



Inhalt

0	Wiederholung aus der Elektrostatik	3
0.1	Kräfte zwischen Ladungen	3
0.2	Das elektrische Feld	4
0.3	Elektrische Spannung	5
0.4	Elektrische Flussdichte	6
0.5	Elektrisches Feld in Materie: Polarisierung	7
0.6	Kondensator	8
1	Zeitlich veränderliche Felder	9
1.1	Freie Ladungen im elektrischen Feld	9
1.2	Strom und Stromdichte	9
1.3	Strom im Leiter	10
1.4	Strom im Kondensator	11
2	Das Magnetische Feld	13
2.1	Magnete und magnetische Felder	13
2.2	Magnetische Flussdichte B	15
2.2.1	Einschub: Kreuzprodukt	16
2.3	Magnetischer Fluss	17
2.4	Magnetisches Feld	18
2.5	Durchflutungssatz	19
2.6	Biot-Savart'sches Gesetz	20
2.7	Magnetfeld in Materie	21
2.7.1	Ferromagnetismus	21
2.7.2	Magnetfeld an Grenzflächen	22
2.8	Magnetischer Kreis	23
2.9	Induktion	25
2.9.1	Bewegungsinduktion	25
2.9.2	Feldinduktion	26
2.9.3	Zählpfeile und Werte bei der Induktion	26



2.9.4	Offene Leiterschleife	27
2.9.5	Geschlossene Leiterschleife	27
2.10	Selbstinduktion und Induktivität	28
2.11	Spule als Bauelement.....	29
2.12	Energie im elektromagnetischen Feld	30
2.13	Überblick über die elektromagnetischen Feldgrößen	31
3	Der Transformator	32
3.1	Prinzip des Trafos.....	32
3.1.1	Herleitung des T-Ersatzschaltbildes.....	32
3.1.2	Beschreibung mit Gegeninduktivität.....	32
3.1.3	Kopplung	32
3.1.4	Der symmetrische Trafo.....	32
3.2	Berücksichtigung der Eisenverluste	32
3.2.1	Wirbelstromverluste	32
3.2.2	Hystereseverluste	32
3.2.3	Gesamtverluste.....	32
3.2.4	Berücksichtigung im ESB.....	32

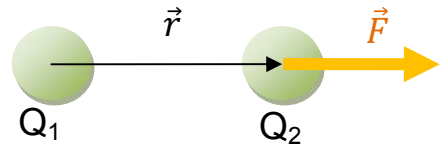
0 Wiederholung aus der Elektrostatik

0.1 Kräfte zwischen Ladungen

Beobachtung: Ladungen ziehen sich an oder stoßen sich ab. Die Kraft hängt auch vom umgebenden Material ab.

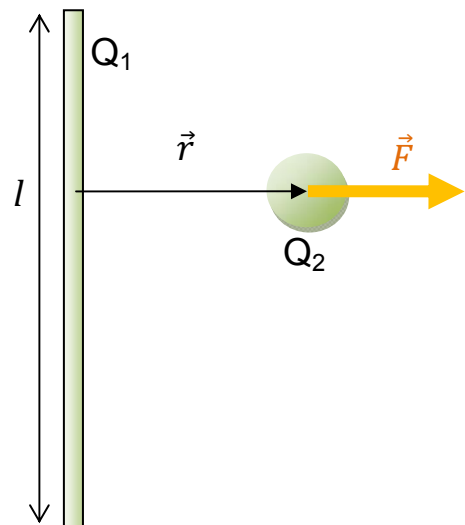
Coulomb-Gesetz: Kraft durch Q_1 auf Q_2 (Punktladungen):

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon \cdot 4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Q_1 verteilt über (große) Länge l ,
 Q_2 punktförmig:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon \cdot 2\pi r l} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



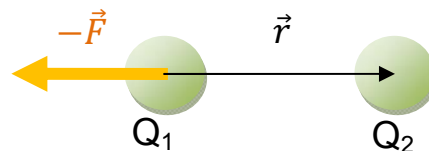
Materialabhängigkeit wird beschrieben durch die **Dielektrizitätskonstante** ϵ :

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Vakuum: $\epsilon_r = 1$,

Materie: $\epsilon_r > 1$ (Luft: 1,0006 / Quarz: 3,5 / Wasser: 81 / Elektrolyt: 40..80)

Reaktionsprinzip: Wenn Q_1 auf Q_2 eine Kraft ausübt, dann übt Q_2 auf Q_1 eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft aus.



0.2 Das elektrische Feld

Q1 wirkt auf Q2. Aber was ist, wenn Q2 entfernt wird?

Q1 erzeugt einen **Raumzustand**, das elektrische Feld \vec{E} , das die Wirkung (Kraft) auf eine Probeladung q beschreibt:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

- E besitzt an jedem Punkt im Raum eine Größe und eine Richtung
- Richtung des E-Feldes in Richtung der Kraft auf positive Ladung
- E-Feld und damit Kraft sind materialabhängig
- Einheit [E] = V/m
- Visualisierung durch Feldlinien, Dichte der Feldlinien entspricht der Feldstärke
- Feldlinien beginnen an positiven Ladungen und enden an negativen
(**Elektrodynamik: Feldlinien können auch in sich geschlossen sein**)
- E-Felder mehrerer Ladungen überlagern sich linear
- Feld einer Punktladung Q im Abstand r: $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$
- Feld einer längs l verteilten Ladung Q im Abstand r: $\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot 2\pi r l} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

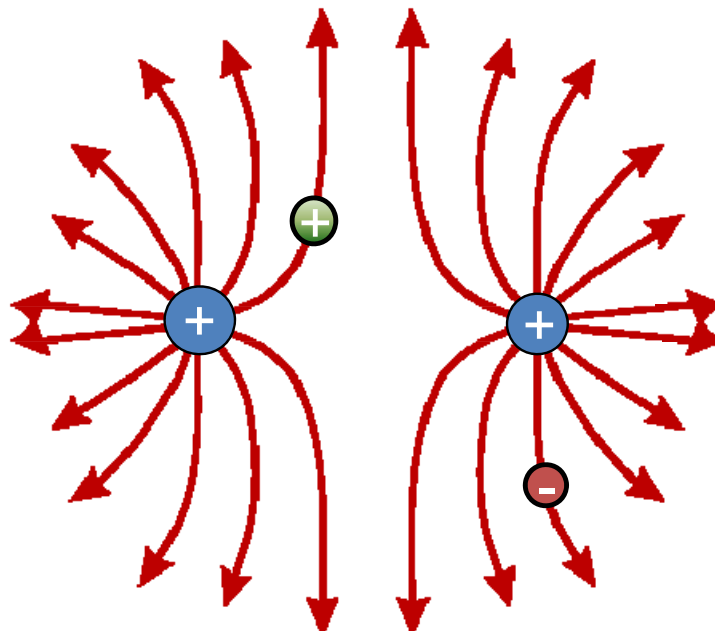


Bild: E-Feld durch zwei ortsfeste positive (blaue) Ladungen mit zwei Probeladungen. Die grüne Probeladung bewegt sich entlang der gezeichneten Feldlinie von der Quellenladung weg, die rote Probeladung läuft auf der Feldlinie auf die Quellenladung zu

0.3 Elektrische Spannung

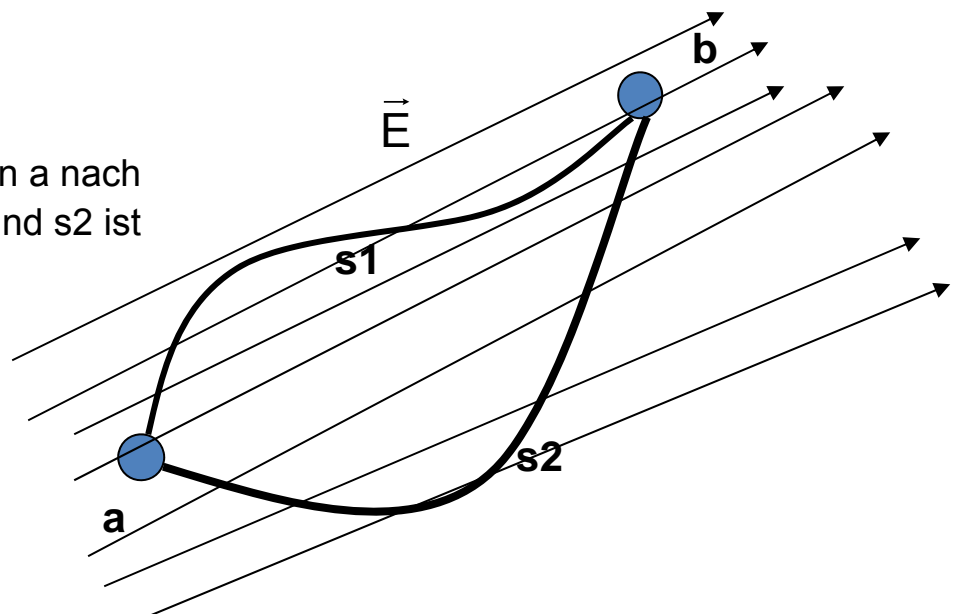
Legt eine Ladung q einen Weg längs eines E-Felds zurück, dann wird ihr Energie zu- oder abgeführt:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, der genaue Integrationsweg spielt keine Rolle. Man definiert die elektrische Spannung U_{ab}

$$U_{ab} := \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [U] = V$$

Bild: Die Spannung von a nach b längs der Wege s1 und s2 ist gleich



Die Spannung von einem Punkt über einen beliebigen Weg zurück zu sich selbst ist deshalb

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{für die Elektrodynamik gilt dies nicht mehr!})$$

In einem **homogenen** E-Feld gilt für eine Strecke d längs der Feldlinien:

$$U = E \cdot d$$

0.4 Elektrische Flussdichte

\vec{E} beschreibt die umgebungsabhängige **Wirkung** einer Ladung. Man wünscht sich aber eine Feldgröße, die nur von der Ladung selbst als **Ursache** eines Feldes abhängt. Die Materialabhängigkeit in \vec{E} tritt in Form des Faktors $1/\epsilon$ auf. Wir definieren deshalb die elektrische Flussdichte \vec{D} als

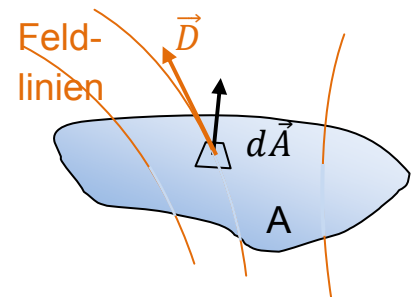
$$\vec{D} := \epsilon \cdot \vec{E} \qquad [D] = \text{As/m}^2$$

\vec{D} beschreibt wie \vec{E} die Dichte der Feldlinien an jedem Punkt im Raum, ist aber unabhängig vom umgebenden Material. (An Grenzflächen kann \vec{D} aber einen Knick haben, ist dann also von der Umgebung abhängig!)

Beispiele: Punktladung $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, Linienladung: $\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r l} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

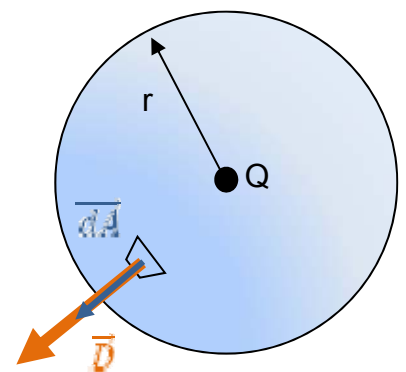
Zur Flussdichte gehört ein elektrischer Fluss Ψ : Die Summe aller Feldlinien, die durch eine Fläche A hindurchtritt, ist

$$\Psi := \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \qquad [\Psi] = \text{As}$$



Beispiel: Wie groß ist der gesamte elektrische Fluss einer Punktladung? Auf der Kugeloberfläche mit Radius r ist die Flussdichte $D = Q/4\pi r^2$ überall gleich groß, also

$$\begin{aligned} \Psi &= \oiint_{\text{Kugel}} D \cdot dA = D \cdot A_{\text{Kugel}} \\ &= D \cdot 4\pi r^2 = Q \end{aligned}$$



Da beliebige Ladungsverteilungen letztlich auf Punktladungen basieren, gilt: Der gesamte Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der Summe der eingeschlossenen Ladungen.

0.5 Elektrisches Feld in Materie: Polarisation

In Materie können durch das Feld \vec{D} elektrische Dipole entstehen oder vorhandene, aber zufällig gerichtete Dipole sich parallel ausrichten (Polarisation).

Dadurch entsteht ein (schwaches) gegengerichtetes Feld, das den Einfluss von \vec{E} auf eine Probeladung verringert.

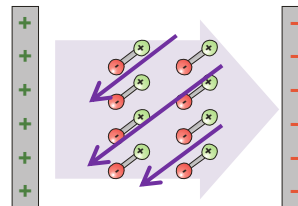


Dieser Effekt lässt sich mit der relativen Dielektrizitätszahl ϵ_r beschreiben ($\epsilon_r > 1$):

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{D} \quad \rightarrow \quad |\vec{E}_{Materie}| < |\vec{E}_{Vakuum}|$$

In anisotropen (richtungsabhängigen) Materialien kann die Polarisation auch nicht-parallel zu D erfolgen (z.B. Folge eines Kristallgitters). In diesem Fall wird aus ϵ_r eine Matrix.

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \epsilon_0 \vec{E}$$



0.6 Kondensator

Der Kondensator besteht aus zwei elektrisch leitenden Flächen A , den Elektroden, in meist geringem Abstand d . Dazwischen befindet sich ein Bereich mit isolierender Eigenschaft, ein **Dielektrikum**. Durch eine Spannung U können auf den Elektroden Ladungen gespeichert werden; es bauen sich \vec{D} - und \vec{E} -Felder auf.

