

2 Typen von Event  $j$

neues Wellenstück erscheint  $\leftarrow$  Sweepline  $L$  trifft neues  $t \in S$

altes Wellenstück verschwindet  $\leftarrow$  Wellenfront erreicht Schnitt von benachbarten Spikes; Voronoi-Knoten

Komplexität der Wellenfront:  $O(n)$   
 DSS der Ordnung 2, da alle Parabeln parallele Mittelachsen haben.

Alg Geo 22.1

5.5 Verallgemeinerungen

5.5.1 Allgemeine Abstandsbegriffe

sehr bekannt: "Manhattan - Metrik"

$$L_1(a,b) = |a_x - b_x| + |a_y - b_y|$$

Absolutbeträge statt Wurzeln

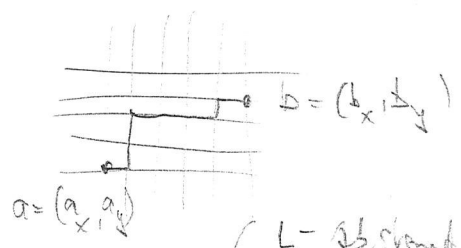
allgemeiner:  $L_i(a,b) = \sqrt[|i|]{|a_x - b_x|^i + |a_y - b_y|^i}$

$L_1$  - (Minkowski-) - Metrik

speziell:  $L_2$  euklid. Metrik für  $i=2$

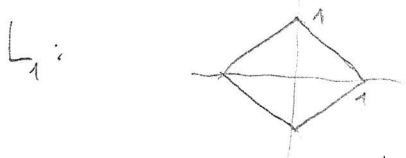
$$L_\infty(a,b) = \max(|a_x - b_x|, |a_y - b_y|)$$

Wichtig, in Abhängigkeit zu treffen

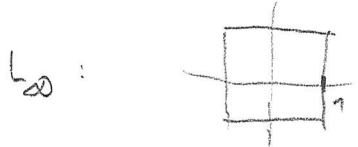
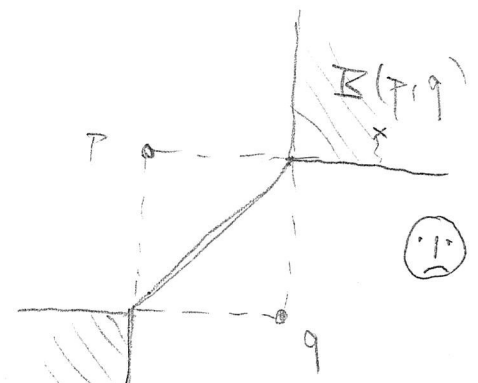
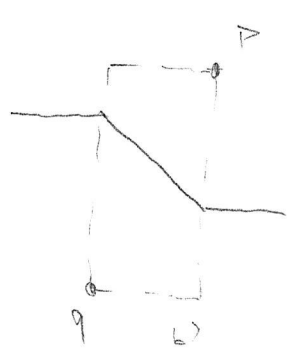
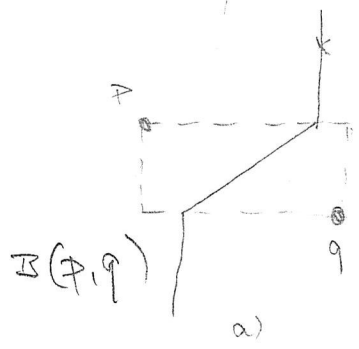


$L_1$  - Abstand realisiert durch euklidische Länge monotonen achsenparalleler Wege

Kreise  $\rightsquigarrow$  Bisektoren  $\rightsquigarrow$  Voronoi-Diagramme



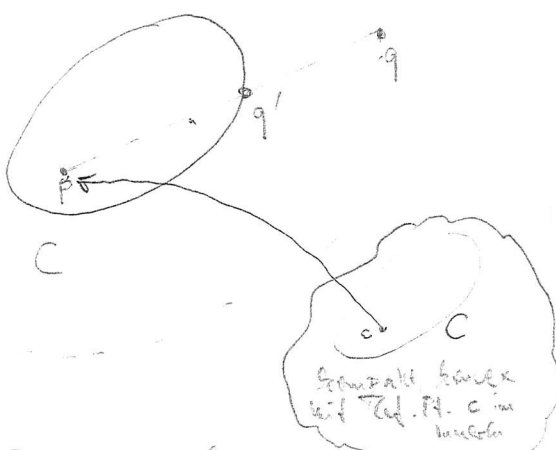
Einheitskreis; konvex, aber nicht strikt konvex



