegung und Torsion



$$K_2(d) = \begin{cases} 1 - 0,2 \cdot \frac{\lg(d/7,5 \text{ mm})}{\lg 20} & \text{für } 7,5 \text{ mm} \leq d < 150 \text{ mm} \\ 0,8 & \text{für } d \geq 150 \text{ mm} \end{cases}$$

- Spezialfall: Hohlwelle

- Es ist

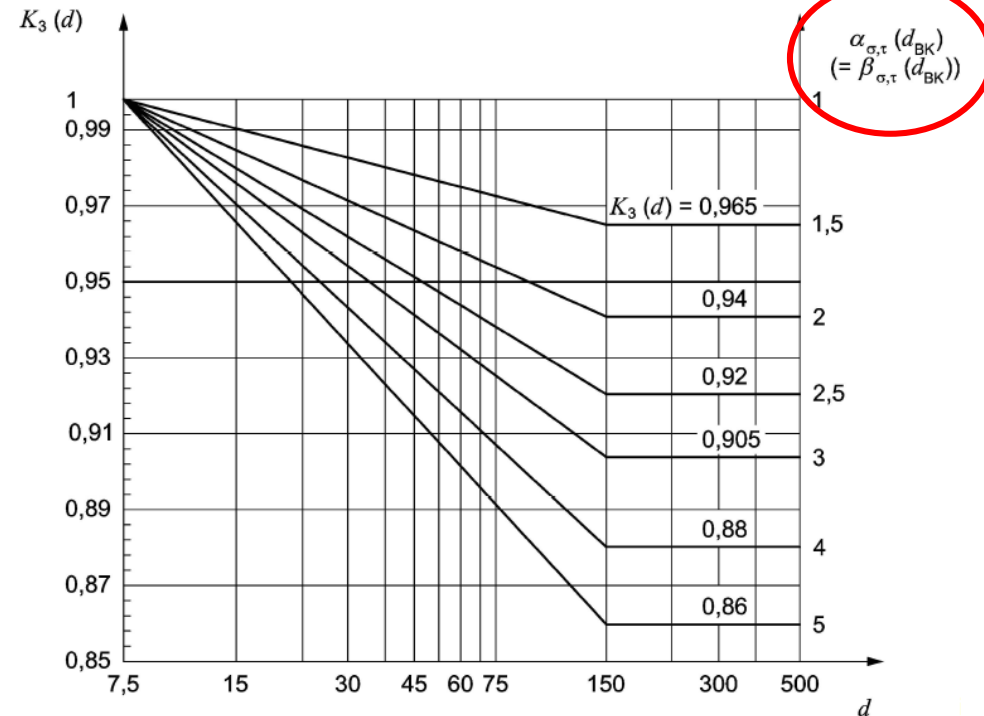
und für $d \geq 150$ mm gilt

$$K_2(d = d_{\text{aussen}})$$

$$K_2(d) = \frac{\sigma_{zdW}}{\sigma_{bW}}$$

▪ Geometrischer Größeneinflussfaktor $K_3(d)$

- Wenn Bauteilabmessungen von Probenabmessungen abweichen, verändert sich die Kerbwirkung auch dann, wenn sämtliche Abmessungen der Kerbe im gleichen Maßstab verändert wurden.
- Der Faktor $K_3(d)$ findet insbesondere bei experimentell ermittelten Kerbwirkungszahlen Anwendung.



$$K_3(d) = \begin{cases} 1 - 0,2 \cdot \lg \alpha_{\sigma,\tau} \cdot \frac{\lg(d/7,5 \text{ mm})}{\lg 20} & \text{für } 7,5 \text{ mm} \leq d < 150 \text{ mm} \\ 1 - 0,2 \cdot \lg \alpha_{\sigma,\tau} & \text{für } d \geq 150 \text{ mm} \end{cases}$$

3.2 Einflussfaktor der Oberflächenrauheit

- Örtliche Spannungen sind stark von der Oberflächenbeschaffenheit bzw. Rautiefe des Bauteils abhängig.
- Bei Biegung gilt:

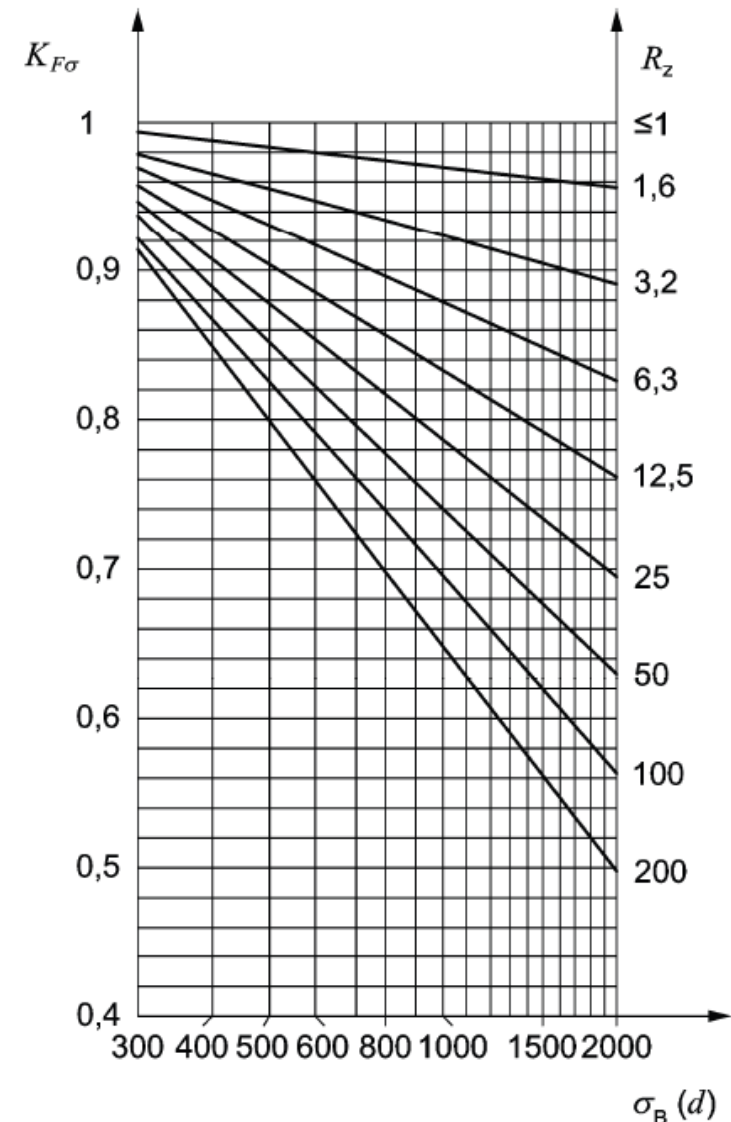
$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot \lg\left(\frac{Rz}{\mu\text{m}}\right) \cdot \left[\lg\left(\frac{\sigma_B(d_{\text{eff}})}{20 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}}\right) - 1 \right]$$

- Dabei ist $\sigma_B(d_{\text{eff}}) = K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_B(d_B)$

- Bei Torsion gilt:

$$K_{F\tau} = 0,575 \cdot K_{F\sigma} + 0,425$$

- Bei einzelnen Spitzenwerten $Rz_{\text{max}} > 2 \cdot Rz$ (Furchen), so ist dieser Wert anstelle der gemittelten Rautiefe zu verwenden.



- Liegt der Einflussfaktor für eine Probe mit der Rautiefe Rz_B vor, so kann der Einflussfaktor für das Bauteil mit der Rautiefe Rz wie folgt ermittelt werden:

$$K_{F\sigma,\tau} = \frac{K_{F\sigma,\tau}(Rz)}{K_{F\sigma,\tau}(Rz_B)}$$

- Bei Walzhaut ist für die mittlere Rautiefe

$$Rz = 200 \mu\text{m}$$

einzusetzen.

- Erreichbare Rautiefen in Abhängigkeit des Fertigungsverfahrens:
siehe bspw. Skript „Zylindrische Pressverbände“
- Bei Passfeder- und Reibschlussverbindungen ist $Rz_B = 20 \mu\text{m}$.

3.3 Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung

- Der Faktor K_V berücksichtigt den Einfluss eines veränderten Oberflächenzustandes durch entsprechende Verfahren auf die Dauerfestigkeit. Dabei ist zu unterscheiden:
 - Erhöhung der Dauerfestigkeit des Grundwerkstoffs, wenn die Kerbwirkungszahl an oberflächenverfestigten Proben ermittelt wurde (experimentell oder aus $\alpha_{\sigma,\tau}$ und n)
→ K_V ist das Verhältnis der Dauerfestigkeit der *ungekerbten oberflächenverfestigten* Probe zur Dauerfestigkeit der *ungekerbten nicht oberflächenverfestigten* Probe

$$K_V = \frac{\sigma_{D_verfestigt}}{\sigma_D} \quad \text{Zeile u in der folgenden Tabelle}$$

- Erhöhung der Dauerfestigkeit des Grundwerkstoffs als auch den Einfluss der Oberflächenverfestigung auf die Kerbwirkung, wenn die Kerbwirkungszahl an nicht oberflächenverfestigten Proben ermittelt wurde
→ K_V ist das Verhältnis der Dauerfestigkeit der *gekerbten oberflächenverfestigten* Probe zur Dauerfestigkeit der *gekerbten nicht oberflächenverfestigten* Probe