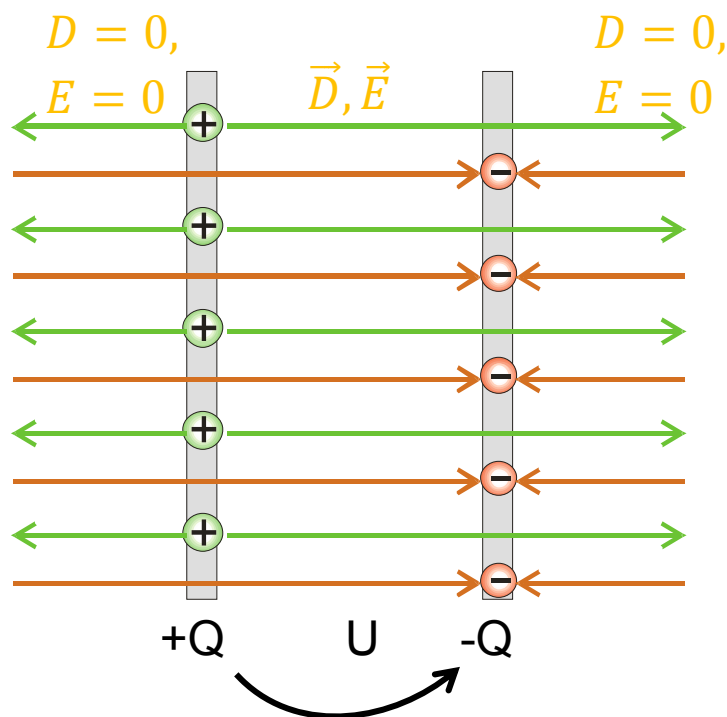
Durch die Anordnung ist der überwiegende Teil des Feldes im Dielektrikum zu finden, während das Feld außerhalb des Kondensators praktisch verschwindet.

Der elektrische Fluss ist gleich der Ladung Q auf einer der Elektroden, daher

$$D = \frac{Q}{A} = \varepsilon \cdot E = \varepsilon \cdot \frac{U}{d} \Rightarrow$$

$$\frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} =: C \quad [C] = As/V = F$$

Die Kapazität C vereint Material- und Formeigenschaften. Sie ist umso größer, je mehr Ladungen auf den Elektroden gespeichert sind und je weniger Spannung dazu notwendig ist.





1 Zeitlich veränderliche Felder

1.1 Freie Ladungen im elektrischen Feld

Auf eine Ladung im elektrischen Feld wirkt eine Kraft. Ist die Ladung frei beweglich, wird sie durch die Kraft **beschleunigt**. In einem homogenen Feld E beträgt die Geschwindigkeit der anfangs ruhenden Ladung q mit Masse m nach der Wegstrecke $s = \frac{1}{2} \cdot at^2$:

$$v = at = \frac{qE}{m} \cdot t = \sqrt{\frac{2s \cdot qE}{m}}$$

1.2 Strom und Stromdichte

Wir denken uns eine beliebige Fläche A . In einer bestimmten Zeit dt tritt durch die Fläche die Ladungsmenge dQ . Für $dt \rightarrow 0$ ist das Verhältnis

$$I := \frac{dQ}{dt}$$

der **Strom** I durch die Fläche. Zerlegt man die Fläche in sehr kleine Teile $dA \rightarrow 0$, dann fließt jeweils nur ein Bruchteil dI des Stromes hindurch. Das Verhältnis

$$\vec{j} := \frac{dI}{d\vec{A}} = \frac{dI}{dA} \cdot \vec{e}_A \quad [j] = A/m^2$$

nennt man **Stromdichte** j . Die Richtung von \vec{j} entspricht der des Flächenelementes $d\vec{A}$.

Als **Ladungsdichte** bezeichnet man

$$\rho := dQ/dV \quad [\rho] = As/m^3$$

wobei dQ die Ladung im Volumenelement dV ist. Hat eine Ladung die Geschwindigkeit \vec{v} , dann legt sie in der Zeit dt die Strecke $d\vec{s}$ zurück. Mit $dV = d\vec{s} \cdot d\vec{A}$ wird aus

$$\rho \cdot \vec{v} = \frac{dQ}{dV} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dQ}{d\vec{A}} = \vec{j},$$

eine **bewegte Ladungsdichte** entspricht also einer **Stromdichte**.

1.3 Strom im Leiter

In einem Leiter treten frei bewegliche Ladungen (meist Elektronen) auf, die von einem E-Feld beschleunigt werden. Es kommt allerdings immer wieder zu Zusammenstößen, z.B. an Unregelmäßigkeiten im Atomgitter. Dabei verlieren die Ladungen ihre kinetische Energie als Wärme ans Gitter. Es stellt sich ein Gleichgewicht ein mit einer **mittleren Geschwindigkeit** der Ladungen, die **proportional** zum E-Feld ist. Wie groß die mittlere Ladungsträgergeschwindigkeit ist, hängt vom Material des Leiters ab (nicht von den Abmessungen):

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = \kappa \cdot \vec{E} \quad [\kappa] = A/Vm = 1/\Omega m = S/m$$

Die Materialkonstante κ beschreibt die Beweglichkeit der Ladungen.

Legt man an einen Leiter mit Querschnittsfläche A und Länge l die Spannung U an, so entsteht im Inneren das Feld $E = U/l$, und es fließt ein Strom

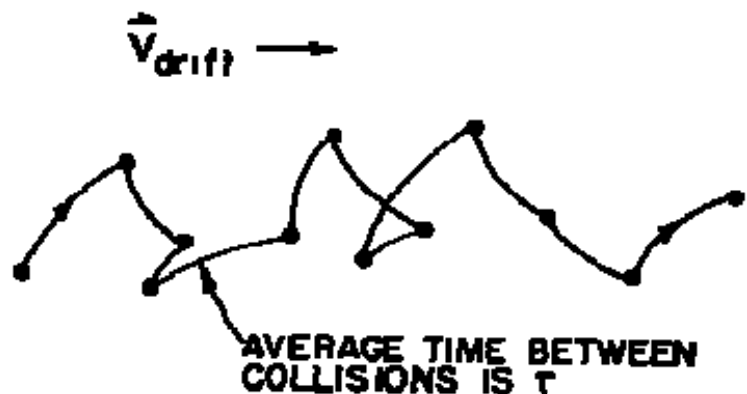
$$I = j \cdot A = \kappa E \cdot A = \kappa \cdot \frac{A}{l} \cdot U = G \cdot U = \frac{1}{R} \cdot U \quad (\text{Ohmsches Gesetz})$$

wobei der Leitwert $G = \kappa \cdot A/l$ bzw. der Widerstand $R = \frac{1}{\kappa} \cdot l/A$ eingeführt wurde.

Ändert sich das elektrische Feld E , dann stellt sich quasi verzögerungsfrei die neue Stromdichte ein, denn im Zusammenhang zwischen j und E tritt keine Zeitableitung auf. Dasselbe gilt für Strom und Spannung beim Leiter, d.h. das Ohmsche Gesetz gilt hier auch für die zeitabhängigen Augenblicksgrößen $i(t)$ und $u(t)$:

$$i(t) = G \cdot u(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Bild: Bewegung eines Elektrons im Leiter: nach kurzer Zeit der Beschleunigung im elektrischen Feld erfolgt ein Stoß (schwarze Knödel)



1.4 Strom im Kondensator

Verändert man die Spannung, die an den Platten eines Kondensators anliegt, dann ändert sich die Ladungsmenge auf den Platten. Damit verbunden ist ein externer Strom I_{ex} durch die Zuleitungen.

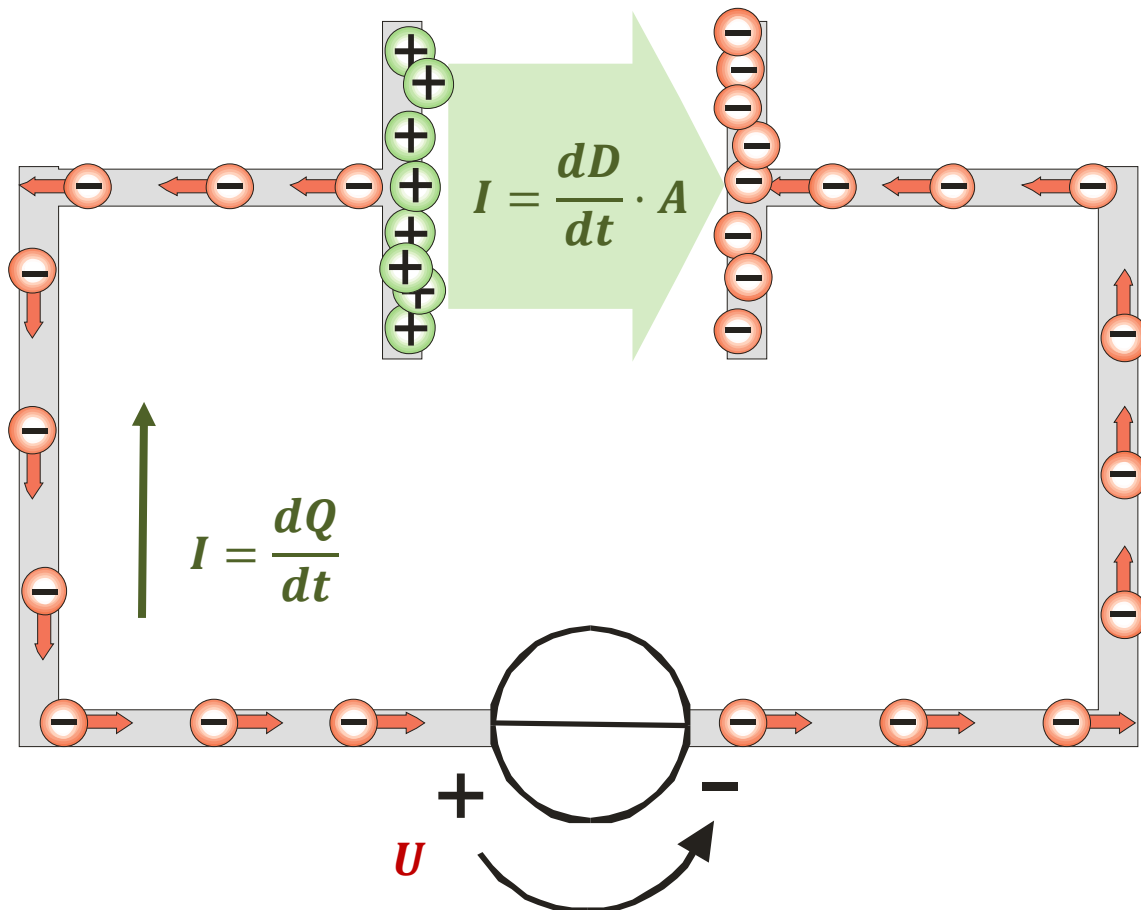
Durch das Dielektrikum zwischen den Platten fließen keine Ladungen, aber es ändert sich das elektrische Feld (E bzw. D). Da I ein geschlossener Kreis ohne Unterbrechung ist, kann man auch für das Dielektrikum einen Strom I_{dis} definieren:

$$I_{ex} = \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{A}{A} = \frac{d(Q/A)}{dt} \cdot A = \frac{dD}{dt} \cdot A = \frac{d\Psi}{dt} =: I_{dis}$$

Die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte erzeugt demnach eine Stromdichte, die Verschiebungsstromdichte \vec{J}_{dis} und damit den **Verschiebungsstrom** I_{dis} (displacement = Verschiebung):

$$\vec{J}_{dis} = \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad I_{dis} = \iint_A \vec{J}_{dis} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Psi}{dt}$$

Der Verschiebungsstrom ist nicht nur ein gedankliches Konstrukt, sondern hat wie ein Teilchenstrom ein messbares Magnetfeld zur Folge.

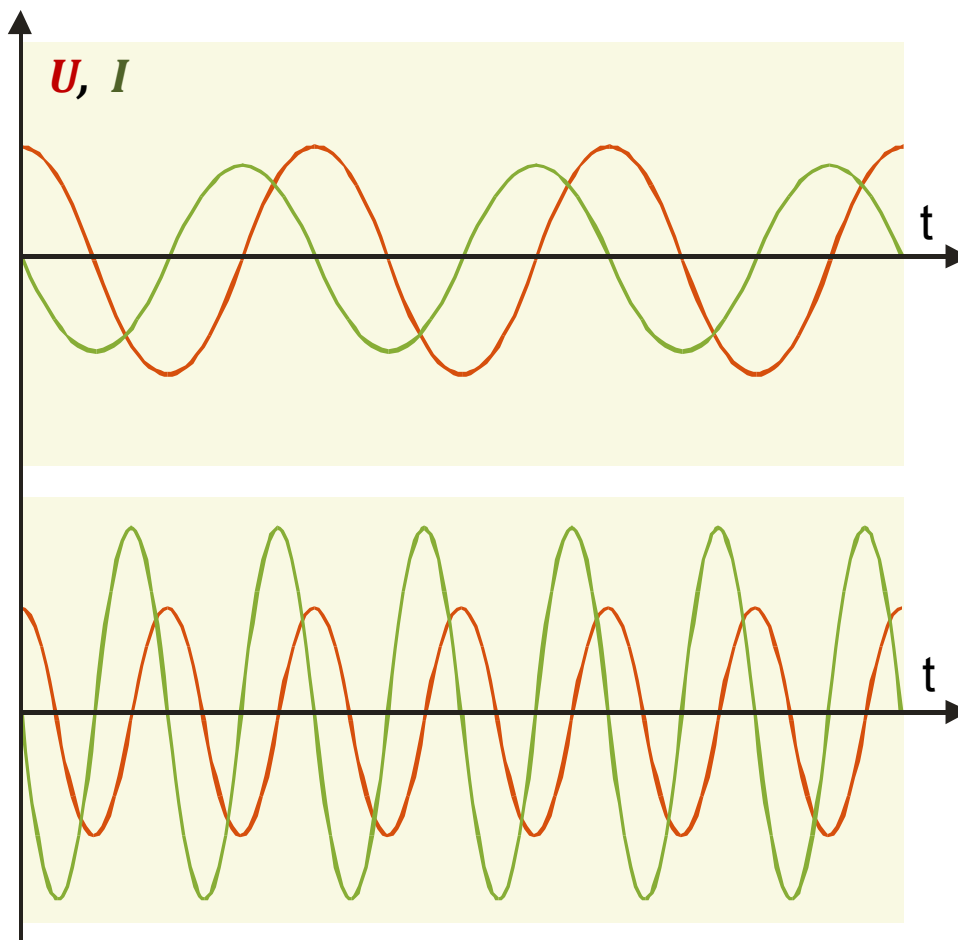


Beispiel: Wir legen eine sinusförmige Spannung an den Kondensator an und berechnen den Strom durch den Kondensator (Idealisierung: Der Widerstand der Zuleitungen ist vernachlässigbar)

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$



Zwei Dinge fallen auf:

- Der Verschiebungsstrom hängt von der Frequenz ab
- Spannung und Strom sind „außer Takt“

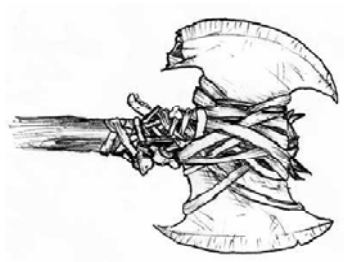
Bei der Zeitableitung sind wir davon ausgegangen, dass C konstant ist. Tatsächlich kann sich ϵ mit der Frequenz, der Stärke des D-Feldes oder eines Magnetfeldes ändern.