c) möglich: stets wie a) behandeln

noch allgemeiner:

konvexe Distanzfunktion (Gänge)



$$d_C(p, q) := \frac{|P, q|}{|pq'|}$$

= Skalierung von C, damit Kanal durch q geht

translationsinvariant  
C: Einheitskreis von  $d_C$   
Norm

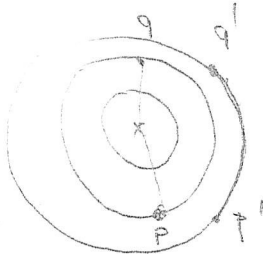
Thm falls C zentralsymmetrisch:  
um C

$\partial C$  enthält keine Liniensegmente  $\Leftrightarrow$   $\mathbb{R}$ -Sektoren von  $d_C$  sind homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .  
(d.h. C kompakt und streng konvex)

Thm:  $V(S) = 0$  (möglicherweise), falls  $\mathbb{R}$ -invariant  $\rightarrow \mathbb{R}^2$

Deckt noch nicht alle interessanten Fälle ab:

Moskau / Kadtschke:



nicht translationsinvariant

Def:  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Metrik

$\forall p, q, r \in M:$

$$d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$$

$$d(p, q) = d(q, p)$$

Symmetrie

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$$



Bei  $L_2$  (und bei allen konvexen Distanzfunktionen) darf man Entfernungen längs Liniensegmenten aufaddieren:



$$d(p, r) = d(p, q) + d(q, r)$$

In Moskau-Metrik nicht.

In manchen Metriken (z.B. Moskauer) gibt es dafür Ersatz.

Def: Ein Weg  $\pi$  im metrischen Raum  $(M, d)$  heißt  $d$ -gerade

falls gilt:



$\forall a, b, c \in \pi:$   
 $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$

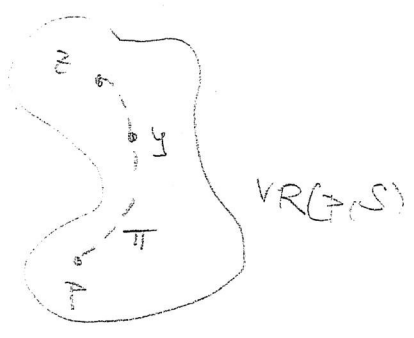
wichtig für uns: (Moskauer, die definierenden Wege)

Theorem Angenommen, in  $(M, d)$  kann man je 2 Punkte durch  $d$ -geraden Pfad verbinden. Dann sind alle

Voronoi-Regionen  $VR_d(p, S) := \{z \in \mathbb{R}^2; d(p, z) < d(q, z) \forall q \in S, q \neq p\}$  von  $p$  aus  $d$ -stetförmig und damit wegziehbar.

Beweis: Sei  $z \in VR_d(p, S)$  und  $\pi$  ein  $d$ -gerader Pfad von  $p$  nach  $z$ .

Beh:  $\pi \subset VR_d(p, S)$  (Stetförmigkeit von  $p$ )



Bew: Angenommen,  $y \in \pi$  gehört nicht zur Region von  $p$

$\Rightarrow \exists q \in S$  mit  $d(q, y) \leq d(p, y)$

$\Rightarrow d(q, z) \leq d(q, y) + d(y, z) \leq d(p, y) + d(y, z) = d(p, z)$

The Moskauer-Metrik (Analyse)

$\pi$  ist  $d$ -gerade 1 km

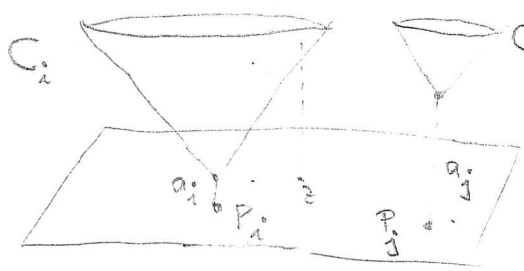
Theorem (Mengen)  $d$ -gerade Pfade zwischen beliebige Punkten,

falls: (i)  $(M, d)$  vollständig

(ii)  $\forall a, c \in M \exists b \in M: b \neq a, c$  und  $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$   
 ↑  
 Zwischenpunkt

Andere Distanzmaße: Gewichte, individuell pro Site

1) additiv:

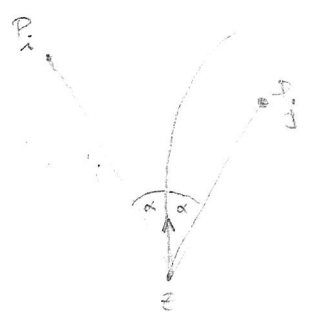


verspätet Anree

$$d_{p_i}(z) = |z p_i| + a_i$$

↑  
kann auch < 0 sein

Bisektoren:



$$|z p_i| + a_i = |z p_j| + a_j$$

$$\Rightarrow |z p_i| - |z p_j| = a_j - a_i \quad (\text{Konst.})$$

$\Rightarrow$  Bisektor folgt Mittelsenkrechten

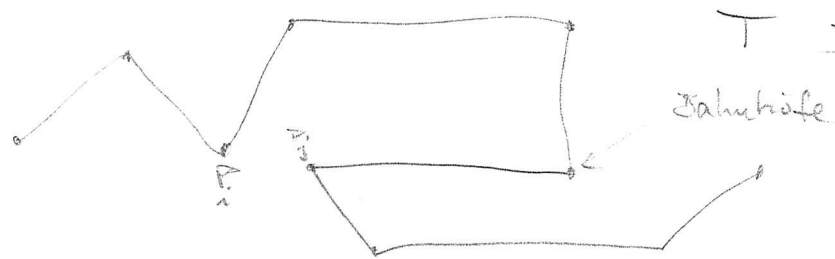
$\Rightarrow$  Hyperbel  
mit Brennpunkt im Site  $p_j$   
mit größtem Gewicht  $a_j$

näher zu beiden Sites  
gleich schnell

$\rightarrow$  BTD.

Thm  $\forall$  für Punkte mit additiven Gewichten in Zeit  $O(n \log n)$

Anwendung Vertx.-to-Vertx Dilatation eines polygonalen Kette



T Bahnstrecke

Bahnhöfe

Maß für Güte der Verbindung:

$$\delta(T) = \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|T_i^{d_j}|}{|p_i p_j|}$$

Teilstück von  $T_i$  nach  $p_j$

Dilatation von T  
(nicht geom. Dil.)

Geben  $T, \kappa > 1$

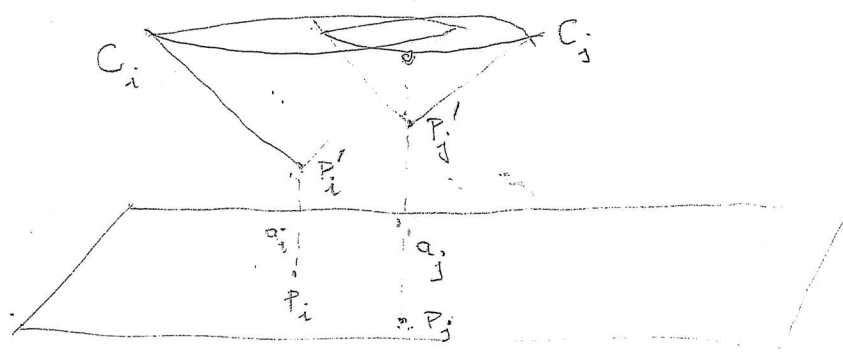
Frage  $\delta(T) \leq \kappa$  ?

$$\Leftrightarrow \forall i < j: \kappa \geq \frac{|T_i^{d_j}|}{|p_i p_j|} = \frac{|T_i^{d_j}| - |T_i^{d_i}|}{|p_i p_j|}$$

$$\Leftrightarrow \forall i < j: |p_i p_j| + \underbrace{\frac{|T_i^{d_i}|}{\kappa}}_{=: a_i} \geq \underbrace{\frac{|T_i^{d_i}|}{\kappa}}_{=: a_i}$$

Alg Geo 22.5  
 $\Leftrightarrow \forall i < j$

(100.2)



$P_j'$  liegt unterhalb von Kegel  $C_i$

Frage gilt für alle  $i < j$   $|P_i P_j'| + a_i \geq a_j$

$\Leftrightarrow P_j'$  liegt auf unterer Kante aller Kegel  $C_i$

$a_j < a_k \Rightarrow P_j'$  liegt unterhalb aller  $C_k$

$\Rightarrow$  Vorzeichen-Änderung von  $P_j'$  im additiv gewichteten  $\mathbb{V}$  der  $P_i$  ist nicht leer. (kann bei diesem Diagramm vorkommen) (\*)