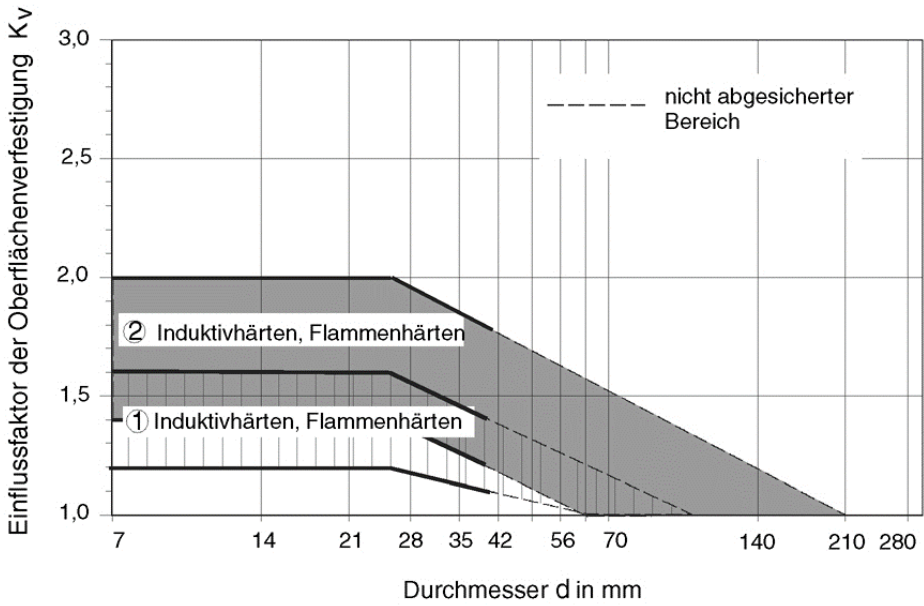
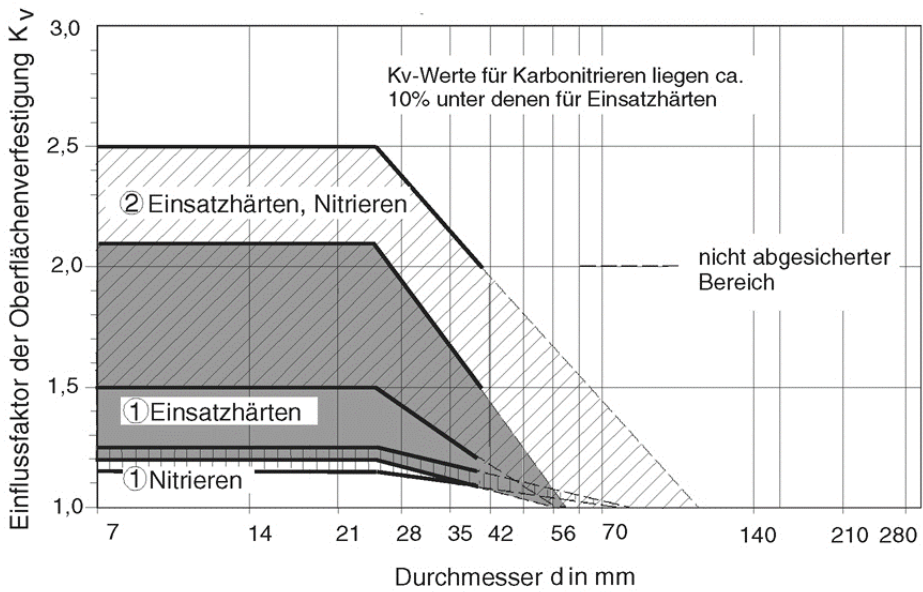
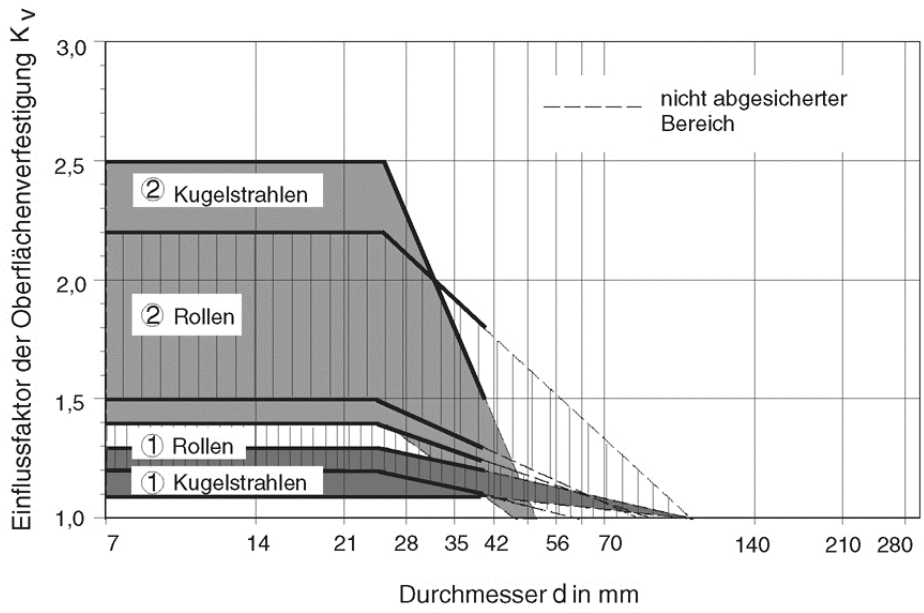
$$K_V = \frac{\sigma_{DK_verfestigt}}{\sigma_{DK}} \quad \text{Zeile g in der folgenden Tabelle}$$

| Verfahren | Probe | | $K_V^{1)}$ | Verfahren | Probe | | $K_V^{1)}$ | |
|--|-------|-----------|-------------|--|-------|--------------------|------------|-----------|
| | Art | d in mm | | | Art | d in mm | | |
| Chemisch-thermische Verfahren | | | | Mechanische Verfahren | | | | |
| Nitrieren Nitrierhärtetiefe: 0,1 bis 0,4 mm | u | 8 ... 25 | 1,15 (1,25) | Festwalzen | u | 7 ... 25 | 1,2 (1,4) | |
| | | 25 ... 40 | 1,10 (1,15) | | | 25 ... 40 | 1,1 (1,25) | |
| Oberflächenhärte: 700 bis 1000 HV10 | g | 8 ... 25 | 1,5 (2,5) | | g | 7 ... 25 | 7 ... 25 | 1,5 (2,2) |
| | | 25 ... 40 | 1,2 (2,0) | | | | 25 ... 40 | 1,3 (1,8) |
| Einsatzhärten Einsatzhärtetiefe: 0,2 bis 0,8 mm | u | 8 ... 25 | 1,2 (2,1) | Kugelstrahlen | u | 7 ... 25 | 1,1 (1,3) | |
| | | 25 ... 40 | 1,1 (1,5) | | | 25 ... 40 | 1,1 (1,2) | |
| Oberflächenhärte: 670 bis 750 HV10 | g | 8 ... 25 | 1,5 (2,5) | | g | 7 ... 25 | 7 ... 25 | 1,4 (2,5) |
| | | 25 ... 40 | 1,2 (2,0) | | | | 25 ... 40 | 1,1 (1,5) |
| Karbonierhärten | | | | Thermische Verfahren | | | | |
| Härtetiefe: 0,2 bis 0,4 mm | u | 8 ... 25 | 1,1 (1,9) | Induktivhärten Flammhärten Härtetiefe: 0,9 bis 1,5 mm Oberflächenhärte: 51 bis 64 HRC | u | 7 ... 25 | 1,2 (1,6) | |
| | | 25 ... 40 | 1 (1,4) | | | 25 ... 40 | 1,1 (1,4) | |
| Oberflächenhärte: mind. 670 HV10 | g | 8 ... 25 | 1,4 (2,25) | | g | 7 ... 25 | 7 ... 25 | 1,4 (2,0) |
| | | 25 ... 40 | 1,1 (1,8) | | | | 25 ... 40 | 1,2 (1,8) |
| Alle Verfahren | u | >40 | 1,0 | Alle Verfahren | g | 40 ... 250 >250 | 1,1 1,0 | |

¹⁾ Wert in () dient zur Orientierung und muss experimentell bestätigt werden.

Für ungekerbte Wellen ist bei Zug/Druck $K_V = 1$. Erfolgt die Berechnung über Stützzahlen, die für verfestigte Werkstoffe gelten oder mit experimentell bestimmten Kerbwirkungszahlen, gültig für den verfestigten Zustand, ist ebenfalls $K_V = 1$ zu setzen.

- Liegen keine Versuchsergebnisse vor, so sind die kleineren Werte zu verwenden.
- Im Bereich $25 \text{ mm} \leq d \leq 40 \text{ mm}$ erfolgt eine lineare Abnahme in Anlehnung an die Tabellenwerte.
- Bei größeren Durchmessern ($> 40 \text{ mm}$) geht K_V gegen Eins.



4. Nachweis des Vermeidens bleibender Verformung

4.1 Sicherheit

- Die Sicherheit gegen bleibende Verformung ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zdmax}}{\sigma_{zdFK}} + \frac{\sigma_{bmax}}{\sigma_{bFK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{tmax}}{\tau_{tFK}}\right)^2}} \geq S_{min}$$

- Dabei sind
 - $\sigma_{zdmax}, \sigma_{bmax}, \tau_{tmax}$ vorhandene Maximalnennspannungen infolge der Betriebsbelastung
 - $\sigma_{zdFK}, \sigma_{bFK}, \tau_{tFK}$ Bauteilfließgrenzen bei Zug/Druck, Biegung bzw. Torsion
- Annahmen und Berechnungsgrundsätze erfordern die Mindestsicherheit

$$S_{min} = 1,2$$

4.2 Bauteilfließgrenze

- Die Bauteilfließgrenzen lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\sigma_{zd,bFK} = K_1(d_{\text{eff}}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot \sigma_S(d_B)$$

$$\tau_{tFK} = K_1(d_{\text{eff}}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot \frac{\sigma_S(d_B)}{\sqrt{3}}$$

- Dabei sind
 - $K_1(d_{\text{eff}})$ Technologischer Größeneinflussfaktor für die Streckgrenze
 - K_{2F} statische Stützwirkung infolge örtlicher plastischer Verformung an der Randschicht
 - γ_F Erhöhungsfaktor der Fließgrenze durch mehrachsigen Spannungszustand bei Umdrehungskerbenn und örtlicher Verfestigung. Wenn keine Umdrehungskerbenn vorliegen, ist $\gamma_F = 1$.
 - $\sigma_S(d_B)$ Streckgrenze für den Bezugsdurchmesser d_B

- Erhöhungsfaktor der Fließgrenze γ_F bei Umdrehungskerbenn und Werkstoffen ohne harte Randschicht

| Beanspruchungsart | α_σ oder β_σ | γ_F |
|------------------------|-------------------------------------|------------|
| Zug/Druck oder Biegung | bis 1,5 | 1,00 |
| | 1,5 bis 2,0 | 1,05 |
| | 2,0 bis 3,0 | 1,10 |
| | über 3,0 | 1,15 |
| Torsion | beliebig | 1 |

ANMERKUNG Infolge der Mehrachsigkeit des Spannungszustandes, u. a. auch bei Umdrehungskerbenn, wird die Bauteilfließgrenze durch γ_F zwar erhöht, aber die Gefahr von verformungsarmen Brüchen steigt.