2 Das Magnetische Feld

2.1 Magnete und magnetische Felder

Bekannte magnetische Eigenschaften:

- Magnete ziehen bestimmte Metalle an (z.B. Eisen, Kobalt, Nickel)
- Magnete haben immer zwei Pole \Rightarrow magnetische Pole treten nie einzeln auf, nur paarweise
- Kompassnadel richtet sich im Erdmagnetfeld (grob) in Nord-Süd-Richtung aus
- Pol der zum geografischen Nordpol zeigt heißt NORDPOL, Pol der zum geografischen Südpol zeigt heißt SÜDPOL



Magnete erzeugen ein Kraftfeld, sind also von Feldlinien umgeben, die mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht werden können

Definitionsgemäß zeigen die Feldlinien (außerhalb des Magneten) vom Nordpol zum Südpol, im Inneren müssen sich die Feldlinien fortsetzen und schließen.

Jeder stromdurchflossene Leiter ist von einem ringförmigen Magnetfeld umgeben, Magnetfeldlinien sind also immer geschlossen, haben keinen Anfang und kein Ende. Das deckt sich mit der Beobachtung, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

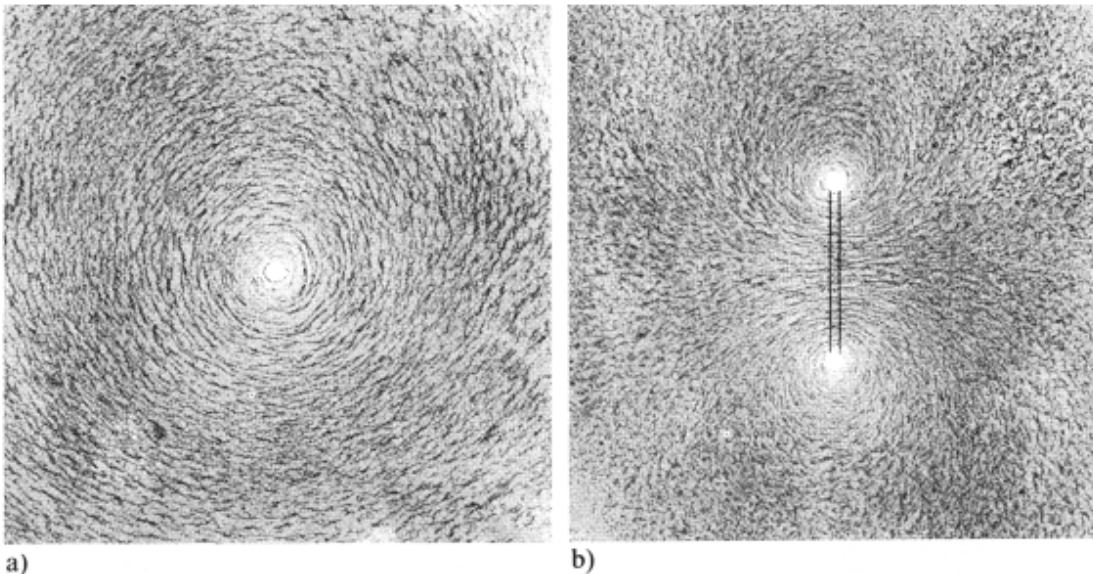


Bild 4.1 Mit Hilfe von Eisenfeilspänen dargestelltes magnetisches Feld eines stromdurchflossenen geraden Leiters (a) und einer stromdurchflossenen Windung (b)

Die Richtung des Feldes folgt der Rechten-Hand-Regel (s. Bild)



Wenn der abgespreizte Daumen der rechten Hand in die technische Stromrichtung zeigt, so gibt die Richtung der anderen Finger die Richtung des Magnetfeldes an.



2.2 Magnetische Flussdichte B

Magnetfelder üben Kräfte auf bewegte Ladungen aus (**Lorentz-Kraft**). Auf dieser Basis kann man analog zum elektrischen Feld E ein magnetisches Feld B definieren. Dessen Feldlinien werden in Versuchen mit Eisenfeilspänen visualisiert. Die Feldlinien zeigen dann aber nicht parallel zur Kraft, sondern senkrecht dazu. Das liegt daran, dass in die Kraft auch die Geschwindigkeit v eingeht, mit der sich die Ladung Q quer zum Magnetfeld bewegt. Insgesamt ergibt sich der Zusammenhang

$$F \sim Q \cdot v \cdot \text{Magnetfeld} \cdot \sin \alpha$$

und \vec{F} steht sowohl senkrecht auf \vec{v} als auch auf dem Magnetfeld. Wir definieren die magnetische Flussdichte \vec{B} so, dass aus der Proportionalität eine Gleichung wird, und schreiben mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad [B] = Vs/m^2 = T$$

Ähnlich wie beim elektrischen Feld \vec{E} beschreibt \vec{B} die **Wirkung** des Feldes. Die magnetische Flussdichte ist wie \vec{E} abhängig vom Material, in dem sich die Feldlinien befinden. Das steht im Gegensatz zur elektrischen Flussdichte \vec{D} , die materialunabhängig die Ursache des elektrischen Feldes beschreibt.

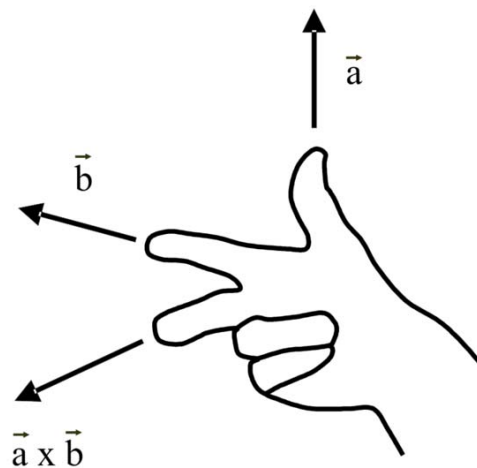
2.2.1 Einschub: Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ergibt wieder einen Vektor, der senkrecht zu \vec{a} und zu \vec{b} steht. Die Länge ist gleich der Fläche des Parallelogramms, das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. Diese Fläche wird maximal, wenn \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander stehen und wird 0, wenn \vec{a} parallel zu \vec{b} ist (umgekehrt wie beim Skalarprodukt).

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Drei-Finger-Regel beim Kreuzprodukt.

(Aus de.wikipedia.org)



2.3 Magnetischer Fluss

Aus der Flussdichte \vec{B} kann man auch einen **Fluss** berechnen: Wenn \vec{B} die Fläche A durchsetzt, dann ist

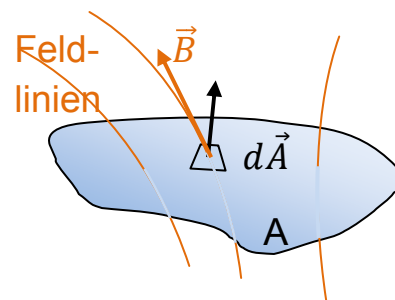
$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [\Phi] = Vs = Wb$$

der magnetische Fluss durch A. Mit \vec{B} ist auch Φ materialabhängig, anders als der elektrische Fluss.

Nur wenn B homogen ist und A senkrecht dazu steht, gilt:

$$\Phi = B \cdot A$$

Bild: Magnetischer Fluss Φ durch eine Fläche A



Beobachtung: Magnetfeldlinien sind immer geschlossen. Wenn A eine geschlossene Oberfläche ist, dann treten aus A genauso viele Feldlinien aus, wie an anderer Stelle von A eintreten. Also muss auch der magnetische Fluss, der irgendwo in A eintritt auch wieder irgendwo aus A vollständig austreten:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

2.4 Magnetisches Feld

Nachdem es eine mit \vec{E} verwandte Magnetfeldgröße gibt, vermutet man eine zweite Feldgröße, die wie die elektrische Flussdichte \vec{D} eher die **Ursache** des Magnetfeldes beschreibt.

Am einfachsten erzeugt man ein magnetisches Feld mit einem stromdurchflossenen Leiter. Wie aus den Feldlinienbildern ersichtlich, bildet das magnetische Feld konzentrische Kreise um den Leiter herum. Das erzeugte \vec{B} -Feld ist

$$\vec{B} = \mu \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

[\vec{e}_φ ist der Einheitsvektor, der immer senkrecht zum jeweiligen Ortsvektor \vec{r} steht.] Die Materialabhängigkeit

von \vec{B} spiegelt sich in der „Permeabilität“ („Durchlässigkeit“) μ wieder, ansonsten tauchen nur der erzeugende Strom und der Abstand zum Leiter auf. Im Vakuum nimmt μ den Wert

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs/Am} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{Vs/Am}$$

an. Es liegt nahe, die gesuchte Feldgröße \vec{H} zu definieren:

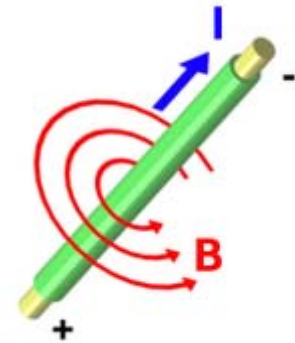
$$\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu} \quad [H] = \text{A/m}$$

Das Wegintegral von \vec{H} über einen geschlossenen Weg, z.B. einen Kreis mit Radius r , um den geraden Leiter herum ist

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = I,$$

weil \vec{H} überall auf dem Kreis gleich groß und parallel zum Wegelement $d\vec{s}$ ist.

Das Umlaufintegral entlang einer geschlossenen Magnetfeldlinie ergibt also den eingeschlossenen Strom, die Ursache des Magnetfeldes. I muss nicht unbedingt von bewegten Ladungen herrühren, sondern kann auch der Verschiebungsstrom $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dD}{dt} \cdot A$ durch einen Kondensator sein.



Quelle: www.computerbase.de

2.5 Durchflutungssatz

Bisher sind wir von geraden stromführenden Leitern ausgegangen. Wie sehen Magnetfelder für beliebig geformte Leiter aus? Bevor wir diese Frage mit dem Biot-Savart'schen Gesetz klären, untersuchen wir, wie sich das Wegintegral von \vec{H} , das wir im letzten Abschnitt für den geraden Leiter bestimmt haben, im Allgemeinen verhält. Dazu definieren wir die **magnetische Spannung** analog zur elektrischen als

$$V_{ab} := \int_b^a \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad [V] = A$$

Beobachtung: Ist der Integrationsweg eine geschlossene Kurve, dann ist die magnetische Spannung längs dieser Kurve **immer** gleich der Summe der eingeschlossenen Ströme. Diese bezeichnet man als Durchflutung Θ .

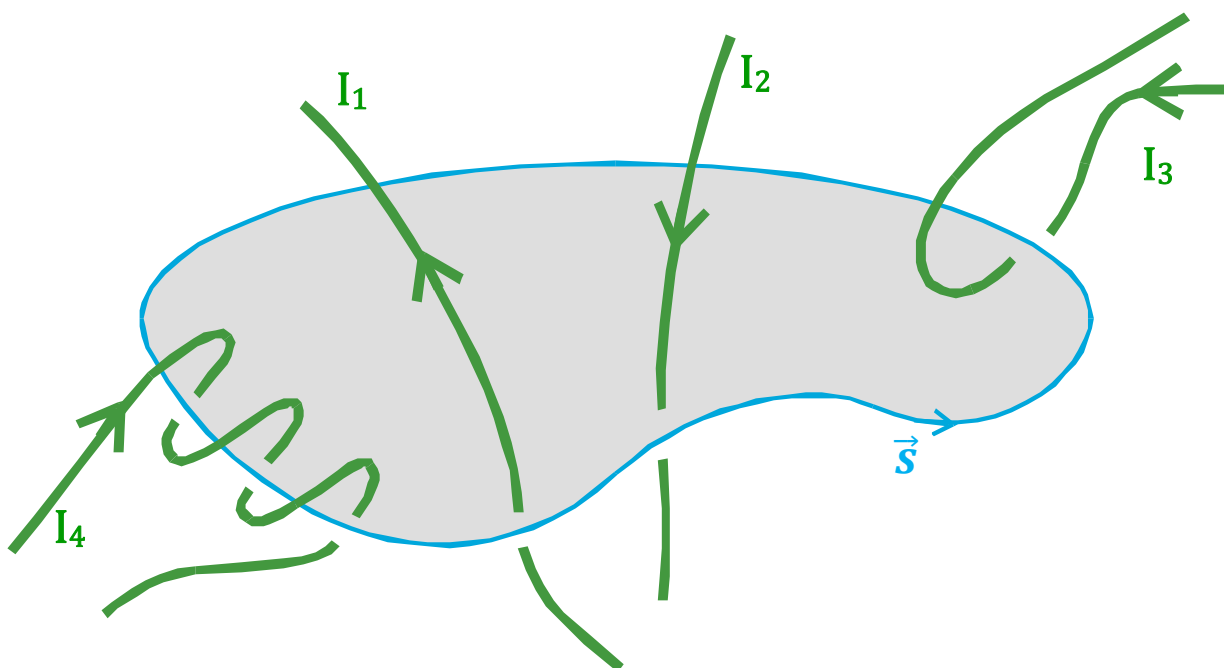
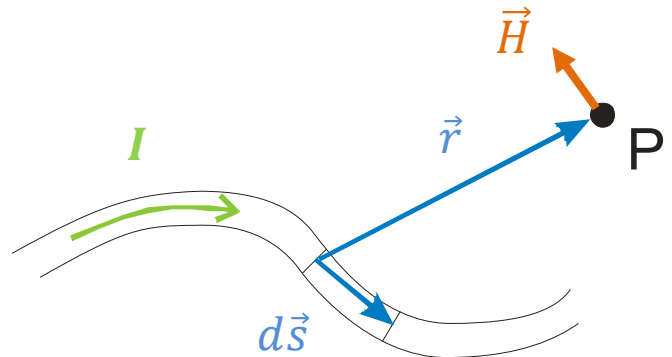


Bild: Das Wegintegral von \vec{H} entlang der blauen Kurve ist gleich der Summe der eingeschlossenen Ströme. Zählrichtung der Ströme gemäß Rechter-Hand-Regel, hier positiv nach oben: nur I_1 ; nach unten I_2 und I_3 . I_4 führt innerhalb der Fläche gleich dreimal von oben nach unten und zählt deshalb auch dreifach negativ. Insgesamt ist $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I = I_1 - I_2 - I_3 - 3 \cdot I_4 = \Theta$.