in Zeit  $\mathcal{O}(n \log n)$  lösen

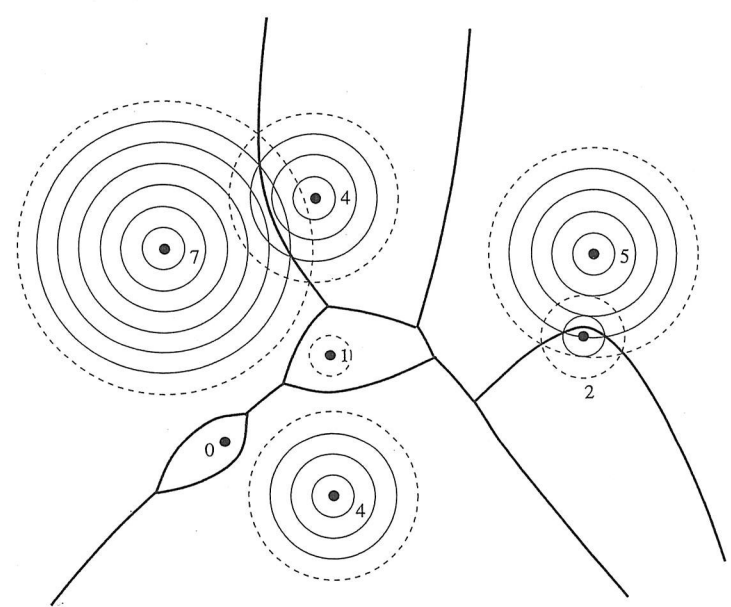
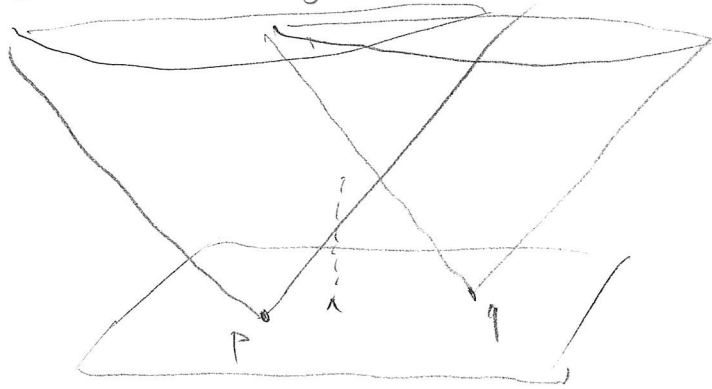


Figure 7.19. Additively weighted Voronoi diagram for seven sites. Numbers express site weights (radii)  $w_p = -a_p$ . (Dashed circles  $\sigma_p$  are intersections of the cones  $C_p$  with the  $xy$ -plane.) A 'hot' real-world interpretation is that grass fires starting at locations  $p$  at times  $a_p$  meet in the hyperbolic region borders (Calabi and Hartnett [176]). In a 'cool' interpretation the edges of the diagram are viewed as the interference pattern of waves emanating from pebbles  $p$  tossed at times  $a_p$  into a quiet pond.

Illustration zu (\*) auf voriger Seite

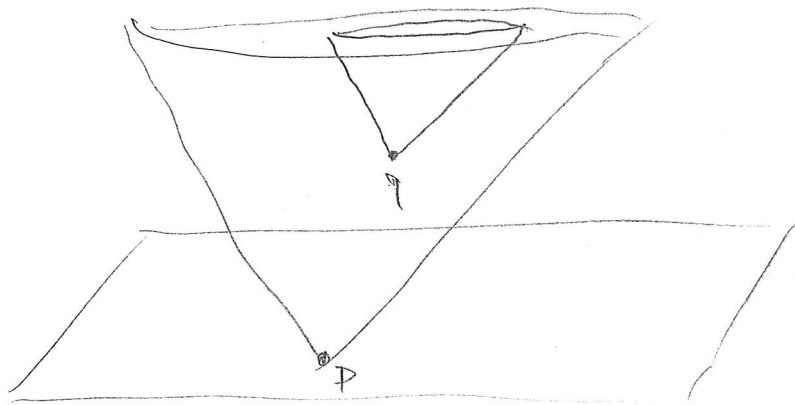


$L_2$ -Vorzeichendiagramm:  
untere Kante solcher Kegel

Unterschied bei additiven Gewichte

Klar:  $q$  tritt nicht in der unteren  
Kante des Kegel auf

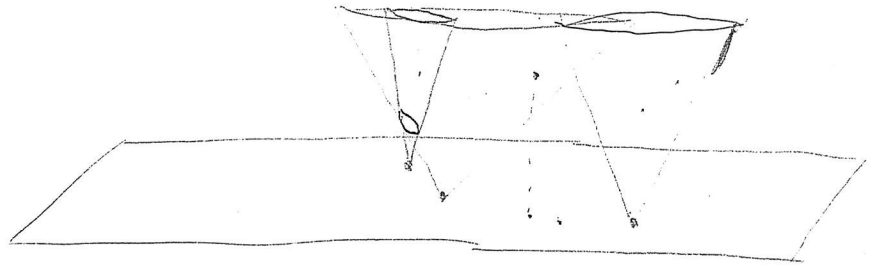
$\Rightarrow$  Vorzeichen-Region von  $q$  ist leer!