- Statische Stützwirkung K_{2F} für Werkstoffe ohne harte Randschicht

| Beanspruchungsart | K_{2F} | |
|-------------------|-----------|-----------|
| | Vollwelle | Hohlwelle |
| Zug/Druck | 1,0 | 1,0 |
| Biegung | 1,2 | 1,1 |
| Torsion | 1,2 | 1,0 |

4.3 Nachweis des Vermeidens von Anriss oder Gewaltbruch

- Bei Stählen mit $\sigma_B > 1.300 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ ist zu prüfen (z.B. numerisch mittels FEM), ob die Duktilität ausreicht, Spannungsspitzen abzubauen → mind. 4% Dehnbarkeit
- Ist dies nicht der Fall oder liegen harte Randschichten vor (z.B. einsatzgehärtete Wellen), so ist neben dem Nachweis gegen bleibende Verformung zu zeigen:

$$S = \frac{1}{0,5 \cdot \left[\frac{\alpha_{\sigma z d} \cdot \sigma_{z d \max}}{\sigma_{z d B R \text{Rand}}} + \frac{\alpha_{\sigma b} \cdot \sigma_{b \max}}{\sigma_{b B R \text{Rand}}} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_{\sigma z d} \cdot \sigma_{z d \max}}{\sigma_{z d B R \text{Rand}}} + \frac{\alpha_{\sigma b} \cdot \sigma_{b \max}}{\sigma_{b B R \text{Rand}}} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \alpha_{\tau} \cdot \tau_{t \max}}{\tau_{t B R \text{Rand}}} \right)^2} \right]}$$

- Dabei sind

- $\alpha_{\sigma z d}, \alpha_{\sigma b}, \alpha_{\tau}$ Formzahlen für Zug/Druck, Biegung und Torsion
- $\sigma_{z d B R \text{Rand}}, \sigma_{b B R \text{Rand}}, \tau_{t B R \text{Rand}}$ Bauteilanrissgrenze in der harten Randschicht bei Zug/Druck, Biegung und Torsion

→ Örtliches Konzept

5. Nachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen

5.1 Sicherheit

- Die Sicherheit gegen Dauerbruch ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zda}}{\sigma_{zdADK}} + \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tADK}}\right)^2}} \geq S_{\min}$$

- Dabei sind
 - $\sigma_{zda}, \sigma_{ba}, \tau_{ta}$ Amplituden der vorhandenen Spannungen infolge der äußeren Belastung
 - $\sigma_{zdADK}, \sigma_{bADK}, \tau_{tADK}$ Gestaltfestigkeiten bei Zug/Druck, Biegung bzw. Torsion (ertragbare Amplituden)
- Annahmen und Berechnungsgrundsätze erfordern die Mindestsicherheit

$$S_{\min} = 1,2$$

5.2 Gestaltfestigkeit

- Bei der Ermittlung der Gestaltfestigkeit aus der Festigkeit des Probenkörpers werden folgende Einflüsse berücksichtigt:
 - Vergütbarkeit bzw. Härbarkeit
→ technologischer Größeneinflussfaktor $K_1(d_{\text{eff}})$
 - Übergang der Biegewechselfestigkeit zur Zug-/Druckwechselfestigkeit mit steigendem Durchmesser infolge der Abnahme des Spannungsgradienten
→ geometrischer Größeneinflussfaktor $K_2(d)$
 - Bauteilform, insbesondere Kerben
→ Kerbwirkungszahl $\beta_\sigma(d), \beta_\tau(d)$
 - Einfluss von Randschichtverfestigungen und an der Oberfläche wirkende Druckeigenstressungen
→ Verfestigungsfaktor K_V
 - Einfluss der Mittelspannung auf die ertragbare Spannungsamplitude
→ Faktor der Mittelspannungsempfindlichkeit $\psi_{\sigma K}, \psi_{\tau K}$

▪ Bauteilwechselfestigkeit

- Zunächst erfolgt die Berechnung der Bauteilwechselfestigkeit auf Basis der Probenwechselfestigkeit:

$$\sigma_{zd,bWK} = \frac{K_1(d_{eff})}{K_\sigma} \cdot \sigma_{zd,bW}(d_B)$$
$$\tau_{tWK} = \frac{K_1(d_{eff})}{K_\tau} \cdot \tau_{tW}(d_B)$$

- Dabei sind
 - $K_1(d_{eff})$ Technologischer Größeneinflussfaktor für Zugfestigkeit
 - $\sigma_{zdW}(d_B), \sigma_{bW}(d_B), \tau_{tW}(d_B)$ Wechselfestigkeit des glatten Probestabes
(mit Bezugsdurchmesser d_B)
 - K_σ, K_τ Gesamteinflussfaktor für Zug/Druck und Biegung sowie Torsion

- Die **Gesamteinflussfaktoren** berechnen sich zu

$$K_{\sigma} = \left(\frac{\beta_{\sigma}}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

Zug/Druck und Biegung differenzieren!

$$K_{\tau} = \left(\frac{\beta_{\tau}}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$$

- Dabei sind
 - $\beta_{\sigma}, \beta_{\tau}$ Kerbwirkungszahlen für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion
 - $K_2(d)$ Geometrischer Größeneinflussfaktor
 - $K_{F\sigma}, K_{F\tau}$ Einflussfaktor der Oberflächenrauheit für Zug/Druck und Biegung sowie Torsion
 - K_V Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung (z.B. Kugelstrahlen, Randschichthärtung)

▪ Mittelspannungseinfluss

- Um nun aus der Bauteilwechselfestigkeit die Gestaltfestigkeit ableiten zu können, bedarf es der Berücksichtigung evtl. vorhandener Mittelspannungen.
- Nach GEH lassen sich die **Vergleichsmittelspannungen** wie folgt berechnen:

$$\sigma_{mv} = \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2}$$

$$\tau_{mv} = \frac{\sigma_{mv}}{\sqrt{3}}$$

- Zu unterscheiden sind nun zwei Beanspruchungsfälle:
 - **Fall 1:** Bei Änderung der Betriebsbelastung ändern sich zwar die Spannungsamplituden, aber die Mittelspannungen bleiben konstant.

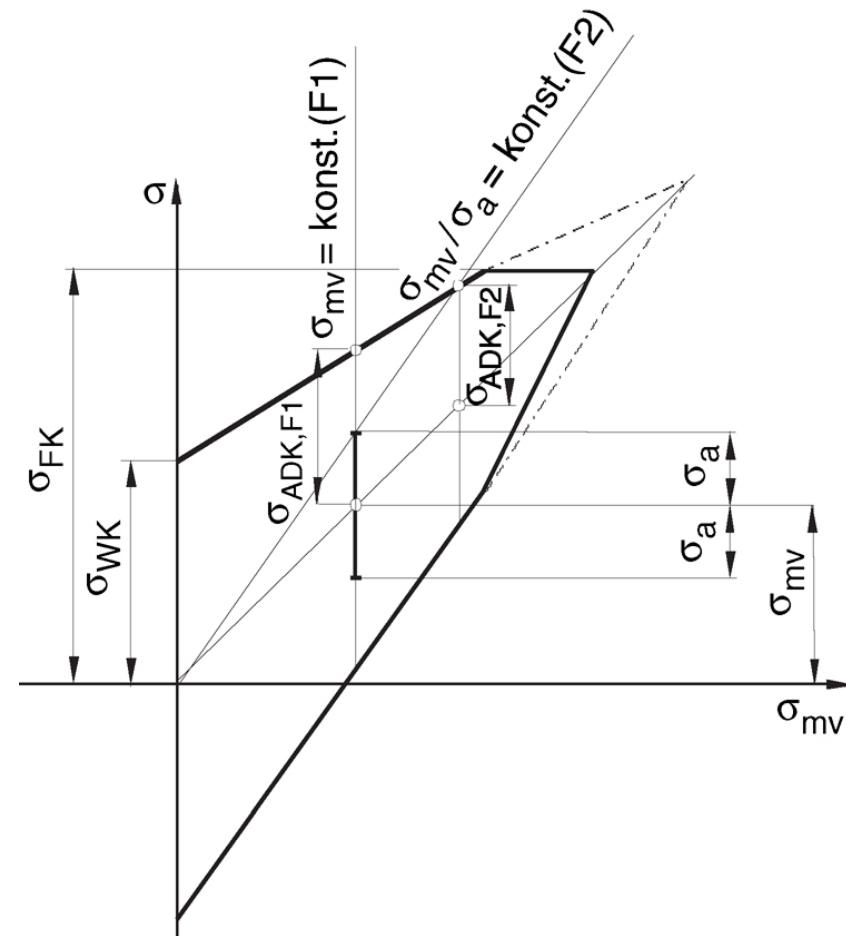
$$\sigma_{mv} = \text{const} \text{ bzw. } \tau_{mv} = \text{const}$$

- **Fall 2:** Bei Änderung der Betriebsbelastung ändern sich Spannungsamplituden und Mittelspannungen, aber ihr Verhältnis bleibt konstant.