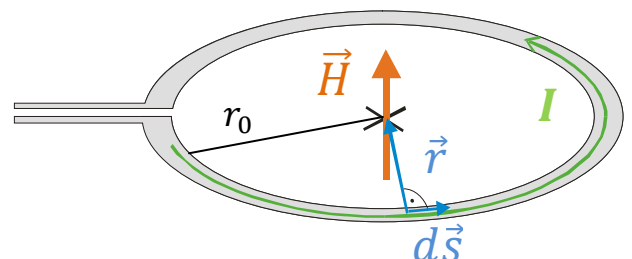
2.6 Biot-Savart'sches Gesetz

Ein beliebig geformter Leiter führt den Strom I , alternativ kann auch ein Verschiebungsstrom durch einen Kondensator „fließen“. Gesucht ist das Magnetfeld im Punkt P . Dazu denkt man sich den Leiter in kleine Stückchen $d\vec{s}$ zerlegt, in denen jeweils derselbe Strom I fließt. In jedem Wegstückchen wird ein kleiner Magnetfeldanteil $d\vec{H}$ erzeugt nach dem Gesetz von Biot und Savart:

$$d\vec{H} = \frac{I \cdot d\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^2 \cdot r}$$



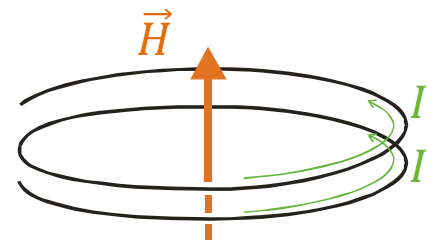
Bisher kennen wir nur die Verteilung des \vec{H} -Feldes eines geraden Leiters. Wir bestimmen nun das Magnetfeld im Mittelpunkt eines **kreisförmigen** Stroms (bzw. einer Leiterschleife) mit Radius r_0 . Der Integrationsweg ist der Kreisumfang, der Vektor \vec{r} zeigt vom jeweiligen Punkt auf dem Umfang zum Mittelpunkt. $d\vec{s}$ und \vec{r} sind deshalb überall orthogonal und das \vec{H} -Feld zeigt senkrecht zum Kreis:



$$H = \oint_{r_0} \frac{I}{4\pi r^2} \cdot ds = \frac{I}{4\pi r_0^2} \cdot 2\pi r_0 = \frac{I}{2r_0}$$

Und wie sieht es bei vielen Windungen aus? Wenn N Windungen eng übereinander liegen, dann besteht kein Unterschied zu einer einzelnen Schleife mit dem **N-fachen Strom**, also:

$$H = \frac{N \cdot I}{2r_0}$$



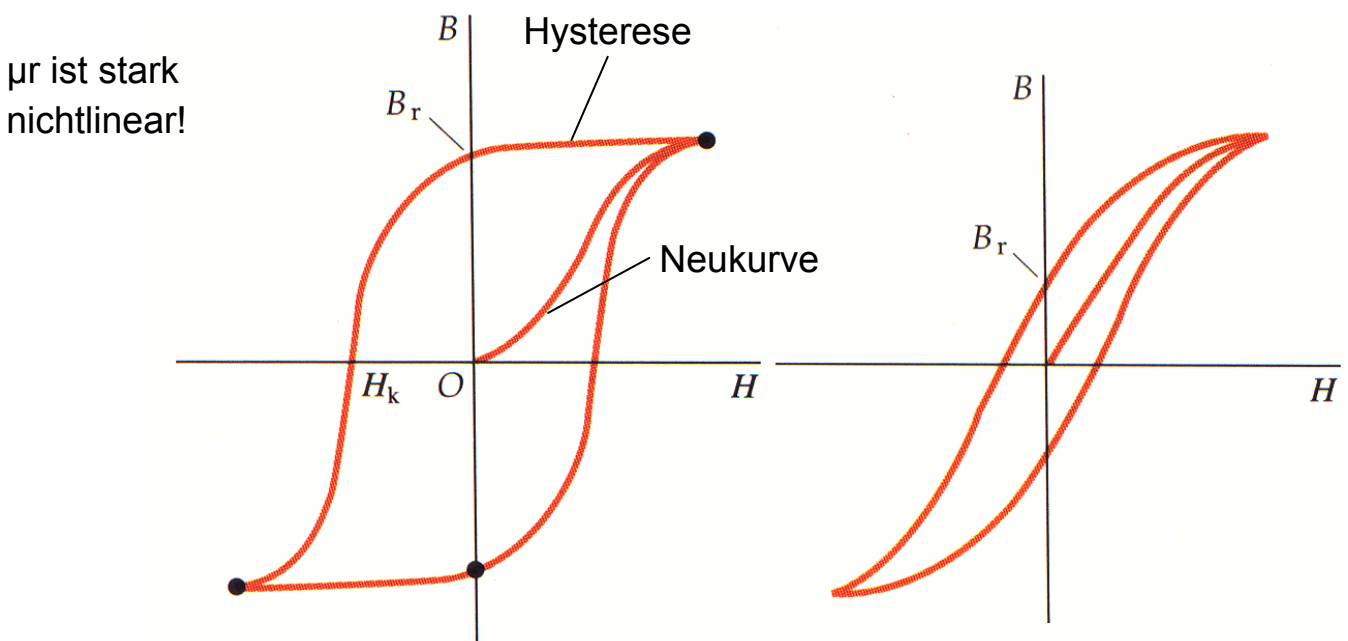
2.7 Magnetfeld in Materie

2.7.1 Ferromagnetismus

Viele Materialien besitzen ein atomares magnetisches Dipolmoment. In einem äußeren Magnetfeld versuchen sie, sich entsprechend **auszurichten**. Durch Wärmebewegung gelingt dies aber nicht sehr gut, der Effekt ist meist gering (vgl. Polarisation im elektrischen Feld). Bei ferromagnetischen Stoffen (Eisen, Kobalt, Nickel, einige Legierungen) gibt es aber eine **Kopplung** zwischen den atomaren Dipolen, die sich spontan parallel ausrichten und einen Elementarmagneten bilden. Die Ausrichtung ist wegen immer vorhandener Fehler im Kristallgitter auf kleine Bereiche begrenzt, die „**Weißschen Bezirke**“. So wie atomare Dipole richten sich Weißsche Bezirke im äußeren Magnetfeld aus, der Effekt ist allerdings viel stärker (μ_r bis 180000). Entfernt man das Magnetfeld wieder, können viele der Weißschen Bezirke ausgerichtet bleiben, denn wegen ihrer Größe und damit Trägheit wird die Ordnung durch Wärmebewegung nicht so leicht gestört wie bei atomaren Dipolen.

Bild zeigt den Effekt (Flussdichte B im Material) durch ein äußeres H -Feld:

- Anstieg von B mit H ; Sättigung wenn alle Weißschen Bezirke ausgerichtet sind
- H wieder auf 0: Stoff bleibt magnetisiert mit B_r (Remanenz)
- H negativ: Stoff ist bei H_k (Koerzitiv-)Feldstärke) entmagnetisiert ($B=0$)
- B folgt wieder H bis Sättigung
- Kurve (Hysterese) wiederholt sich
- Fläche der Hysterese: Energie, die zum Umpolen notwendig ist, sollte für Generatoren, Motoren und Trafos klein sein (Wärmeverluste)



2.7.2 Magnetfeld an Grenzflächen

Was passiert am Übergang zwischen verschiedenen Materialien bzw. bei einer Änderung des Querschnitts?

Der magnetische Fluss beim Übergang in ein anderes Material oder einen anderen Querschnitt (siehe Bild) bleibt erhalten wegen

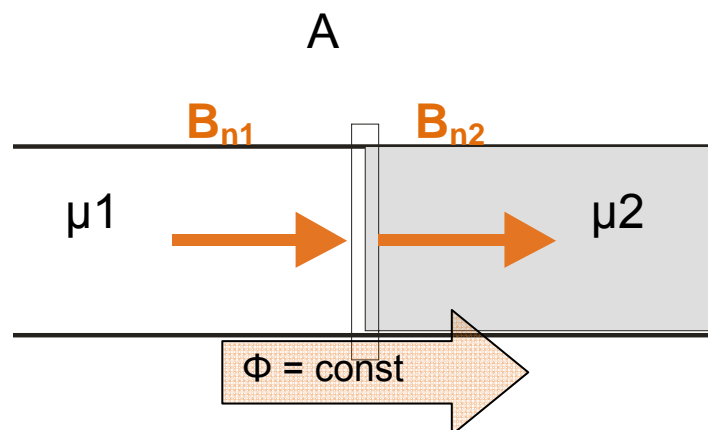
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \text{ also } \Phi_1 = \Phi_2.$$

Wir bezeichnen den Anteil von \vec{B} , der senkrecht auf die Übergangsfläche trifft, mit B_n (Normalkomponente). Dann gilt

$$B_{n1} \cdot A_1 = B_{n2} \cdot A_2 ,$$

$$\mu_1 \cdot H_{n1} \cdot A_1 = \mu_2 \cdot H_{n2} \cdot A_2$$

Falls sich nur das Material, nicht aber der Querschnitt ändert, bleibt B_n erhalten, während H_n einen Sprung machen muss. Das ist bemerkenswert, denn H wurde als materialunabhängig eingeführt! Materialunabhängigkeit ist offenbar relativ.



Man kann zeigen: Materialien mit hohem μ_r (magnetische Leiter) **bündeln** Feldlinien, so dass sie praktisch nur innerhalb des Leiters verlaufen und dort ein **homogenes** Feld (überall gleich über den Querschnitt) erzeugen.

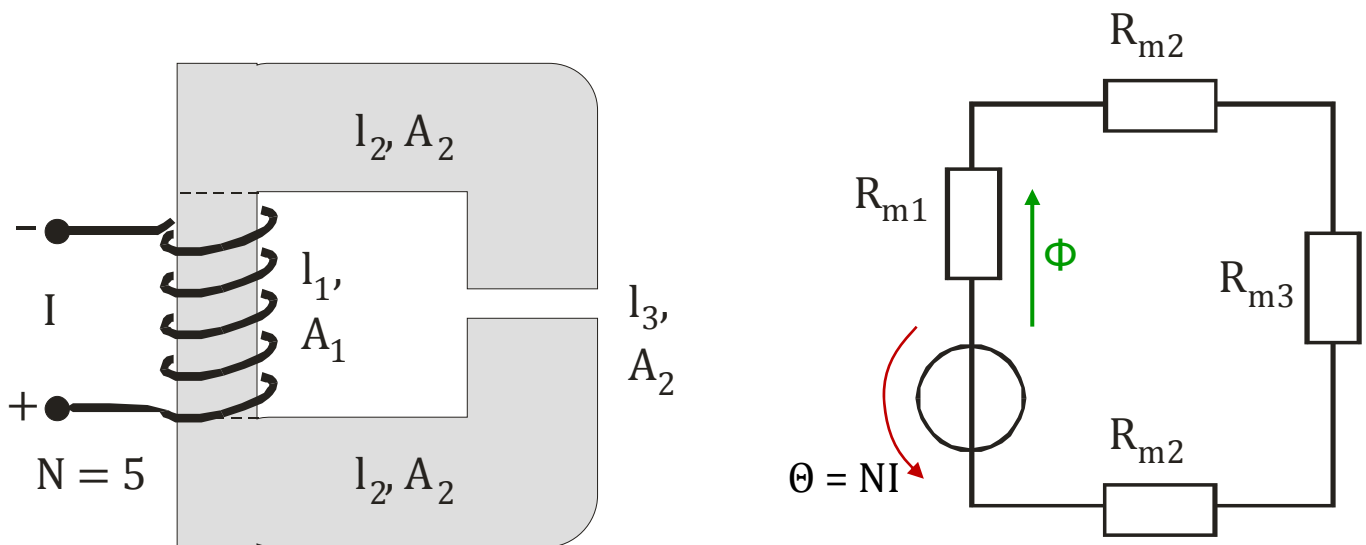
2.8 Magnetischer Kreis

Der magnetische Fluss ist immer geschlossen, so wie ein elektrischer Strom. Eine magnetische Spannung kennen wir auch. Wir wollen die Analogie systematisch betreiben:

	Elektrischer Kreis	Magnetischer Kreis
Schaltung		
Ursache	elektrische Spannung U_q	magnetische Spannung $\Theta = \oint \vec{H} d\vec{s} = NI$
Wirkung	elektrischer Strom $I = \frac{U_q}{R_{e,ges}}$	magnetischer Fluss $\Phi = \frac{\Theta}{R_{m,ges}}$
Ohmsches Gesetz	$U = R_e I$ $[U] = V$	$V_m = R_m \Phi$ $[V_m] = A$
Widerstand	$R_e = \frac{l}{\kappa A}$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$
Einheit	$[R_e] = \frac{1}{S}$	$[R_m] = \frac{1}{H}$
Material-eigenschaft	κ $[\kappa] = \frac{S}{m}$	$\mu = \mu_r \mu_0$ $[\mu] = \frac{H}{m}$
Knoten-gleichung	$\sum_n I_n = 0$	$\sum_n \Phi_n = 0$
Maschen-gleichung	$\sum_n U_n - U_q = 0$	$\sum_n V_{m,n} - \Theta = 0$

In Analogie zum elektrischen Leiter wird $G_m := \mu \frac{A}{l}$, $[G_m] = \frac{Vs}{A} = \Omega s$ als **magnetischer Leitwert** bezeichnet. Dank dieser Analogie kann man komplizierte Anordnungen von Spulen, Trafos, etc. mit den Methoden der Netzwerktheorie bestimmen.