2) multiplikativ  
 18y 6es  
 22.7

$$d_f(z) := \frac{|pz|}{w_f}$$

mit  $w_f > 0$

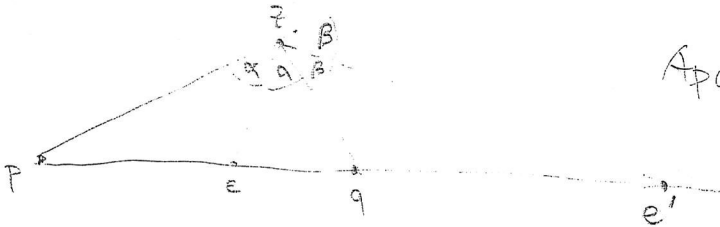


grösseres  $w_f \Leftrightarrow$  grössere Öffnungswinkel  
 = schmalere Krone

Bisektoren flache Kegel werden vom staten durchbohrt

$\Rightarrow$  Bisektoren von zwei Punkten mit  $w_p = w_q$  ist geraden Kreise  
 um den Punkt mit kleinerem Gewicht.  
 Welche? Für jedes  $z \in$  Bisektor:

$$\frac{|pz|}{|qz|} = \frac{w_p}{w_q} =: r$$



Apollonius:  $\frac{|pe|}{|eq|} = \frac{|pz|}{|zq|} = r$

(innerer Winkelbisektor)

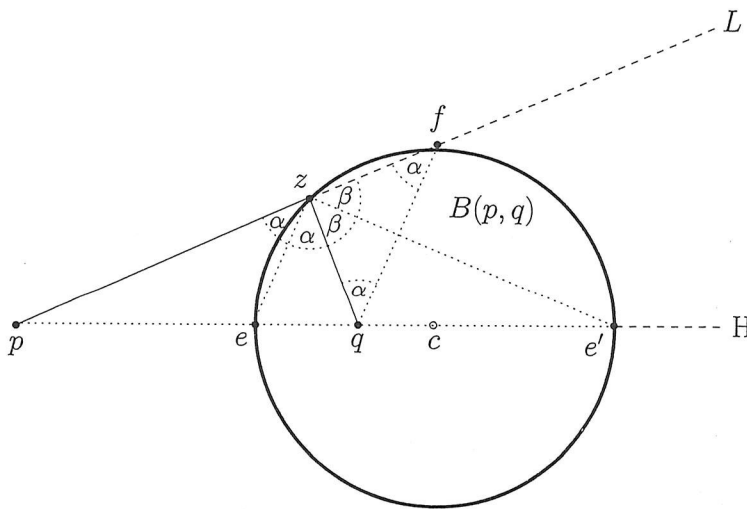


Figure 7.20. An Apollonius circle bisecting the multiplicatively weighted sites  $p$  and  $q$  in the plane.

Aly Geo 22.8

und  $\frac{|pe'|}{|qe'|} = \frac{|p'q|}{|q'p|} = r$

(äußere Winkelhalbierende)

100.3

Nach Konstruktion:  $ze, ze'$  rechtwinklig, d.h.  $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\Rightarrow z$  auf Kreis durch diametrale Punkte  $e, e'$

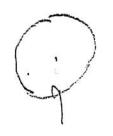
"Apolloniuskreis"

$\rightarrow z$  ist

$\Rightarrow$  Voronoi-Regionen haben Löcher. (nicht einfach zugeordnet)  
Branchen nicht immer zusammenhängend  
 für Sem: Bild

Trianguläre Konsequenz

Thm VD von  $n$  multiplikativen gewichteten Punkten kann  $\Theta(n^2)$  viele Kanten / Flächen / Faces haben und in dieser Zeit berechnet werden.