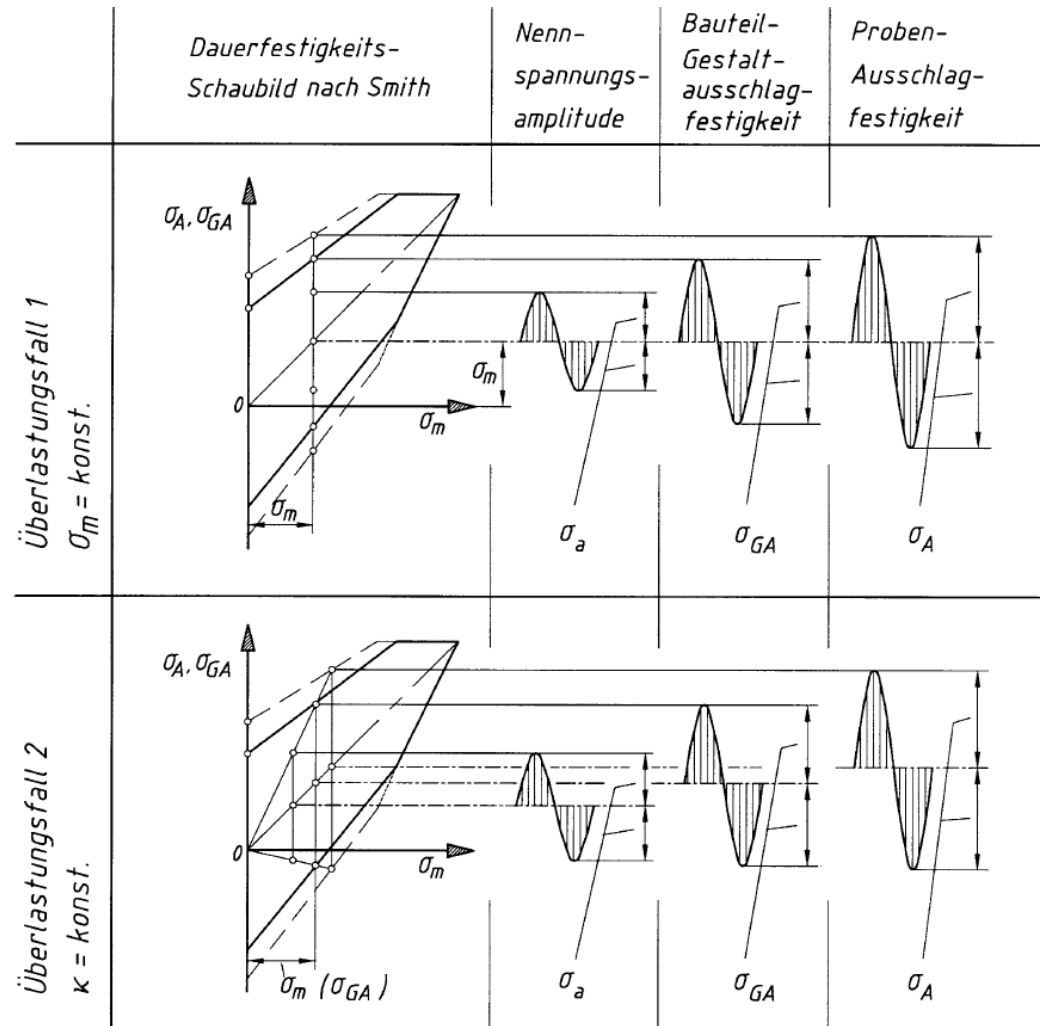
$$\frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{zd,ba}} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau_{mv}}{\tau_{ta}} = \text{const}$$

- **Interpretation**

- Eine Änderung (Erhöhung) der Betriebsbelastung führt
 - bei Fall 1 nicht zu einer Änderung der Gestaltfestigkeit
 - bei Fall 2 zu einer Änderung (Verringerung) der Gestaltfestigkeit
- Im Zweifelsfall sollte immer der Nachweis unter Verwendung von Fall 2 (kritischer Fall) durchgeführt werden.



- Fall 1:
maximales Drehmoment ist begrenzt (z.B. durch Regelung oder Überlastkupplung);
Spannungsamplituden können u.U. größer werden



- Fall 2:
bei größerer Nutzlast vergrößert sich auch die dynamische Beanspruchung

- Zur Erfassung des Mittelspannungseinflusses dient der **Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit**:

$$\psi_{\sigma K} = \frac{\sigma_{zd,bWK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot \sigma_B(d_B) - \sigma_{zd,bWK}}$$

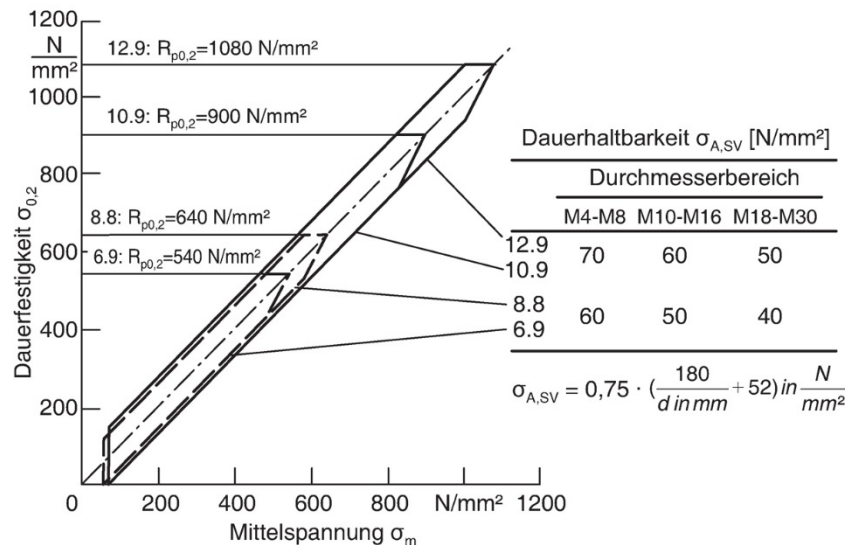
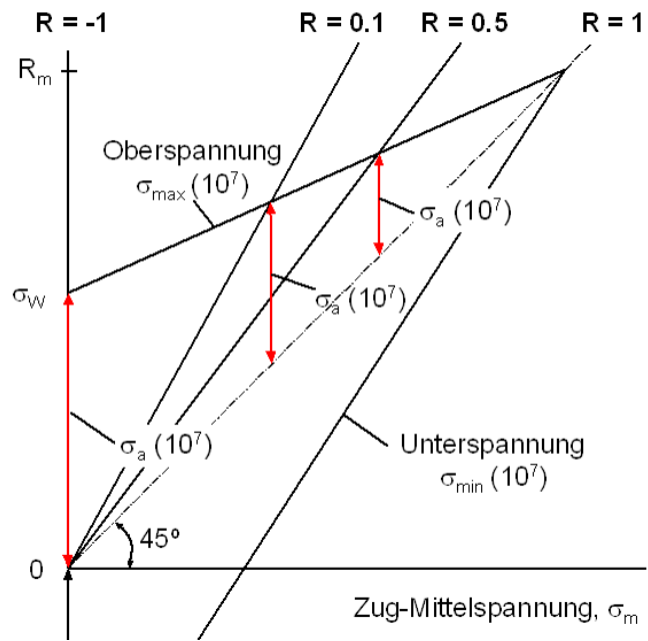
$$\psi_{\tau K} = \frac{\tau_{tWK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot \sigma_B(d_B) - \tau_{tWK}}$$

- Dabei sind
 - $\sigma_{zdWK}, \sigma_{bWK}, \tau_{tWK}$ Bauteilwechselfestigkeit bei Zug/Druck, Biegung und Torsion
 - $K_1(d_{eff})$ Technologischer Größeneinflussfaktor für Zugfestigkeit
 - $\sigma_B(d_B)$ Zugfestigkeit des glatten Probenkörpers mit Bezugsdurchmesser d_B

- Der Einflussfaktor $\psi_{\tau, \sigma K}$ beschreibt die Sensibilität eines Werkstoffes hinsichtlich des Auftretens einer Mittelspannung.
- Je mittelspannungsempfindlicher ein Werkstoff ist, umso flacher ist die obere Begrenzungslinie (Linie der ertragbaren Oberspannung) und umso steiler ist die untere Begrenzungslinie (Linie der ertragbaren Unterspannung) des Smith-Diagramms.
- Extrema:

$\psi_{\tau, \sigma K} \rightarrow 1$
 Begrenzungslinien horizontal bzw. vertikal

$\psi_{\tau, \sigma K} \rightarrow 0$
 Begrenzungslinien parallel zur Winkelhalbierenden (z.B. Schraube)



- Die **Gestaltfestigkeit** für Fall 1 berechnet sich zu:

$$\sigma_{zd,bADK} = \sigma_{zd,bWK} - \psi_{zd,b\sigma K} \cdot \sigma_{mv}$$

$$\tau_{tADK} = \tau_{tWK} - \psi_{\tau K} \cdot \tau_{mv}$$

- Dabei sind

- $\sigma_{zdWK}, \sigma_{bWK}, \tau_{tWK}$

Bauteilwechselfestigkeit für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion

- $\psi_{zd\sigma K}, \psi_{b\sigma K}, \psi_{\tau K}$

Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit für Zug/Druck und Biegung sowie für Torsion