Beispiel:



Angaben: $I = 1 \text{ A}$, $l_1 = 10 \text{ cm}$, $l_2 = 20 \text{ cm}$, $A_1 = 5 \text{ cm}^2$, $A_2 = 15 \text{ cm}^2$, $\mu = 1000 \cdot \mu_0$

Gesucht: Wie groß darf der Luftspalt l_3 sein, damit darin $B = 1 \text{ T}$ herrscht?

Ansatz: erst Φ , dann aus Ohmschem Gesetz R_{m3} bestimmen, dann l_3 .

$$\Phi = B_3 \cdot A_2 =$$

$$R_{(m_gesamt)} = \Theta / \Phi =$$

$$R_{m1} = l_1 / (\mu A_1) = \quad , \quad R_{m2} = l_2 / (\mu A_2) =$$

$$R_{m3} = R_{m_gesamt} - R_{m1} - 2 \cdot R_{m2} =$$

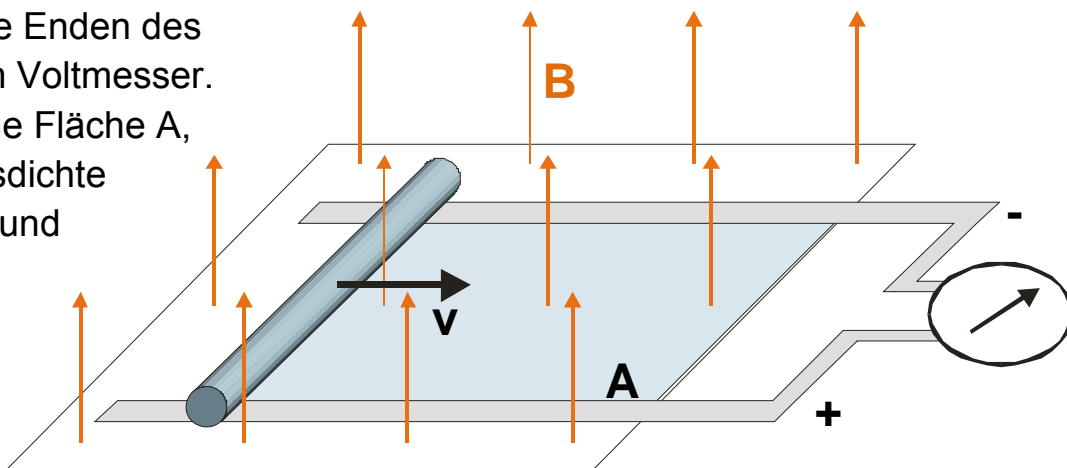
$$l_3 = R_{m3} \cdot A_2 / l_2$$

2.9 Induktion

2.9.1 Bewegungsinduktion

Beobachtung: Zwischen den Enden eines Leiters, der quer durch ein Magnetfeld bewegt wird, baut sich eine Spannung auf. Diese Erscheinung lässt sich mit der Lorentz-Kraft erklären.

Wir verbinden die Enden des Leiters mit einem Voltmeter. Dabei entsteht die Fläche A, die von der Flussdichte B durchsetzt ist, und sich ständig verkleinert, weil der Leiter sich mit v bewegt. Die Lorentz-Kraft



auf die Ladungen q im Leiter ist $F = q \cdot v \cdot B$, was den gleichen Effekt hat wie ein elektrisches Feld $E = v \cdot B$, das die Ladungen an die Enden des Leiters zieht. Die induzierte Spannung U_i zwischen den Enden des Leiters ist das Wegintegral von E über die Länge l des Leiters: $U_i = \int_0^l E \cdot ds = \int_0^l vB \cdot ds = vB \cdot l$

Interessehalber bestimmen wir die Änderung des magnetischen Flusses durch A (man beachte: A wird kleiner, also ist $dA = -l \cdot ds = -lv \cdot dt < 0$):

$d\Phi = B \cdot dA = B \cdot (-l \cdot v \cdot dt)$; wir vergleichen mit der Spannung und finden:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -U_i$$

2.9.2 Feldinduktion

Beobachtung: Ändert man die Stärke des Magnetfelds, das eine Leiterschleife durchsetzt, entsteht auch eine Spannung U_i .

Wir vermuten, dass auch in diesem Fall die Änderung des Flusses die Spannung bewirkt.

Beobachtung: Die induzierte Spannung U_i in einer Spule mit N Windungen ist N -mal so groß wie bei einer einzelnen Windung.

Wir fassen das **Induktionsgesetz** zusammen:

$$-U_i = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \frac{d(B \cdot A)}{dt} = N \cdot \frac{dB}{dt} \cdot A + N \cdot B \cdot \frac{dA}{dt}$$

In Worten: Die induzierte Spannung ist N -mal die Änderung des magnetischen Flusses, der den Querschnitt der Spule durchsetzt. Eine positive Flussänderung kann durch Zuwachs von Feldlinien oder durch Vergrößern der Fläche zustande kommen.

2.9.3 Zählpfeile und Werte bei der Induktion

Die Induktionsspannung muss ein in sich geschlossenes \vec{E} -Feld als Ursache haben, denn $U_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (zur Erinnerung: In der Elektrostatik galt $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dort gab es aber kein \vec{B} -Feld). Wir sehen uns die Richtungen der Zählpfeile an: Der Flächennormalenvektor \vec{A} wird beliebig vorgegeben, dann ist der Umlaufsinn des Weges s festgelegt (Rechtsschraube). Eine Flussänderung $d\Phi$ zählt positiv, wenn dadurch **mehr** \vec{B} -Feldlinien durch die Fläche in **gleicher** Orientierung wie \vec{A} hindurchtreten. Der Spannungs-**Zählpfeil** geht definitionsgemäß entlang s . Der Strom-Zählpfeil zeigt ebenfalls entlang s .

Tatsächlich führt eine positive Flussänderung zu einem elektrischen Feld, das dem Weg s überall entgegen gerichtet ist. Der Spannungswert ist daher negativ. Das Feld bewegt positive Ladungen ebenfalls entgegen s . Lässt man keinen Strom zu, sammeln sich die Ladungen an den Enden (bestätigt, dass Spannung negativ ist). Lässt man einen Strom zu, ist also auch sein **Wert** kleiner 0.

Ein positiver Strom würde wieder ein Magnetfeld und damit einen Fluss erzeugen, der (positiv) in Richtung \vec{A} zeigt.

2.9.4 Offene Leiterschleife

Was passiert im Inneren einer offenen Leiterschleife? Die Flussänderung $d\Phi/dt$ bewirkt zunächst ein elektrisches Feld entlang des Leiters. Die beweglichen Ladungen im Leiter wandern sofort zu den offenen Enden, wo sie sich sammeln. Dadurch entsteht zwischen den Leiterenden ein entgegen gerichtetes elektrisches Feld, so dass der Leiter feldfrei wird (sonst würden weitere Ladungen fließen). Das induzierte \vec{E} -Feld befindet sich nun außerhalb des Leiters zwischen den Endpunkten und führt zur messbaren Induktionsspannung.

2.9.5 Geschlossene Leiterschleife

Schließt man die Endpunkte der Leiterschleife, dann fließt ein Strom I_i . Ist der Leiter ideal, dann liegt an keinem Punkt der Schleife mehr Spannung an. Das hat weitreichende Folgen, denn das Induktionsgesetz gilt weiterhin! Der induzierte Strom erzeugt ein eigenes Magnetfeld (Fluss Φ_i), dessen Änderung die ursprüngliche Flussänderung vollständig kompensiert (Lenzsche Regel):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -N \cdot \left(\frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Phi_i}{dt} \right) = 0$$

Wir benutzen das Ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises

$$N \cdot I_i = \Phi_i \cdot R_m$$

was uns dann nützt, wenn wir den magnetischen Widerstand der Leiterschleife bzw. Spule kennen. Zusammen ergibt sich die Bedingung für I_i :

$$I_i = -(\Phi - \Phi_0) \cdot R_m / N, \quad \Phi_0: \text{Fluss zu Beginn des Vorgangs}$$

Beispiel Bewegungsinduktion: Der Fluss Φ durch eine Leiterschleife verändert sich linear mit der Zeit ($B = \text{const}$, $A = l \cdot (b - v \cdot t)$: Fläche wird kleiner).

Also ist $\Phi(t) = B \cdot A(t) = Bl(b - vt) = \Phi_0 - Blv \cdot t$.

Dann ist $U_i = -d\Phi/dt = +Blv$ **konstant**. Wird die Leiterschleife kurzgeschlossen, fließt ein Strom

$$I_i = -(\Phi(t) - \Phi_0) \cdot R_m / N = Blv \cdot t \cdot R_m / N$$

der mit der Zeit ansteigt, obwohl die Induktionsspannung der offenen Schleife konstant ist!

2.10 Selbstinduktion und Induktivität

In einer Spule fließe ein Strom $i(t)$. Dieser Strom bewirkt einen magnetischen Fluss $\Phi(t)$, der sich mit der Zeit genauso wie i ändert. Dadurch wird an den Enden der Spule die Spannung $u_i(t)$ induziert

$$u_i(t) = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{i(t) \cdot N}{R_m} \right) = -\frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt}$$

Der „Schönheit halber“ führen wir die Spannung $u_L = -u_i$ ein, die an der Spule als passivem Bauelement denselben Zählpfeil erhält wie der Strom durch die Spule. Dann schreiben wir

$$u_L(t) = \frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

wobei wir die **Induktivität** $L = N^2/R_m$ eingeführt haben.