Literatur: I. Aurenhammer, P. Kirk, S.T. Lee

Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations  
 World Scientific, 2013

Okabe, Boots, Sugihara

7.4. Weighted distance functions

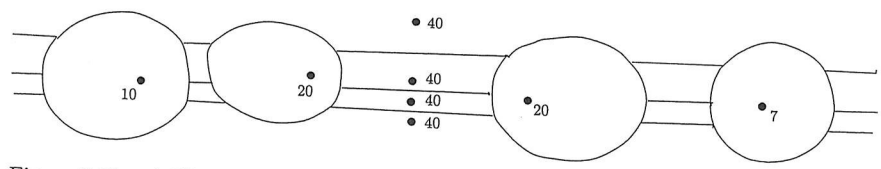
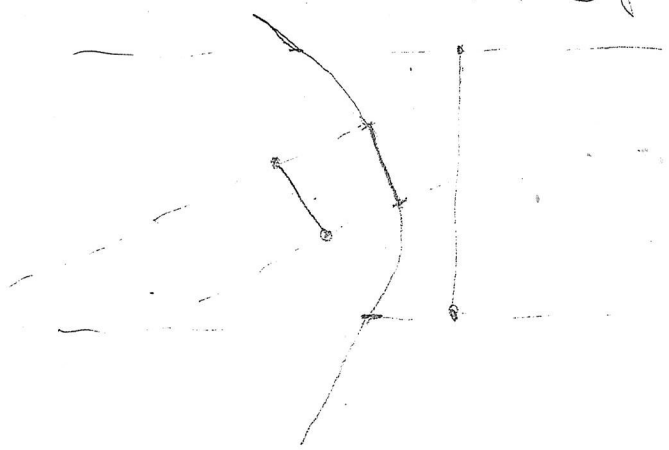


Figure 7.21. A Voronoi diagram of  $n$  point sites with multiplicative weights can be of complexity  $\Theta(n^2)$ . Numbers indicate site weights.



Bisektoren: max 7 Segment von Gerade und Parabel



hier: 5

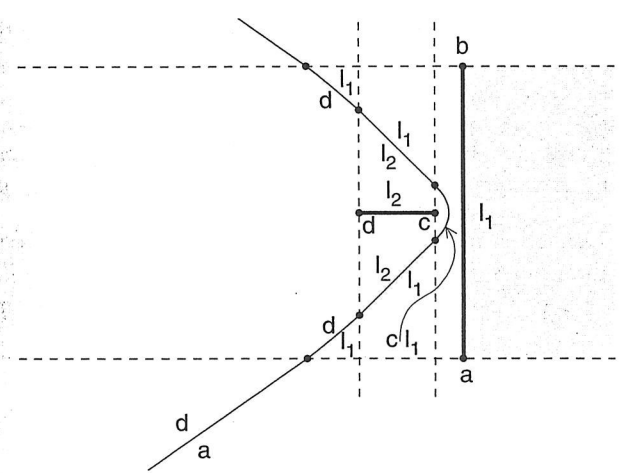
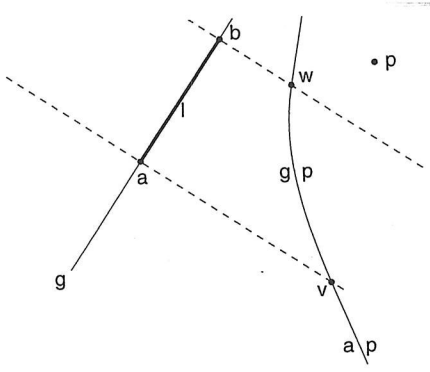
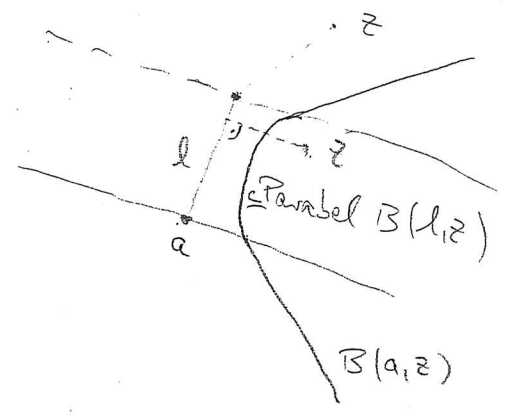
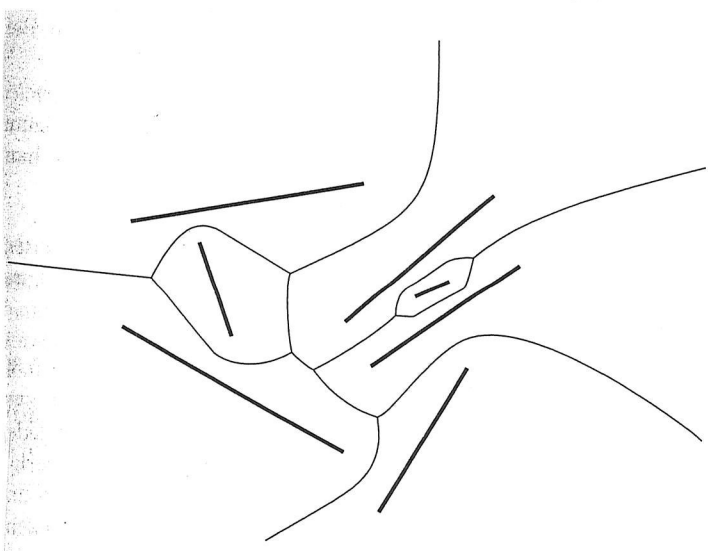