- σ_{mv}, τ_{mv}

Vergleichsmittelspannung

- In den obigen Gleichungen ist

$$\psi_{zd,b\sigma K} = 1 \text{ bzw. } \psi_{\tau K} = 1$$

zu setzen (d.h. es liegt maximale Mittelspannungsempfindlichkeit vor), sofern die folgenden Bedingungen nicht erfüllt sind:

$$\sigma_{mv} \leq \frac{\sigma_{zd,bFK} - \sigma_{zd,bWK}}{1 - \psi_{zd,b\sigma K}}$$

$$\tau_{mv} \leq \frac{\tau_{tFK} - \tau_{tWK}}{1 - \psi_{\tau K}}$$

- Dabei sind

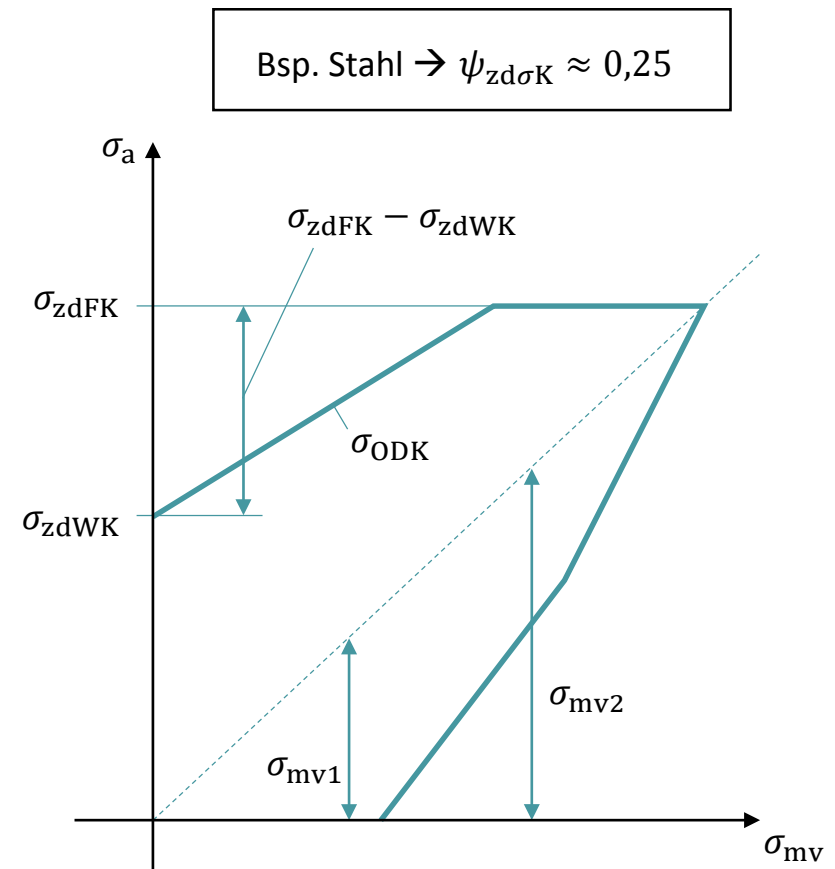
- | | |
|--|---|
| – $\sigma_{zdFK}, \sigma_{bFK}, \tau_{tFK}$ | Bauteilfließgrenze für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion |
| – $\sigma_{zdWK}, \sigma_{bWK}, \tau_{tWK}$ | Bauteilwechselfestigkeit für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion |
| – $\psi_{zd\sigma K}, \psi_{b\sigma K}, \psi_{\tau K}$ | Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit für Zug/Druck und Biegung sowie für Torsion |
| – σ_{mv}, τ_{mv} | Vergleichsmittelspannung |

- **Interpretation**

- Beim (vereinfachten) Smith-Diagramm weist die Linie der ertragbaren Oberspannung σ_{ODK} eine Unstetigkeit („Knick“) auf.
- Ab der zu dieser Unstetigkeit gehörenden Mittelspannung ist die Mittelspannungsempfindlichkeit maximal.
- Die Differenz aus Fließgrenze und Wechselfestigkeit ist ein Maß dafür, an welcher Stelle diese Unstetigkeit auftritt.
- Solange

$$(1 - \psi_{zd,b\sigma K}) \cdot \sigma_{mv} \leq \sigma_{zd,bFK} - \sigma_{zd,bWK}$$

gilt, ist dieser kritische Bereich nicht erreicht.



- Die **Gestaltfestigkeit** für Fall 2 berechnet sich zu:

$$\sigma_{zd,bADK} = \frac{\sigma_{zd,bWK}}{1 + \psi_{zd,b\sigma K} \cdot \frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{zd,ba}}}$$

$$\tau_{tADK} = \frac{\tau_{tWK}}{1 + \psi_{\tau K} \cdot \frac{\tau_{mv}}{\tau_{ta}}}$$

- Dabei sind

- $\sigma_{zdWK}, \sigma_{bWK}, \tau_{tWK}$ Bauteilwechselfestigkeit für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion
- $\psi_{zd\sigma K}, \psi_{b\sigma K}, \psi_{\tau K}$ Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit für Zug/Druck und Biegung sowie für Torsion
- σ_{mv}, τ_{mv} Vergleichsmittelspannung
- $\sigma_{zda}, \sigma_{ba}, \tau_{ta}$ Amplituden der vorhandenen Spannungen

- In den obigen Gleichungen ist

$$\psi_{zd,b\sigma K} = 1 \text{ bzw. } \psi_{\tau K} = 1$$

zu setzen (d.h. es liegt maximale Mittelspannungsempfindlichkeit vor), sofern die folgenden Bedingungen nicht erfüllt sind:

$$\frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{zd,ba}} \leq \frac{\sigma_{zd,bFK} - \sigma_{zd,bWK}}{\sigma_{zd,bWK} - \psi_{zd,b\sigma K} \cdot \sigma_{zd,bFK}}$$

$$\frac{\tau_{mv}}{\tau_{ta}} \leq \frac{\tau_{tFK} - \tau_{tWK}}{\tau_{tWK} - \psi_{\tau K} \cdot \tau_{tFK}}$$

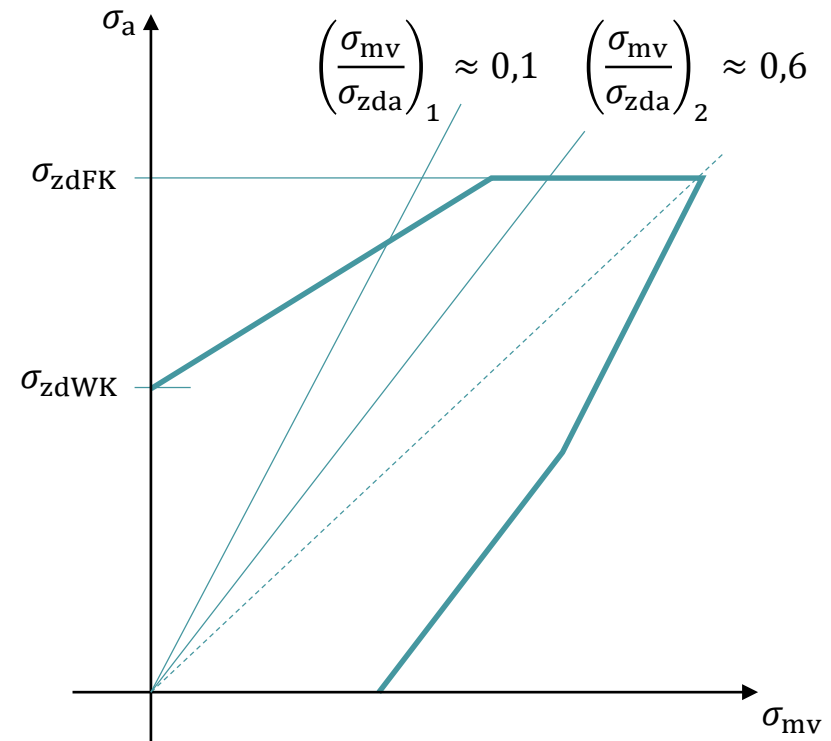
- Dabei sind

- $\sigma_{zdFK}, \sigma_{bFK}, \tau_{tFK}$ Bauteilfließgrenze für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion
- $\sigma_{zdWK}, \sigma_{bWK}, \tau_{tWK}$ Bauteilwechselfestigkeit für Zug/Druck und Biegung bzw. für Torsion
- $\psi_{zd\sigma K}, \psi_{b\sigma K}, \psi_{\tau K}$ Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit für Zug/Druck und Biegung sowie für Torsion
- σ_{mv}, τ_{mv} Vergleichsmittelspannung

• Interpretation

- Auch für Fall 2 wird durch die besagte Bedingung die Unstetigkeit in der Linie der ertragbaren Oberspannung σ_{OAK} berücksichtigt.
- Je größer das Verhältnis aus Mittelspannung und Ausschlagspannung $\sigma_{\text{mv}}/\sigma_{\text{a}}$ ist, umso größer ist die Mittelspannungsempfindlichkeit.
- Im Beispiel rechts (für Zug/Druck) sei zur Verdeutlichung $\sigma_{\text{zdWK}} \approx 0,75 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}$.
Zu überprüfen ist die folgende Ungleichung (umgestellt):

$$\frac{\sigma_{\text{mv}}}{\sigma_{\text{zda}}} \cdot (\sigma_{\text{zdWK}} - \psi_{\text{zd}\sigma\text{K}} \cdot \sigma_{\text{zdFK}}) \leq \sigma_{\text{zd,bFK}} - \sigma_{\text{zd,bWK}}$$



Linie 1

$$0,1 \cdot (0,75 \cdot \sigma_{\text{zdFK}} - 0,25 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}) \leq \sigma_{\text{zdFK}} - 0,75 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}$$

$$0,05 \cdot \sigma_{\text{zdFK}} \leq 0,25 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}$$

Linie 2

$$0,6 \cdot (0,75 \cdot \sigma_{\text{zdFK}} - 0,25 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}) \leq \sigma_{\text{zdFK}} - 0,75 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}$$

$$0,3 \cdot \sigma_{\text{zdFK}} \leq 0,25 \cdot \sigma_{\text{zdFK}}$$

▪ Gestaltfestigkeit bei Druckspannungen

- Wenn für beide Beanspruchungsfälle gilt, dass

$$\sigma_{zdm} + \sigma_{bm} < 0$$

ist, dann muss folgende Festigkeitshypothese (modifizierte GEH) angewendet werden:

$$\sigma_{mv} = \frac{H}{|H|} \cdot \sqrt{|H|}$$

*Vorzeichen geht
nicht verloren!*

- Dabei ist

$$H = \frac{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^3}{|\sigma_{zdm} + \sigma_{bm}|} + 3 \cdot \tau_{tm}^2$$

und

$$\tau_{mv} = \frac{\sigma_{mv}}{\sqrt{3}}$$

- Im Falle $\sigma_{vm} < 0$, ist $\tau_{mv} = 0$ zu setzen.