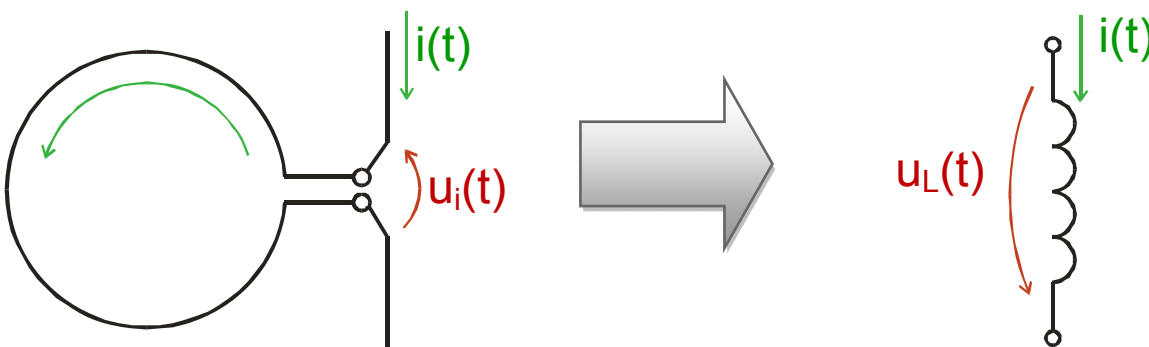


Bild: Zählrichtung von Spannungen und Strömen

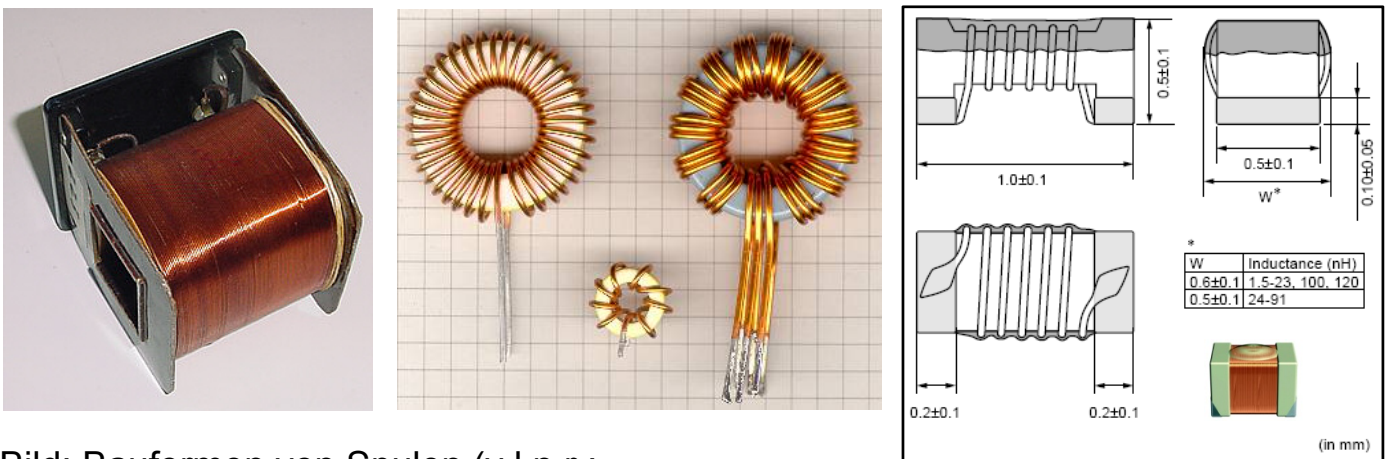


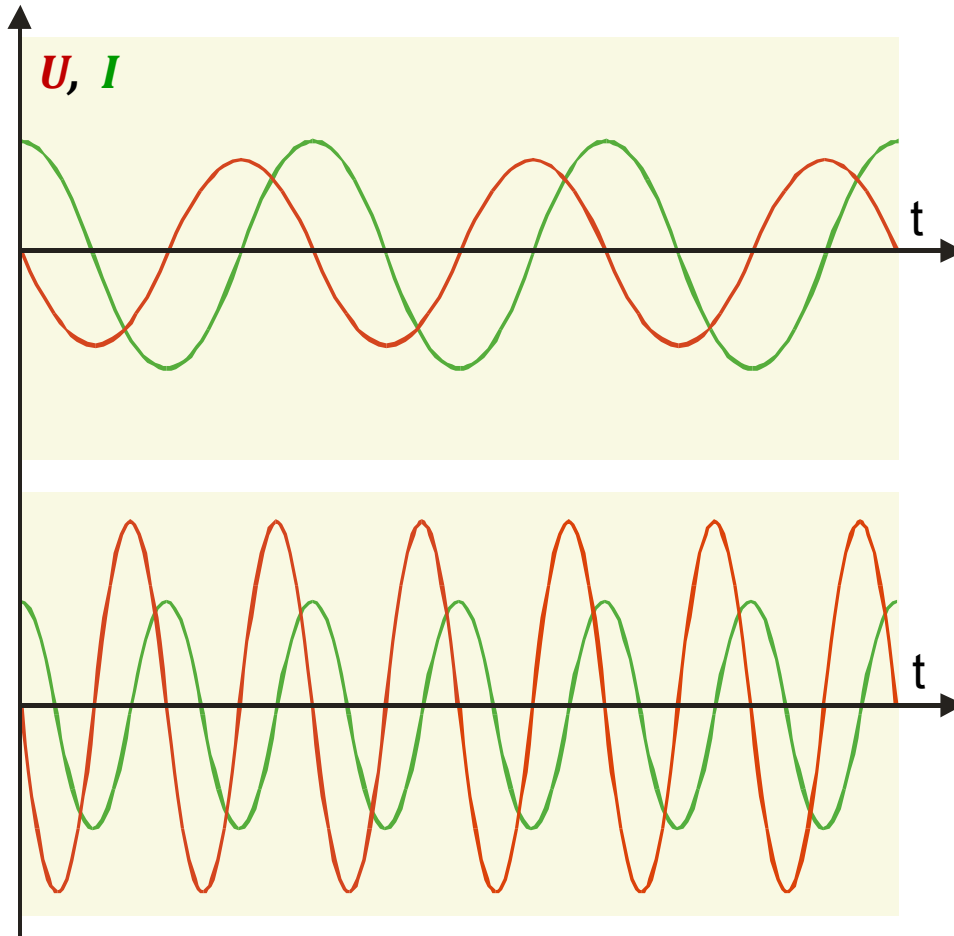
Bild: Bauformen von Spulen (v.l.n.r.: Transformator, Ringspulen, SMD-Drossel, Durchsteck-Drossel)

2.11 Spule als Bauelement

Beispiel: Wir schicken einen sinusförmigen Strom durch eine Spule und berechnen die Spannung an der Spule (Idealisierung: Der Widerstand der Zuleitungen ist vernachlässigbar)

$$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$



Bei einer höheren Frequenz ergibt sich eine größere Spannung. Wie schon beim Kondensator sind Strom und Spannung „außer Takt“. Für Gleichstrom stellt die Spule einen einfachen Kurzschluss dar.

2.12 Energie im elektromagnetischen Feld

Wir betrachten nur die Bauelemente Kondensator, Spule und Widerstand.

An einem **Kondensator** wird die Spannung von 0 auf U_0 erhöht. Bei jedem Spannungsschritt dU wird eine kleine Energie $dW = Q \cdot dU$ zugeführt. Insgesamt ist dann bei der Spannung U_0 im Kondensator die Energie W gespeichert:

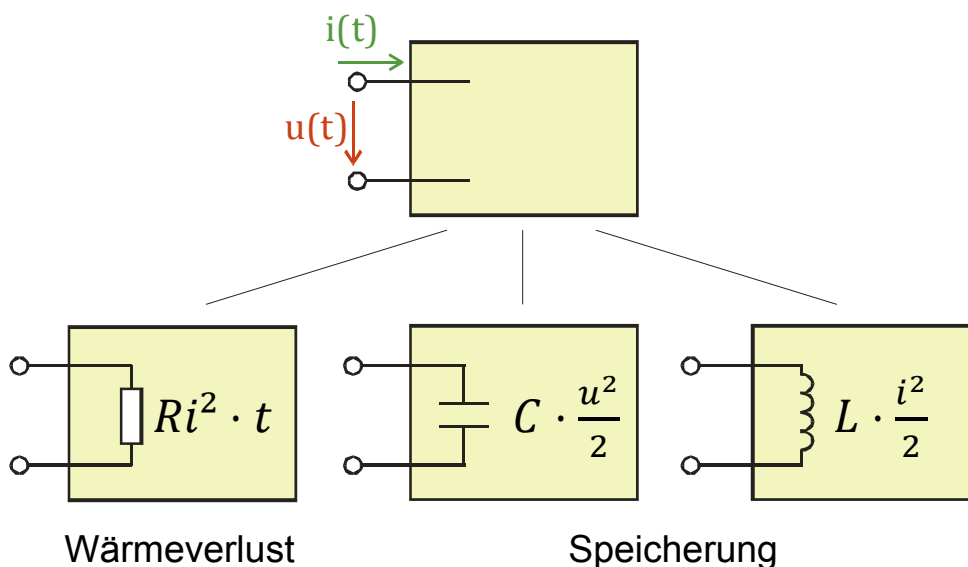
$$W = \int dW = \int_0^{U_0} Q \cdot dU = \int_0^{U_0} C \cdot U \cdot dU = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$$

Bei einer **Spule** wird der Strom von 0 auf I_0 erhöht. Dabei muss die Spulenspannung $U_L = N \cdot d\Phi/dt = L \cdot dI/dt$ überwunden werden. In jedem Augenblick wird deshalb die kleine Energiemenge $dW = U_L \cdot I \cdot dt = L \cdot dI \cdot I$ zugeführt, was sich insgesamt zu

$$W = \int dW = \int_0^{I_0} L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$$

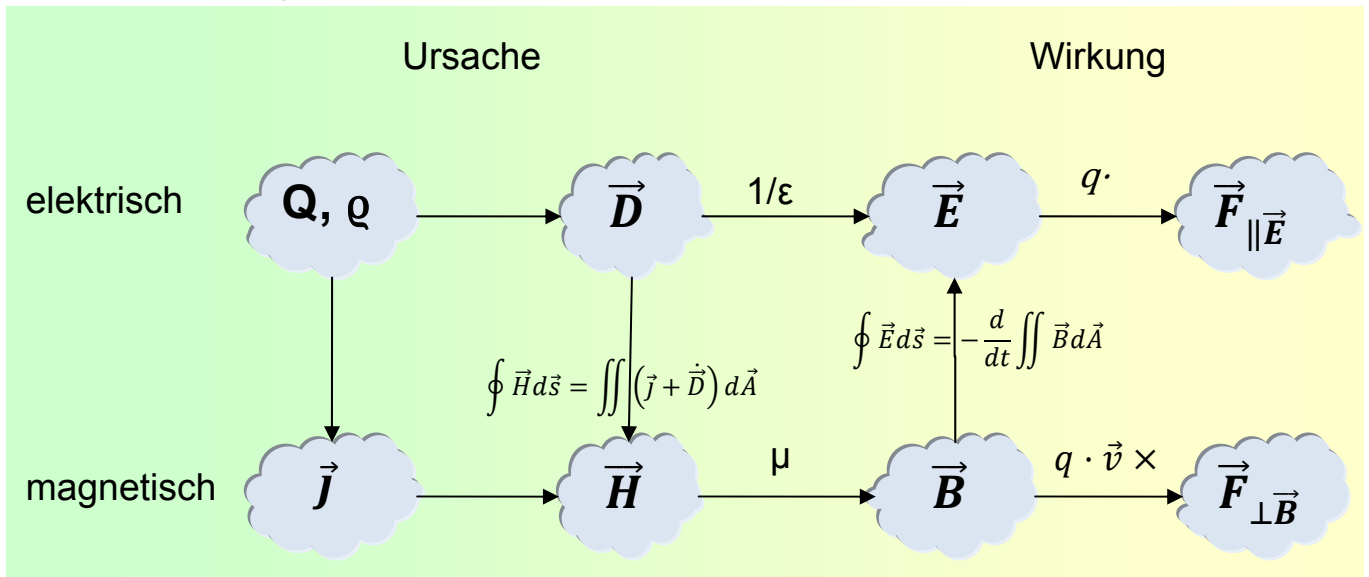
aufsummiert.

Im **Widerstand** R wird die Leistung $P = U \cdot I = U^2/R = I^2 \cdot R$ in jedem Augenblick umgesetzt, also die Energiemenge $dW = P \cdot dt$ **verbraucht** (in Wärme umgewandelt). Im Gegensatz dazu wird Energie im Kondensator und der Spule nur **gespeichert** und steht weiterhin zur Verfügung.



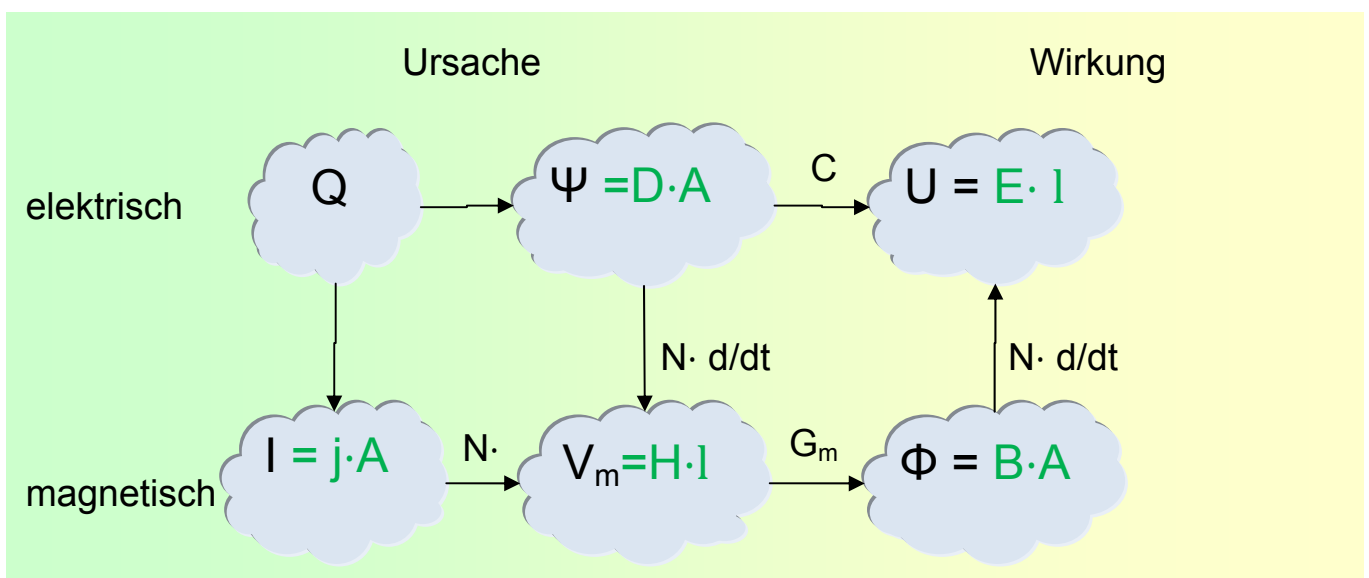
2.13 Überblick über die elektromagnetischen Feldgrößen

vektorielle Feldgrößen:



Energiedichten: $\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}, \quad \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

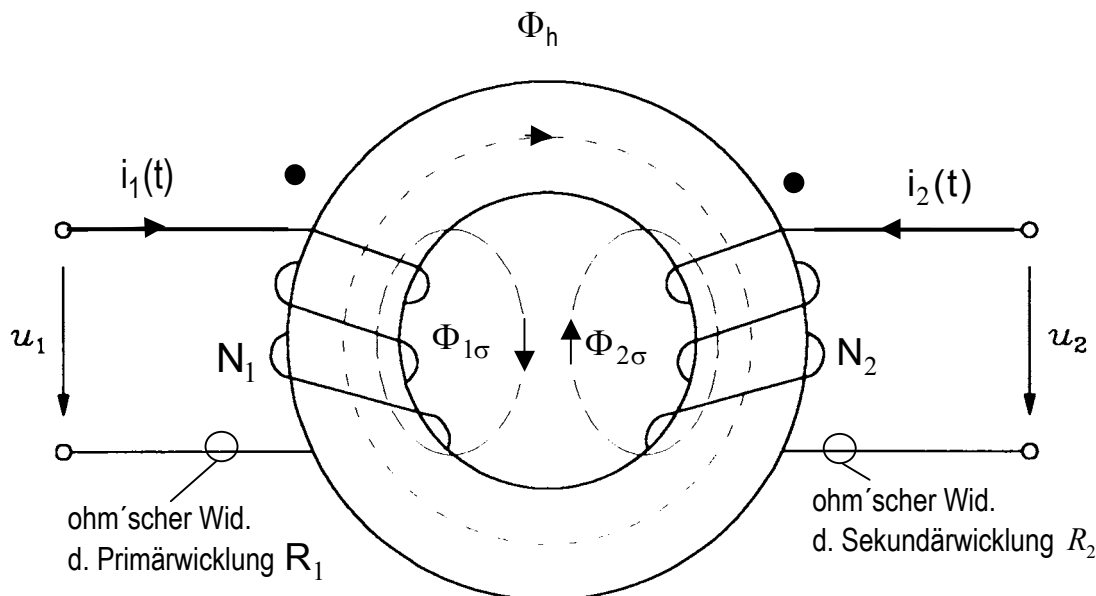
skalare (integrale) Feldgrößen (Zusammenhang mit **homogenen** Vektorfeldern):



3. Der Transformator

- Zweck:**
- * Spannungstransformation in Energie- und Nachrichtentechnik
 - * Stromtransformation (Meßwandler)
 - * Leistungs- und Widerstandstransformation
- Prinzip:**
- * Koppelung von zwei galvanisch getrennten (nicht leitend verbundenen) Stromkreisen über das mit den el. Strömen "verkettete" Magnetfeld.
- Gestalt und Aufbau:**
- * abhängig von Leistung und Verwendungszweck
 - * < 10 μ VA bis > 500 MVA

3.1 Prinzip des Trafos



$N_{1,2}$ Windungszahlen

Gleiche Zuordnung Windungspunkt $\bullet \leftrightarrow$ Stromzählpfeil in den beiden Spulen N_1 und N_2 zeigt an, daß sich die magn. Flüsse im Kern aufgrund des Wickelsinns gleichsinnig (gemäß Rechtschraubenregel) überlagern.