Abb. 5.29 Der Bisektor  $B(l, p)$  eines Punktes  $p$  und eines Liniensegmentes  $l$  besteht aus drei Segmenten: einem Parabelstück und zwei Halbgeraden.

Abb. 5.30 Hier besteht der Bisektor der beiden Liniensegmente aus sieben Stücken.

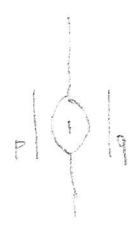


Struktur!

Abb. 5.31 Ein Voronoi-Diagramm von sieben Liniensegmenten.

St. Kanten anders als für Punkte:

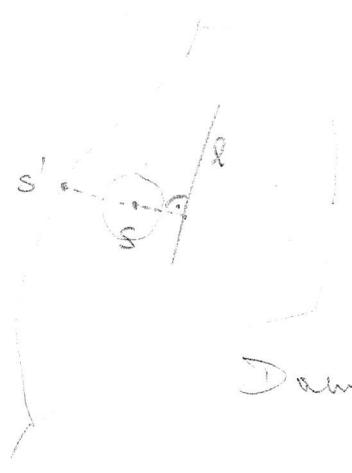
zwei Kanten  $= \mathbb{B}(p, r)$



Interessante Anwendung: Planung kollisionsfreier Bahnen für kreisförmigen Roboter in Anwesenheit von Hindernissen als Hindernisse in Box

Idee: Bewegung entlang der Vorwärts-Kante maximieren (Sicherheits-) Abstand zu den nächsten Hindernissen

Start/Ziel: falls nicht auf Vorwärts-Kante



Wenn Roboter in  $s$  stehen kann, kann er auch halt nach  $s'$  gelang

Für jede Kante von  $v(s)$  Bohrer'sche Entfernung Reduktion  
Dann auf Testgraph Breite suchen

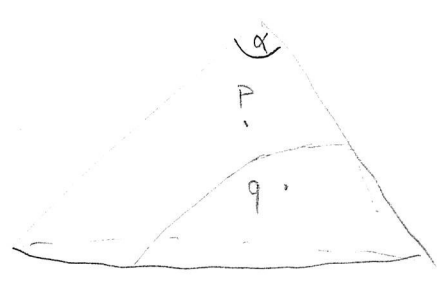
Thm 5.29  $\exists$  kollisionsfreie Bahn  $s-t \iff$

- i) Roboter kann in  $s$  &  $t$  stehen
- ii) Es gibt Weg von  $s'$  nach  $t'$  im reduzierten VD

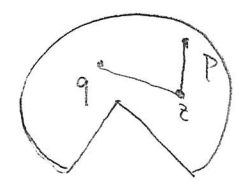
Thm 5.30 in Zeit  $O(n \log n)$  test.

5.5.3 Andere Räume

schneiden / aufrollen:  
kürzeste Pfade auf Kegel werden Geraden

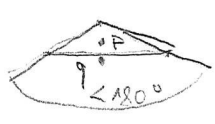


P.D Punkte auf Kegel



Aber: Für Topwinkel  $\alpha < 60^\circ$  kann es geschlossene Bahnen geben

Komplexität:  $O(n^2)$  in Zeit  $O(n \log n)$  mit Circular Sweep.



$\rightarrow$

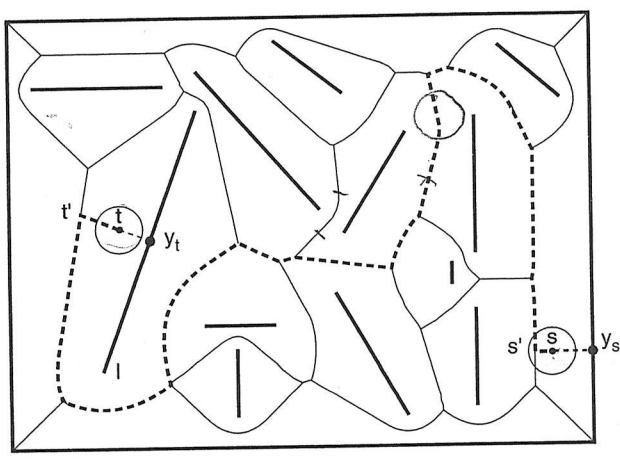


Abb. 5.33 Ein kreisförmiger Roboter soll von  $s$  nach  $t$  bewegt werden, ohne daß er zwischendurch mit einem der Hindernisse kollidiert.