- Die Gleichungen zur Berechnung der Gestaltfestigkeit bei Normalspannungen (Fall 1 Folie 60 und Fall 2 auf Folie 63) sind nur gültig, wenn

- Fall 1:

$$\sigma_{mv} \geq \sigma_{mv_grenzF1} = (\sigma_{zd,bWK} - \sigma_{dFK}) \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{zd,bWK}}{2 \cdot \sigma_B(d)}\right)$$

- Fall 2:

$$\frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{zd,ba}} > \left(\frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{zd,ba}}\right)_{grenzF2} = \frac{\sigma_{zd,bWK} - \sigma_{dFK}}{\psi_{zd,b\sigma K} \cdot \sigma_{dFK} + \sigma_{zd,bWK}}$$

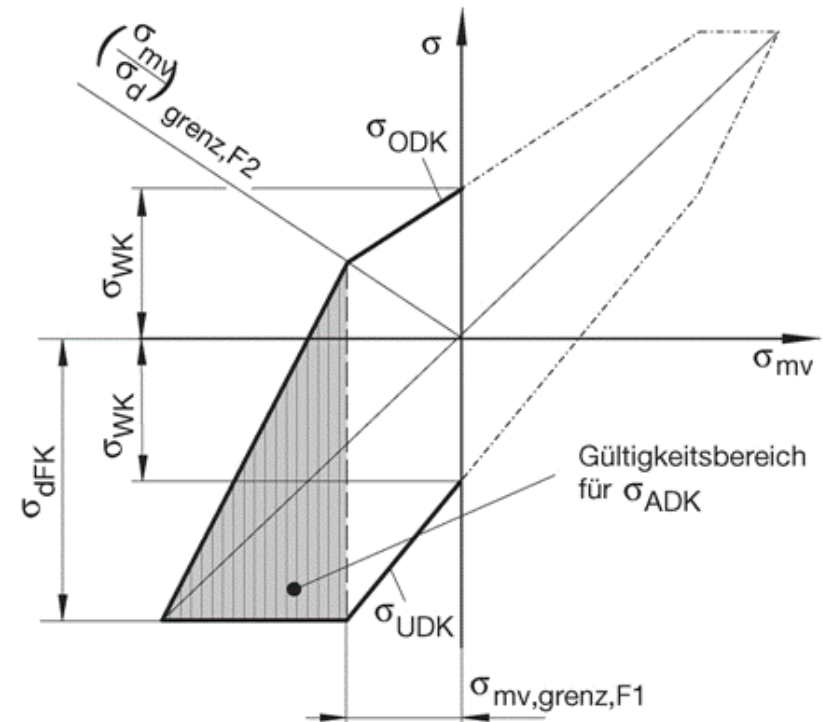
- Dabei ist σ_{dFK} die Druckfließgrenze des Bauteils, wobei – sofern keine expliziten Werte vorliegen – gilt:

$$\sigma_{dFK} = \sigma_{zFK} = \sigma_{zdFK}$$

- Alle Festigkeiten sind positiv einzusetzen.

- **Interpretation**

- Auch im Bereich negativer Mittel-Spannungen besitzen die Linien der ertragbaren Ober- bzw. Unterspannung σ_{ODK} bzw. σ_{UDK} einen „Knick“.
- Diese Unstetigkeiten sind durch die Grenzspannungen $\sigma_{mv_grenzF1,2}$ gegeben.
- Bei Unterschreiten der Grenzspannungen gilt:



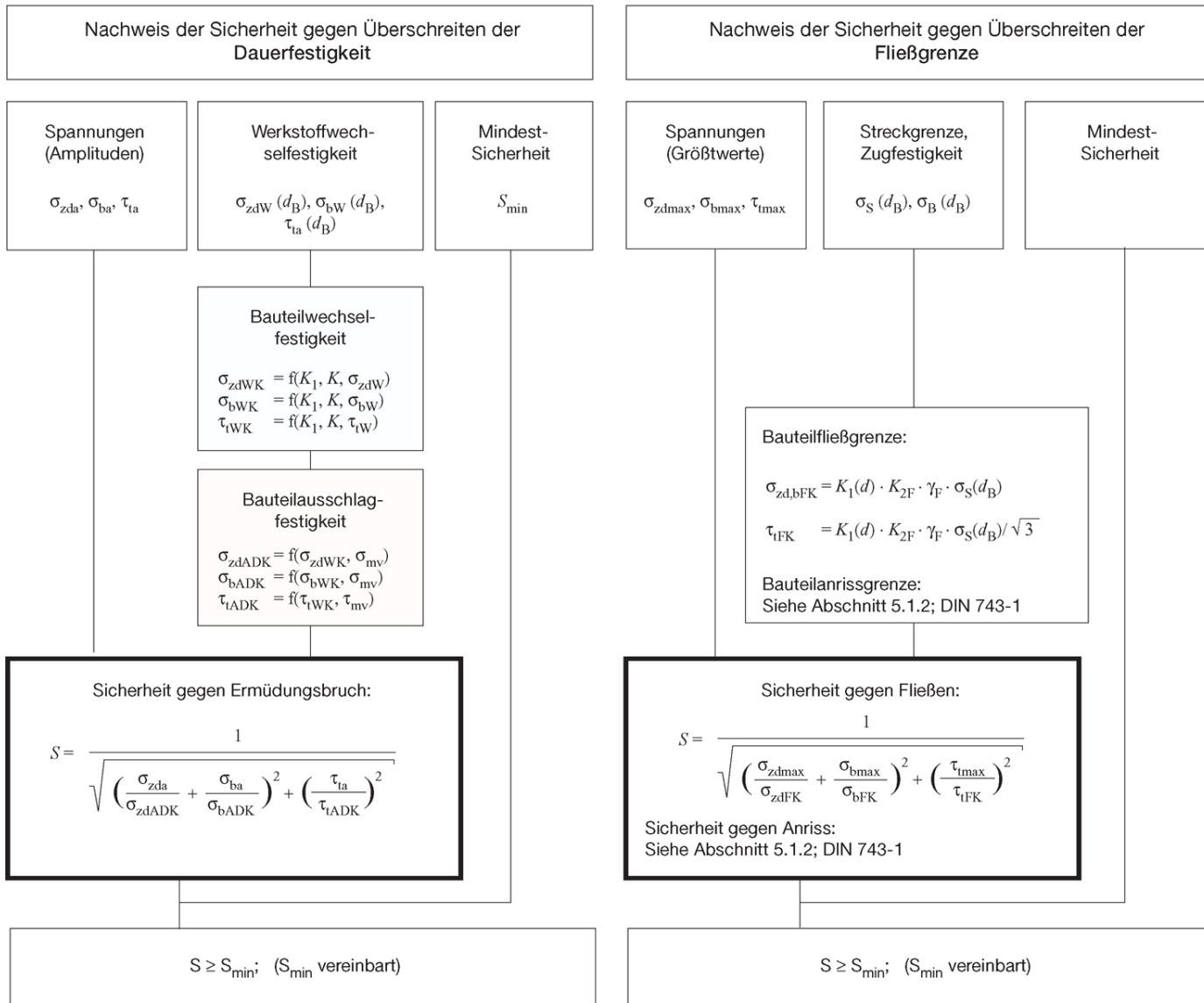
- Fall 1:

$$\sigma_{zd, bADK} = \sigma_{mv} + \sigma_{dFK}$$

- Fall 2:

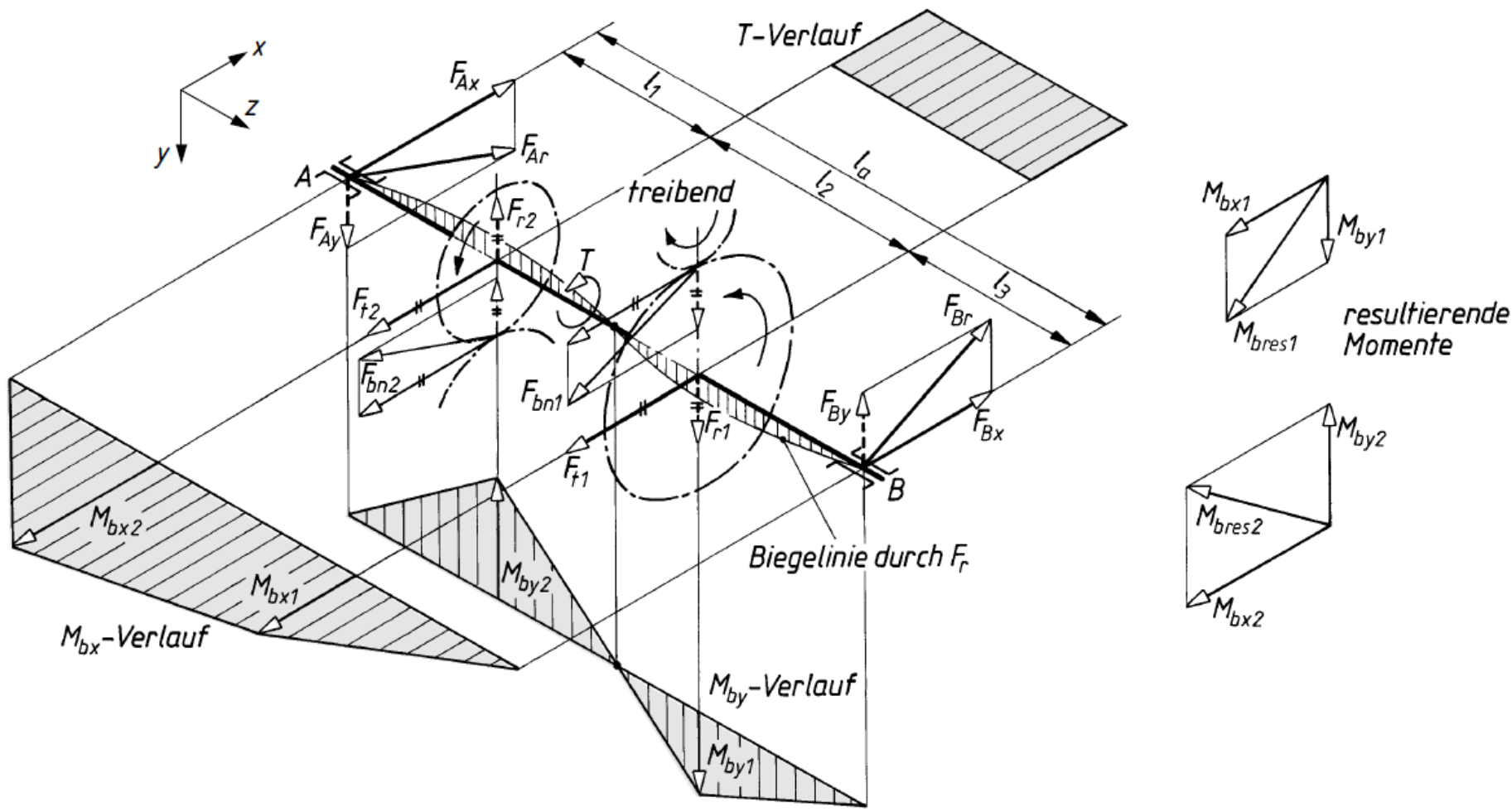
$$\sigma_{zd, bADK} = \frac{\sigma_{dFK} \cdot \sigma_{zd, ba}}{\sigma_{zd, ba} - \sigma_{mv}}$$