3.1.1 Herleitung des „T- Ersatzschaltbildes“

a) Beschreibung des Magnetfeldes

Das die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ umwirbelnde Magnetfeld läßt sich in drei magnetische Flüsse aufteilen:

- Φ_h : Hauptfluß bewirkt magnetische Kopplung („Verkettung“)
zwischen Primär- und Sekundärwicklung;
- $\Phi_{1\sigma}$: Streufluß der Primärwicklung ; (nicht mit N_2 verkettet !)
- $\Phi_{2\sigma}$: Streufluß der Sekundärwicklung ; (nicht mit N_1 verkettet !)

Mit den „magnetischen Leitwerten des primären u. sekundären Streuraumes $\Lambda_{1\sigma}$, $\Lambda_{2\sigma}$ “ und dem „magnetischen Leitwert des Hauptflußweges Λ_h “ ergibt sich für **konstante Permeabilität** μ des Kernmaterials mit Hilfe des „ohm'schen Gesetzes des Magnetismus“:

$$\Phi_h = \Lambda_h \cdot [i_1(t) \cdot N_1 + i_2(t) \cdot N_2] = \Lambda_h \cdot N_1 \cdot \underbrace{\left[i_1(t) + \frac{N_2}{N_1} \cdot i_2(t) \right]}_{\text{Magnetisierungsstrom } i_{m1} = i_\mu} \quad (8.1a, b)$$

$$\Phi_{1\sigma} = \Lambda_{1\sigma} \cdot [i_1(t) \cdot N_1] \quad (8.2a)$$

$$\Phi_{2\sigma} = \Lambda_{2\sigma} \cdot [i_2(t) \cdot N_2] \quad (8.2b)$$

Der fiktive Magnetisierungsstrom $i_{m1} = i_\mu$ ist eine Rechengröße; er fließt nur auf der Primärseite und ist für die Erregung des Hauptflusses Φ_h verantwortlich!

b) Anwendung des Induktionsgesetzes auf den Primärkreis

"elektrische Umlaufspannung" = $-\frac{d}{dt} \{ \text{mit Uml. 1 verketteter Fluß } \Psi \}$

Umlauf 1 in Richtung i_1

$$\underbrace{-u_1(t) + i_1(t) \cdot R_1}_{\text{Umlauf 1 in Richtung } i_1} = -\frac{d}{dt} \left\{ N_1 \cdot [\Phi_h + \Phi_{1\sigma}] \right\} \quad (8.3)$$

daraus folgt mit Gl. (8.1b) und Gl. (8.2a) :

$$u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1 + \underbrace{N_1^2 \cdot \Lambda_h}_{L_{1h}} \cdot \frac{d}{dt} [i_{m1}(t)] + \underbrace{N_1^2 \cdot \Lambda_{1\sigma}}_{L_{1\sigma}} \cdot \frac{d}{dt} [i_1(t)] \quad (8.4)$$

L_{1h} := "Hauptinduktivität"

$L_{1\sigma}$:= "primäre Streuinduktivität"

c) Anwendung des Induktionsgesetzes auf den Sekundärkreis:

$$\underbrace{-u_2(t) + i_2(t) \cdot R_2}_{\text{Umlauf 2 in Richtung } i_2} = -\frac{d}{dt} \{ N_2 \cdot [\Phi_h + \Phi_{2\sigma}] \} \quad (8.5)$$

mit Gl. (8.1b) und Gl. (8.2b) folgt :

$$u_2(t) = i_2(t) \cdot R_2 + \underbrace{N_2 \cdot N_1 \cdot \Lambda_h}_{L_{1h}} \cdot \frac{d}{dt} [i_{m1}(t)] + \underbrace{N_2^2 \cdot \Lambda_{2\sigma}}_{L_{2\sigma}} \cdot \frac{d}{dt} [i_2(t)] \quad (8.6)$$

$L_{2\sigma}$:= "sekundäre Streuinduktivität"

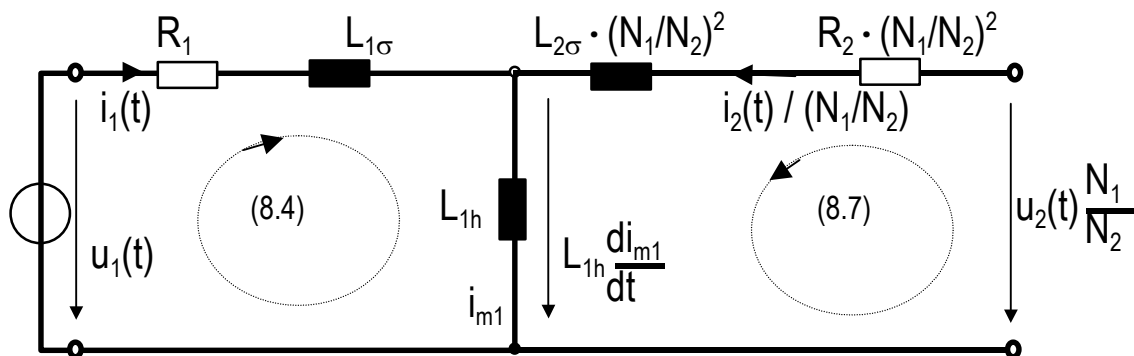
$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$:= "Übersetzungsverhältnis"

Gl.(8.6) auf die Form $\left(\frac{i_2(t)}{\ddot{u}}\right)$ und $(\ddot{u} \cdot u_2(t))$ umgestellt :

$$\underbrace{L_{1h} \cdot \frac{di_{m1}}{dt}}_{\text{gemeinsamer Term mit (8.4)}} + \ddot{u}^2 \cdot L_{2\sigma} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{i_2(t)}{\ddot{u}} \right] + \ddot{u}^2 \cdot R_2 \cdot \frac{i_2(t)}{\ddot{u}} - \ddot{u} \cdot u_2(t) = 0 \quad (8.7)$$

Das T- Ersatzschaltbild des Transformators ergibt sich , indem Gl.(8.4) und Gl.(8.7) jeweils als Kirchhoff-Gleichung II – einer Summe von Spannungsabfällen an konzentrierten Elementen – interpretiert wird:

* T- Ersatzschaltbild des Transformators ohne Eisenverluste
(durch Hysterese und Wirbelströme):



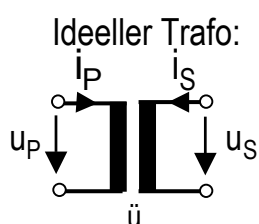
$\ddot{u} =$:= Übersetzungsverhältnis

$R_2' =$; $u_2'(t) =$ (8.8)

$L_{2\sigma}' =$; $i_2'(t) =$

$R_2, L_{2\sigma}, i_2, u_2$
wurden auf die
Primärseite
„transformiert“
(= umgerechnet !)
Kennzeichen: '

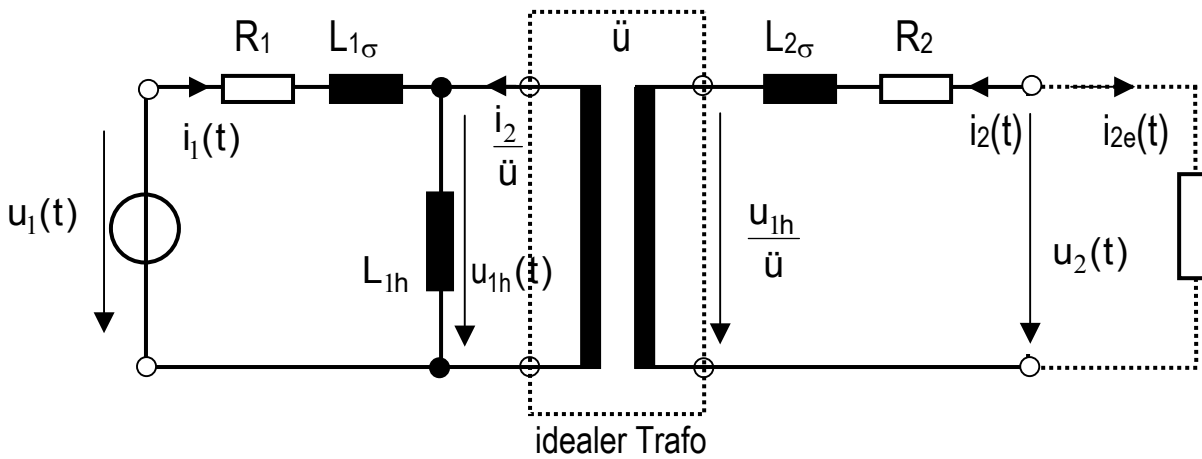
* Darstellung des T-ESB mit idealem Transformator



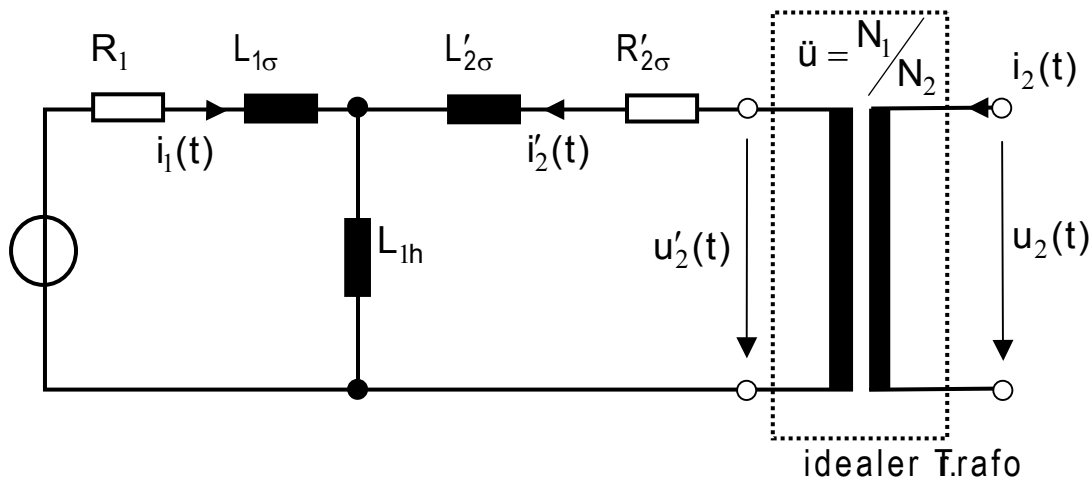
- * vollkommen verlustfrei
d.h. keine Streuflüsse,
keine ohm'schen Verluste
- * kein Magnetisierungsstrom
- * reine Übersetzung ü

$$u_P = \frac{N_1}{N_2} \cdot u_S = \ddot{u} \cdot u_S = u'_S$$

$$i_P + \frac{i_S}{\frac{N_1}{N_2}} = i_P + i'_S = 0 \quad (8.9)$$



ODER:



3.1.2 Alternative Beschreibung des Trafo`s mit Gegeninduktivität

* bevorzugt bei komplexeren Netzwerken mit Zweigen induktiver Kopplung

* Ausgangspunkt : Gln.(8.1a), (8.2a,b), (8.3), (8.5)

$$u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1 + \frac{d}{dt} \{ N_1 \cdot [\Phi_h + \Phi_{1\sigma}] \}$$

$$u_2(t) = i_2(t) \cdot R_2 + \frac{d}{dt} \{ N_2 \cdot [\Phi_h + \Phi_{2\sigma}] \}$$

mit: $\Phi_h = \Lambda_h \cdot \{ i_1(t) \cdot N_1 + i_2(t) \cdot N_2 \}$

$\Phi_{1\sigma} = \Lambda_{1\sigma} \cdot \{ i_1(t) \cdot N_1 \}$; $\Phi_{2\sigma} = \Lambda_{2\sigma} \cdot \{ i_2(t) \cdot N_2 \}$

ergibt :

$$u_1(t) = i_1(t) \cdot R_1 + \underbrace{N_1^2 \cdot (\Lambda_h + \Lambda_{1\sigma})}_{L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma}} \cdot \frac{d}{dt} \{ i_1(t) \} + \underbrace{N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h}_M \cdot \frac{d}{dt} \{ i_2(t) \} \quad (8.10)$$

$L_1 :=$ "(gesamte) Selbstinduktivität der Primärwicklung"

$M :=$ "Gegeninduktivität"

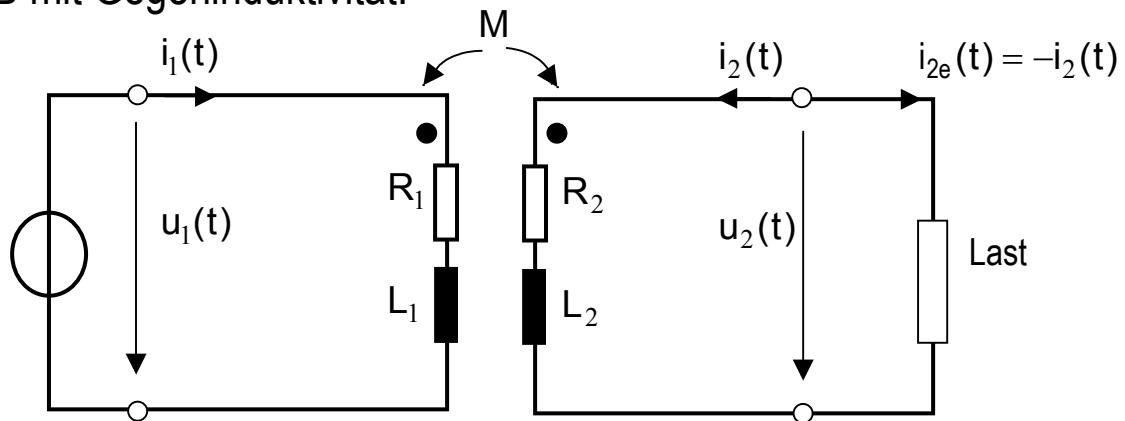
entsprechend :

$$u_2(t) = i_2(t) \cdot R_2 + \underbrace{N_2^2 \cdot (\Lambda_h + \Lambda_{2\sigma})}_{L_2} \cdot \frac{d}{dt} \{i_2(t)\} + \underbrace{N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h}_M \cdot \frac{d}{dt} \{i_1(t)\} \quad (8.11)$$

L_2 := "(Gesamt-)Induktivität der Sekundärwicklung"

M := "Gegeninduktivität"

* ESB mit Gegeninduktivität:



Hinweis (DIN 5498): Zuordnung der Stromzählpfeile zu den Wicklungspunkten •
 „gleich“, dann $M > 0$: gleichsinnige magn. Kopplung;
 „ungleich“, dann $M < 0$: gegensinnige magn. Kopplung

$$u_1(t) = \quad (8.12a)$$

$$u_2(t) = \quad (8.12b)$$

3.1.3 Der Begriff der Kopplung

Kopplung := Anteil des Spulenflusses, der mit der jeweils anderen Spule (des Transformators) verkettet ist.

