1.1.4 Mächtigkeiten

Sei M eine Menge. Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von M mit **$|M|$**. Diese Zahl heißt **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) von M.

Beispiele:

(a) $|\{0,1,2,3\}| = 4$

(b) $|\emptyset| = 0$

(c) $|\{1, \{2, 3\}\}| = 2$ (Achtung!)

Eine Menge wird **endlich** genannt, wenn ihre Mächtigkeit eine natürliche Zahl ist. Sonst heißt die Menge **unendlich**. Wenn M eine unendliche Menge ist, so schreiben wir $|M| = \infty$.

Beispiele: $|\mathbf{N}| = \infty$ und $|\mathbf{R}| = \infty$

Summenformel

Summenformel. Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt

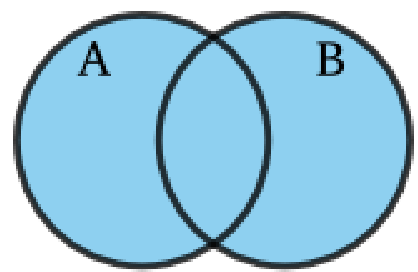
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Beispiel: Für die Anzahl der Studierenden, die Mathematik studieren oder Sport studieren, muss man wissen,

(a) wie viele Leute Mathematik studieren,

(b) wie viele Sport studieren

und (c) wie viele Mathematik und Sport studieren.



$A \cup B$

Summenformel: Der Beweis

Beweis *(= warum ist das so?).*

Zu zeigen: Auf beiden Seiten steht die gleiche Zahl!

Linke Seite: Jedes Element von $A \cup B$ wird genau einmal gezählt.

Rechte Seite: In $|A| + |B|$ wird jedes Element von A und jedes Element von B einmal gezählt,

die Elemente von $A \cap B$ werden also doppelt gezählt.

Dies wird dadurch korrigiert, dass $|A \cap B|$ wieder abgezogen wird.

Daher wird auch auf der rechten Seite jedes Element genau einmal gezählt. □

Übung

In einer Seminargruppe spielen 20 Personen gerne Computerspiele und 10 Personen gerne Fußball, wobei 5 beides gerne machen.

Wie viele Personen sind in der Seminargruppe?

Die Produktformel

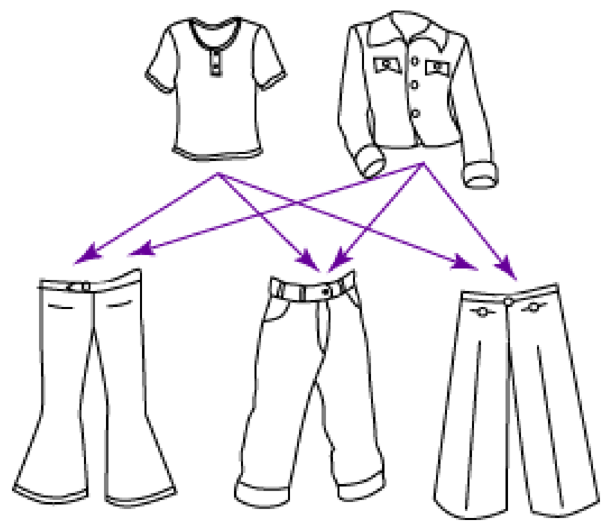
Die Mächtigkeit des kartesischen Produkts ergibt sich sehr einfach.

Produktformel. Für je zwei Mengen A und B gilt

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Beispiel: Mit 2 Hemden und 3 Hosen hat man 6 Möglichkeiten sich anzuziehen:

$$\begin{aligned} & |\text{Hemden} \times \text{Hosen}| \\ = & |\text{Hemden}| \cdot |\text{Hosen}| \\ = & 2 \cdot 3 \\ = & 6 \end{aligned}$$



Allgemeine Produktformel

Satz. Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ endliche nichtleere Mengen. Dann ist

$$|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|.$$

Beispiel. Wenn Professor X genau 8 Hemden, 3 Hosen und 4 Paar Schuhe hat, so kann er sich auf $8 \cdot 3 \cdot 4 = 96$ Weisen kleiden.

Beispiel. Bei Geldausgabeautomaten besteht die Geheimzahl aus vier Dezimalstellen. Wie viele PINs gibt es, bei denen die erste Stelle nicht 0 ist?

Antwort: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Übung

In meinem Lieblingssteakrestaurant kann man sich seine Mahlzeit aus folgenden Komponenten selbst zusammenstellen:

(a) Hüftsteak, Rumpsteak, Filetsteak, Rib-Eye Steak;

(b) Gewicht: 180g oder 250g;

(c) Beilagen: Folienkartoffeln, Pommes Frites, Kroketten, Bratkartoffeln, weißer Langkornreis, Maiskolben, Knoblauchbrot, rote Bohnen, Zwiebelringe, Champignons;

(d) Saucen: Kräuterbutter, Pfefferrahmsauce, Sauce n. Art Béarnaise.

Wenn ich jeden Monat einmal dort esse: Wie lange brauche ich, um alle Kombinationen durchzuprobieren? Was hat das Ganze mit dem kartesischen Produkt zu tun?

1.1.5 Binomialzahlen

Zur Erinnerung: Eine Menge M' ist eine **Teilmenge** einer Menge M, falls jedes Element von M' auch ein Element von M ist. Wir schreiben: $M' \subseteq M$.

„Triviale" Teilmengen: Jede Menge hat sich selbst und die **leere Menge** $\{\ \}$ (auch $\emptyset$), die kein Element enthält, als Teilmenge.

Die Menge aller Teilmengen von M heißt **Potenzmenge** $P(M)$ von M.

Beispiel: Alle Teilmengen von $M = \{a, b, c\}$ sind

$$\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Satz. Jede n-elementige Menge M hat genau 2^n Teilmengen.

Binomialzahlen

Definition. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet („n über k“); diese Zahlen heißen **Binomialzahlen**.

Beispiele

$\binom{n}{0}$ = 1 (jede Menge hat genau eine 0-elem. Teilmenge, nämlich {})

$\binom{n}{n}$ = 1 (jede n-elementige Menge hat nur eine n-elementige Teilmenge, nämlich sich selbst)

$\binom{n}{1}$ = n (die Teilmeng. der Mächtigkeit 1 sind genau die n Elemente)

$\binom{4}{2}$ = 6 (die 4-elementige Menge {a, b, c, d} hat sechs 2-elementige Teilmengen: {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d})

Explizite Formel für Binomialzahlen

Explizite Formel für die Binomialzahlen. Seien k und n natürliche Zahlen mit $0 \le k \le n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,.$$

$n!$ („n Fakultät") ist definiert als $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Beispiel: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Beispiel zur expliziten Formel: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6.$

Möglichkeiten beim Lotto

Beispiel. Beim Lotto „6 aus 49” werden sechs der Zahlen 1, 2, ..., 49 gezogen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

In unserer Sprache heißt das: Es wird eine 6-elementige Teilmenge der Menge $\{1, 2, ..., 49\}$ gezogen.

Dafür gibt es nach Definition genau $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten.

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist also

1/13.983.816 = 0,000000071…

Übung

Berechnen Sie $\binom{5}{3}$,

(a) indem Sie alle 3-elementigen Teilmengen einer 5-elementigen Menge auflisten,

(b) indem Sie die explizite Formel anwenden.

Unterhaltsames über die „Neue Mathematik“: http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-41784469.html