6. Zusammenfassung und Vorgehensweise

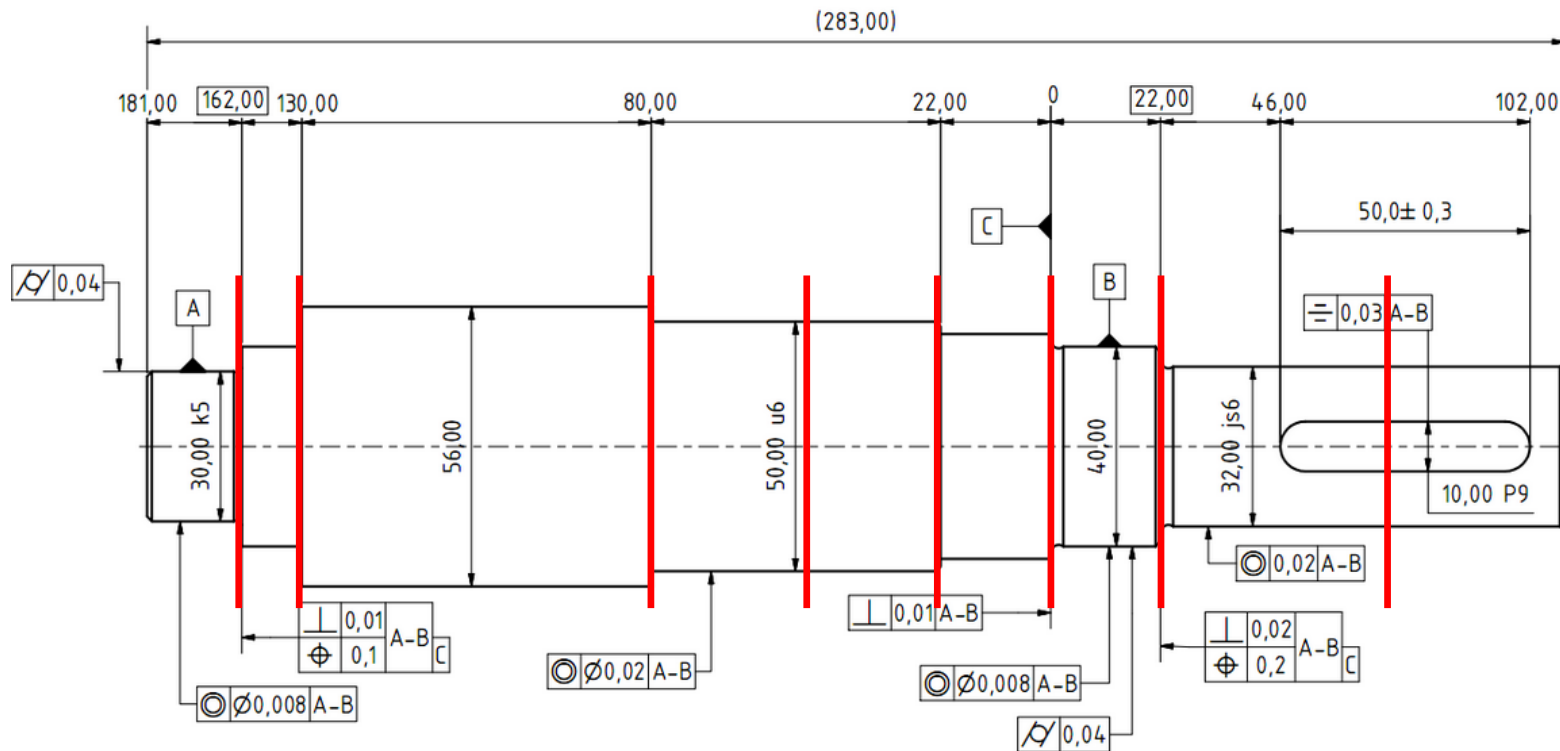


▪ Vorgehensweise

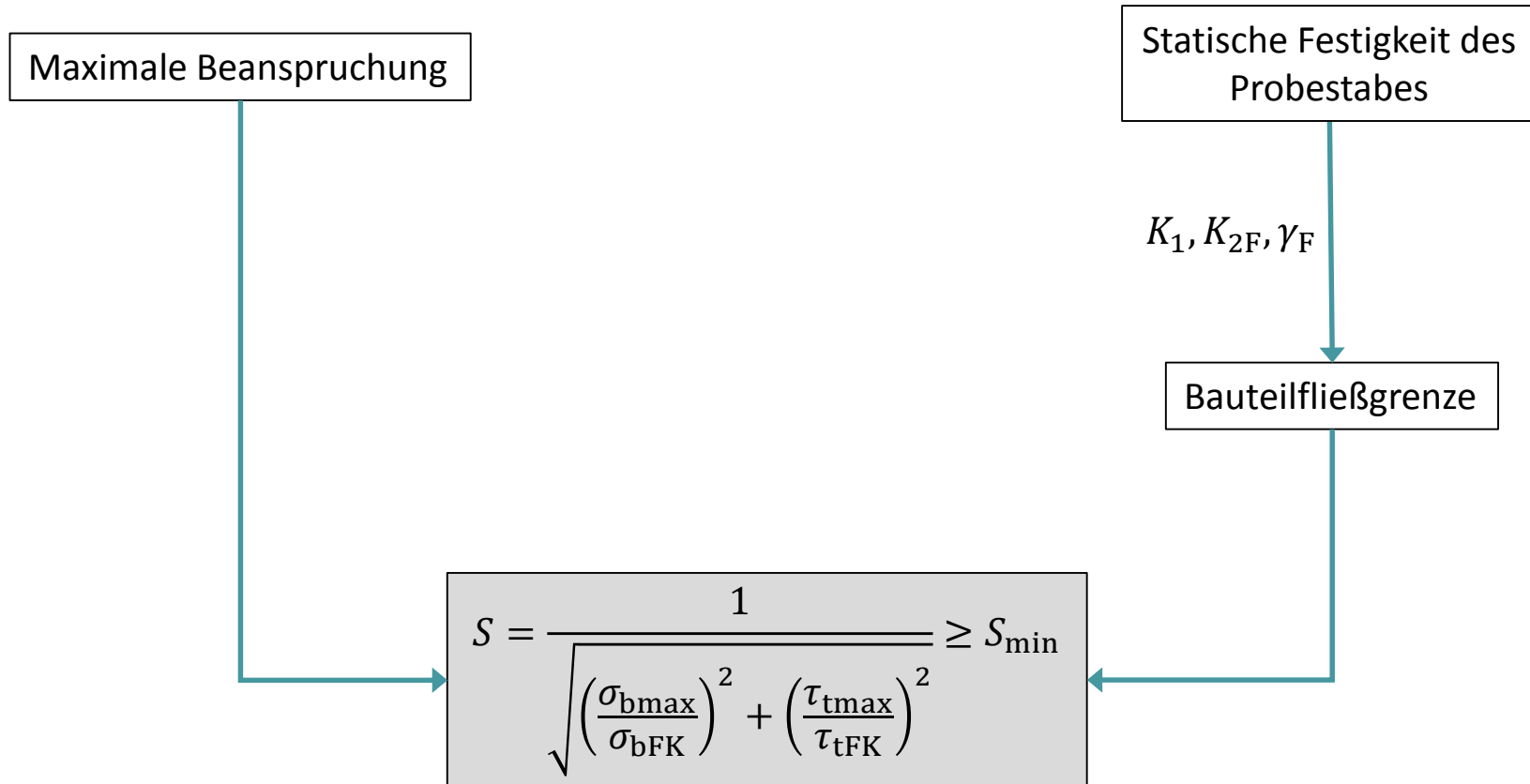
- Ermittlung der Schnittgrößen



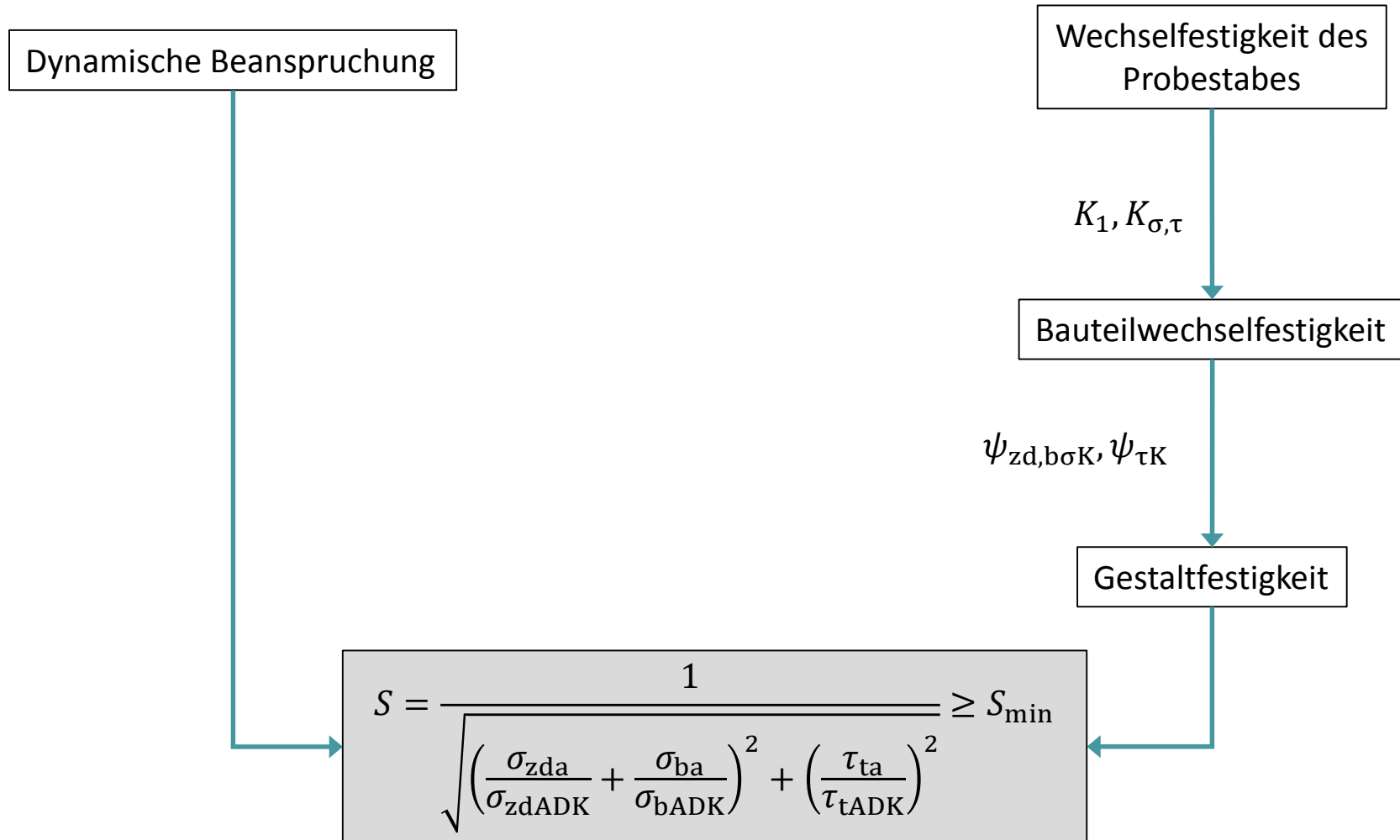
- Aus den Schnittgrößen und auf Basis der Wellengestaltung (Geometrie, insbesondere Wellendurchmesser) lassen sich die Nennspannungen (als Funktion der Laufvariable) berechnen.
- Schließlich ist der Nachweis für alle Querschnittsänderungen und Welle-Nabe-Verbindungen (gegen Dauerbruch) sowie für den Ort der größten Belastung (gegen bleibende Verformung) zu erbringen.



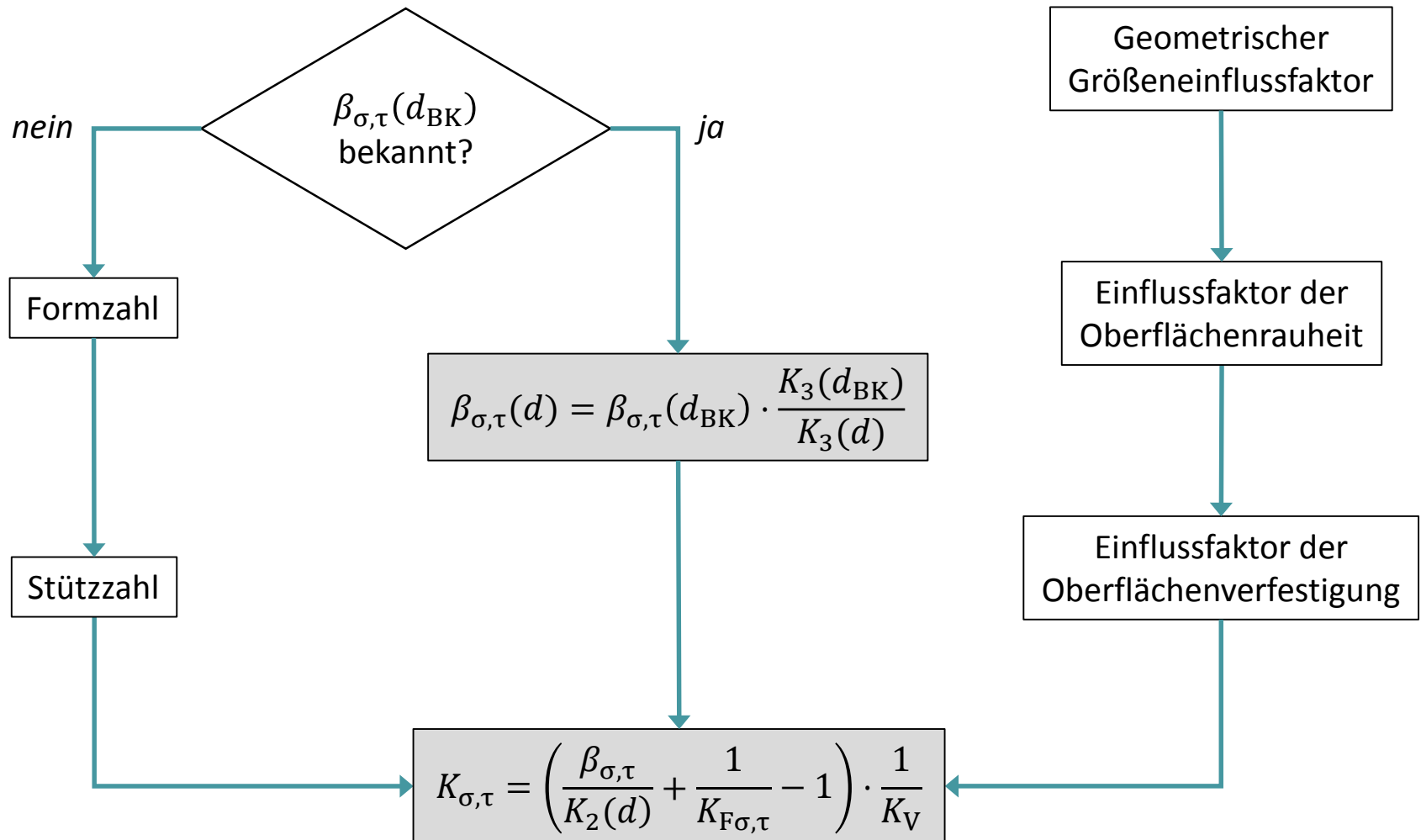
- Rechnungsgang für S_F



- Rechnungsgang für S_D

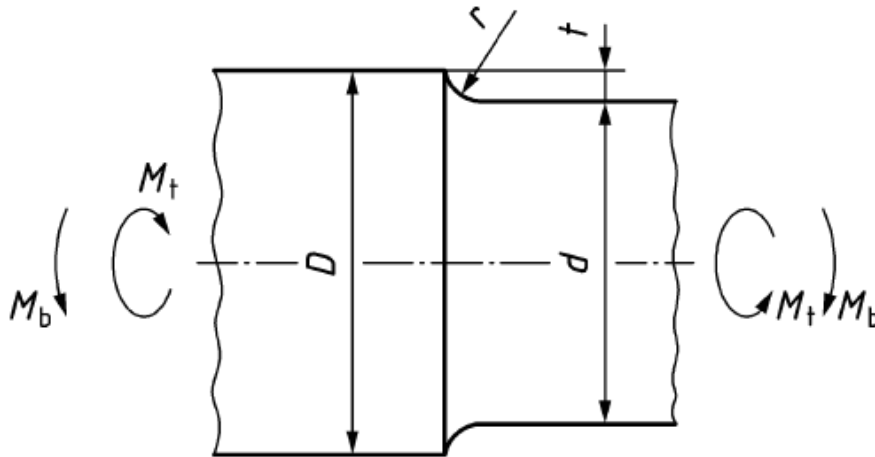


- Rechnungsgang für $K_{\sigma,\tau}$



7. Beispiel

- Der dargestellte Wellenabsatz aus 34CrMo4 ist am Querschnitt mit dem Durchmesser d wie folgt belastet:



$$\sigma_b = (500 \pm 50) \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$\tau_t = (100 \pm 30) \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

- Weiter sind folgende Abmessungen gegeben:

$$d = 42 \text{ mm}$$

$$D = 50 \text{ mm}$$

$$r = 5 \text{ mm}$$

- Die Rauheit betrage $Rz = 5 \mu\text{m}$.
- Ermitteln Sie die Sicherheit gegen Dauerbruch und gegen bleibende Verformung bei konstanter Mittelspannung