Hauptfluß allgemein: $\Phi_h = \Phi_h(i_1, i_2) = \Lambda_h \cdot N_1 \cdot i_{m1}$

Definition des primären und sekundären Kopplungsfaktors k_1, k_2

$k_1 (= k_{12})$ primärer KF. $\Phi_h(i_1, i_2=0) = k_1 \cdot \Phi_1(i_1, 0)$

$k_2 (= k_{21})$ sekundärer KF. $\Phi_h(i_1=0, i_2) = k_2 \cdot \Phi_2(0, i_2)$

$$\leadsto \Phi_h(i_1, 0) = \Lambda_h \cdot N_1 \cdot i_1 = k_1 \cdot (\Lambda_h + \Lambda_{1\sigma}) \cdot N_1 \cdot i_1$$

$$\leadsto \boxed{\Lambda_h = k_1 \cdot \Lambda_1} \longrightarrow N_1^2 \Lambda_h = L_{1h} = k_1 \cdot L_1 \quad (8.13) \quad (8.14)$$

$$i_{m1} = i_1 + \frac{N_2}{N_1} \cdot i_2$$

$$\leadsto \Phi_h(0, i_2) = \Lambda_h \cdot N_2 \cdot i_2 = k_2 \cdot (\Lambda_h + \Lambda_{2\sigma}) \cdot N_2 \cdot i_2$$

$$\leadsto \boxed{\Lambda_h = k_2 \cdot \Lambda_2} \longrightarrow N_2^2 \Lambda_h = L_{2h} = k_2 \cdot L_2 \quad (8.16) \quad (8.17)$$

Zusammenhang mit Gegeninduktivität M

$$\boxed{M = N_1 \cdot N_2 \cdot \Lambda_h} = \sqrt{N_1^2 \cdot \Lambda_h \cdot N_2^2 \cdot \Lambda_h} = \sqrt{L_{1h} \cdot L_{2h}} = \sqrt{k_1 \cdot L_1 \cdot k_2 \cdot L_2} \quad (8.18)$$

$$M = \frac{N_2}{N_1} \cdot N_1^2 \cdot k_1 \cdot \Lambda_1 = \frac{k_1 L_1}{\ddot{u}} = \frac{L_{1h}}{\ddot{u}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot N_2^2 \cdot k_2 \cdot \Lambda_2 = k_2 \cdot L_2 \cdot \ddot{u} = L_{2h} \cdot \ddot{u}$$

Darstellung mit primärem und sekundärem Streufaktor

$$\begin{array}{l} L_1 = L_{1h} + L_{1\sigma} ; L_{1h} = k_1 \cdot L_1 ; L_{1\sigma} = \sigma_1 \cdot L_1 = (1-k_1) \cdot L_1 \\ L_2 = L_{2h} + L_{2\sigma} ; L_{2h} = k_2 \cdot L_2 ; L_{2\sigma} = \sigma_2 \cdot L_2 = (1-k_2) \cdot L_2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} k_1 + \sigma_1 = 1 \\ k_2 + \sigma_2 = 1 \end{array}$$

In der Literatur häufig:

(8.19)

Definition eines (mittleren) Koppelfaktors (Koppelgrads)

$$\boxed{k = \sqrt{k_1 \cdot k_2}} = \sqrt{(1-\sigma_1) \cdot (1-\sigma_2)} = \sqrt{1 - (\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2}$$

$$\leadsto \text{für kleine Streufaktoren } \sigma_1, \sigma_2 : \boxed{k = \sqrt{1 - (\sigma_1 + \sigma_2)}} = \sqrt{1 - \sigma^*}$$

$$\underline{\underline{\sigma^* = \sigma_1 + \sigma_2 = 1 - k^2}} := \text{(mittlerer) Streufaktor (Streugrad)}$$

Hinweis: Für einen "symmetrischen Transformator" vgl. 8.1.4 gilt:

$$\underline{\underline{k_1 = k_2 = k}}$$

3.1.4 Der symmetrische Transformator

* Ein Transformator ist dann optimal ausgenutzt, wenn Primär- und Sekundärseite
 a) gleiche Stromwärmeverluste und b) gleiche Streuverhältnisse besitzen.

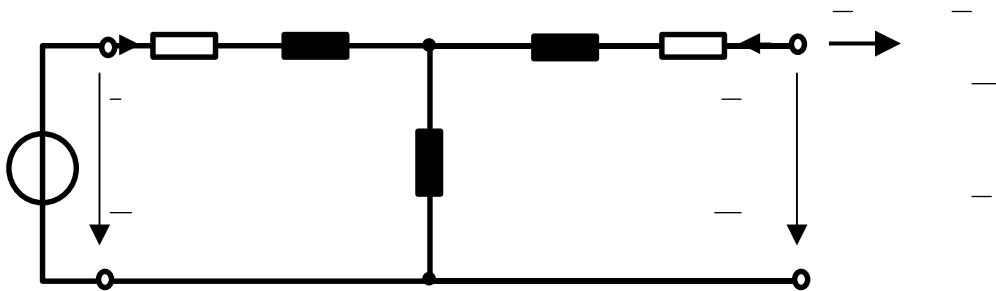
Kennzeichen :

$$R_1 = \quad (8.20a)$$

$$\Lambda_{1\sigma} =$$

$$L_{1\sigma} = \quad (8.20b)$$

$$k_1 =$$



—

—

—

3.2 Berücksichtigung der „Eisenverluste“ im Transformator

- * der zeitveränderliche Fluß $\Phi(t)$ führt zu Wirbelstrom- und Hystereseverlusten im Eisenkern;

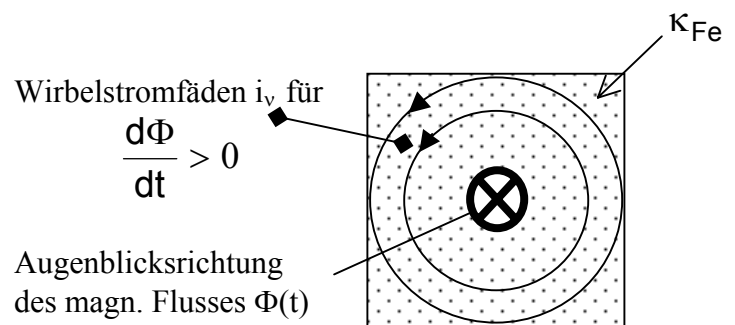
3.2.1 Wirbelstromverluste

- * Berechnung sehr aufwendig („Feldtheorie“); Ansatz andeutungsweise:
- * Eisenkern elektrisch leitfähig: κ_{Fe}
- * Lenz'sche Regel: Wirbelströme i_v so induziert, daß sie der Ursache $\Phi(t)$ entgegenwirken

- * eingepreßt

$$\Phi(t) \approx \hat{\Phi} \cdot \sin \omega t$$

$$\gamma \frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot \hat{\Phi} \cdot \cos \omega t$$



- * Induktionsgesetz

$$i_v \cdot R_v = \frac{d\Phi_v}{dt} \quad \text{mit } R_v : \text{Ohmwid. für den Stromfaden } v$$

Φ_v : von i_v umschlossener Flußanteil

- * Verlustleistung des Stromfadens

$$p_v = [i_v(t)]^2 \cdot R_v = \left[\frac{d\Phi_v}{dt} \right]^2 \cdot \frac{1}{R_v}$$

- * Wirbelstromverluste

$$P_W = \sum_v p_v \xrightarrow{\text{prop.}} \omega^2 \cdot \hat{\Phi}^2 \cdot \kappa_{Fe} = \quad (8.22)$$

- * Abhilfe: Unterbrechung der Wirbelströme durch geblechte Kerne Eisenlegierungen mit niedrigem spez. el. Leitwert κ_{Fe}

3.2.2 Hystereseverluste

- * Ursache: Ummagnetisierung ferromagnetischer Partikel kostet Energie
- * Folge Erwärmung des Eisenkernes

* magn. Energiedichte

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \int_B H \cdot dB$$

* magn. Energie im Kern (Volumen V)

$$W_m = \iiint_V w_m(x, y, z) \cdot dV$$

* spezifische Hysteresearbeit

In einer Periode $T = \frac{1}{f}$ des

magn. Flusses $\Phi(t)$ wird die Hystereseschleife 1 mal durchlaufen:

$$w_H = \oint_{1-2-3-4-1} H \cdot dB \quad \text{entspricht der Hysteresefläche}$$

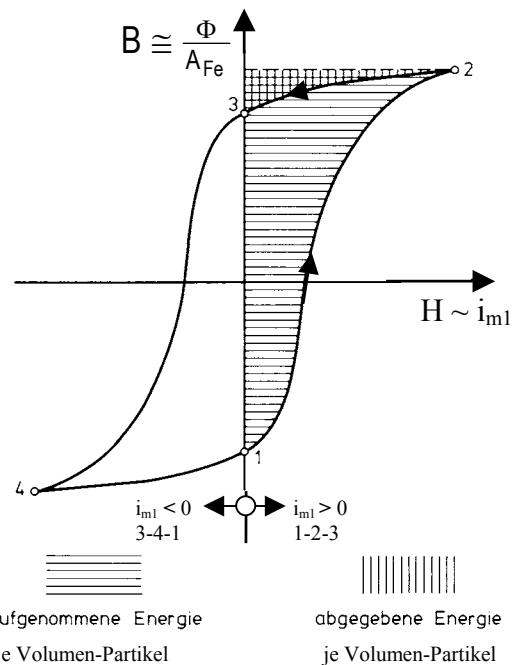
* Hysteresearbeit pro Periode T $\Delta W \cong w_H \cdot V$

* Hystereseverluste $P_{Hy} = \frac{dW}{dt} = \frac{\text{Anzahl der Durchläufe } v}{\text{benötigte Zeit } v \cdot T} \cdot \Delta W =$

$$P_{Hy} \sim \quad (8.23)$$

* abhängig von der Form der Hysterese $g(H_C, B_{max})$

* proportional zu Frequenz f und Kernvolumen V



3.2.3 Gesamtverluste = „Eisenverluste“

$$P_{Fe} = P_{Hy}(\quad) + P_W(\quad) \quad (8.24)$$

* in Tabellenform von den Herstellern angegeben

3.2.4 Angabe der Eisenverluste durch die Verlustziffer $V_{1,0}$ oder $V_{1,5}$

$$V_{B_0} = \frac{\text{Eisenverluste [W]}}{\text{Eisenmasse [kg]}} = \frac{P_{FE}}{m_{Fe}} \quad (8.25)$$

* Der Index bezeichnet die maximale Induktion B_0 , für die die Verlustziffer gilt; i.d.R. $B_0 = 1,0 \text{ Tesla}$ oder $B_0 = 1,5 \text{ Tesla}$

* Bei abweichender Maximalinduktion
(8.26)

$$V = V_{1,0} \cdot \left[\frac{B_{\max}}{1,0 \frac{Vs}{m^2}} \right]^2 \text{ bzw. } V_{1,5} \cdot \left[\frac{B_{\max}}{1,5 \text{ T}} \right]^2$$

3.2.5 Berücksichtigung der Eisenverluste im Ersatzschaltbild des Trafos

Für konstante Frequenz f gilt:

Eisenverluste: $P_{FE} \sim B^2$ (näherungsweise)

aus der induzierten Spannung $u_{1h}(t) = \frac{d}{dt} \{ N_1 \cdot \Phi_h(t) \} = N_1 \cdot A_{Fe} \cdot \frac{d}{dt} \{ B(t) \}$ folgt:

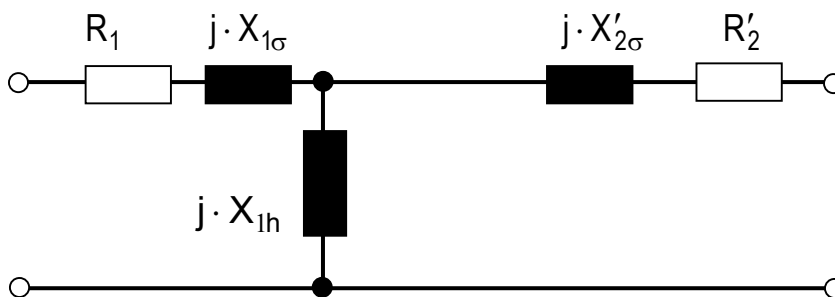
$$U_{1h,eff} \sim B$$

deshalb:

Eisenverluste = ohm'scher Widerstand R_{FE} parallel zu X_{1h}

$$P_{FE} = \Rightarrow R_{FE} = \quad (8.27)$$

* ESB mit Eisenverlusten:



* Bei sekundärem Leerlauf: $I_2 = 0$; $U_1 = U_{1N}$; $I_1 = I_{10} \ll I_{1N}$; gilt:

$$P_{FE} = U_{1N} \cdot I_{10} \cdot \cos(\angle U_{1N}, I_{10}) - I_{10}^2 \cdot R_1 \approx \frac{U_{1N}^2}{R_{Fe}}$$

→ Messung von P_{FE} im sog. „Leerlaufversuch“ vgl. 8.5.1