7.1. Generalized spaces

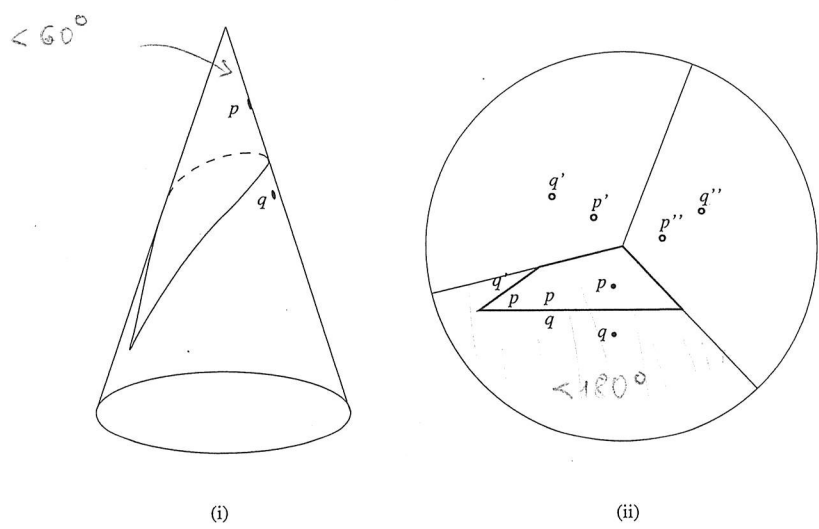


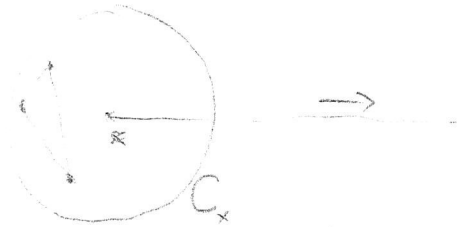
Figure 7.1. A cone sliced and unfolded, showing the bisector of  $p$  and  $q$ .

→  $L_2$ -VD für  $n$  Punkte in  $\mathbb{R}^d$ :

Wissen:  $ch(S)$  kann  $n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$  Facets haben

↳ bestimmt durch  $d$  Punkte

die Facets der Kugel durch diese  $d$  Punkte bilden eine Gerade

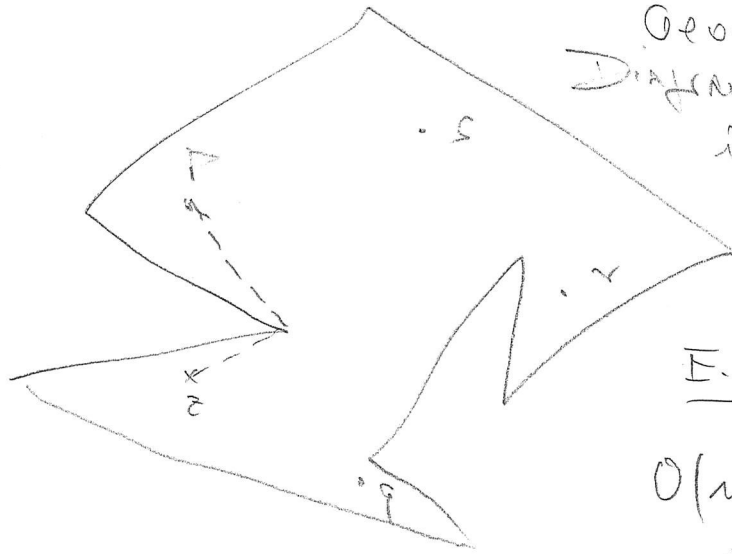


bewegt man  $x$  nach rechts, wird  $C_x$  irgendwann zum Ger

→ Voronoi-Kante

Also: # Voronoi-Kante  $\in \Omega(n^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$  im besten Fall

Brückel



Geodätisches Voronoi-Diagramm von  $n$  Punkten in einfachen Polygonen mit  $n$  Ecken

E. Oh '19

$O(n + n \log n)$  Zeit optional