1.Aufgabe: Minimal aufspannender Baum **10+10 Punkte**

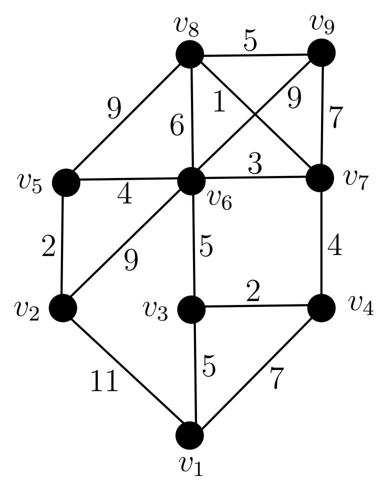

Abbildung 1: Der Graph G mit Kantengewichten und Knoten v.

(a) Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Prim einen MST im Graphen G aus Abbildung 1. Starte dabei mit dem Knoten v_1 und gib die Knoten in der Reihenfolge an, in der sie aufgenommen werden, sowie den berechneten MST.

(b) Sei $H = (V, E)$ ein Graph, $c : E \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ eine Kantengewichtsfunktion und T ein minimal aufspannender Baum in H. Nun wird ein Knoten v mit einigen inzidenten Kanten zu H hinzugefügt; auch diese Kanten haben Kantengewichte aus $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Beweise oder widerlege: Einen MST für $H \cup \{v\}$ erhält man immer, indem man eine zu v inzidente Kante mit minimalem Gewicht zu T hinzufügt.

2.Aufgabe: Zweitkürzester Weg **15 Punkte**

Gegeben sei ein gerichteter Graph G mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$, und zwei Knoten $s, t \in V(G)$. Der kürzeste Weg P von s nach t sei eindeutig. Wie kann man den kürzesten, von P verschiedenen Weg von s nach t in polynomialer Zeit bestimmen? Beschreibe zum einen, wie der Weg gefunden wird und warum die Zeit polynomial ist und begründe zum anderen, dass es sich um den kürzesten von P verschiedenen Weg handelt.

3.Aufgabe: Maximaler Fluss **10+5+5 Punkte**

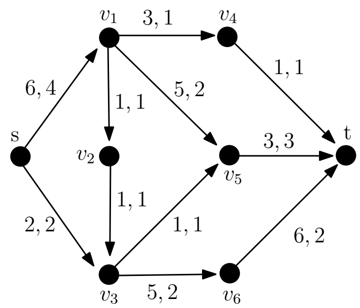

Abbildung 2: Das Netzwerk (G, u, s, t). Die Tupel an den Kanten haben die Form (Kapazität, Flusswert).

(a) Gib den Residualgraphen und die Residualkapazitäten zum Netzwerk (G, u, s, t) aus Abbildung 2 an.

(b) Führe eine Iteration des Algorithmus von Edmonds und Karp aus. Gib dazu den augmentierenden Pfad und das Netzwerk mit den neuen Flusswerten an.

(c) Gib einen minimalen s-t-Cut an. Welchen Wert hat der Cut?

4.Aufgabe: Maximales Matching in allgemeinen Graphen **5+10 Punkte**

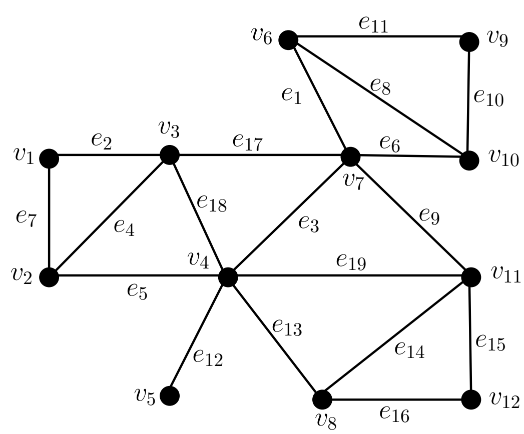

Abbildung 3: Graph G.

(a) Finde ein möglichst großes Matching im Graphen G aus Abbildung 3.
(Hinweis: Dazu braucht kein Algorithmus angewendet zu werden).

(b) Begründe, dass jedes Matching mindestens zwei Knoten aus G *nicht* enthält.

5.Aufgabe: Edge Cover **5+10 Punkte**

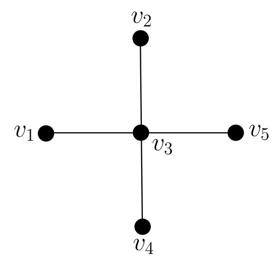

Abbildung 4: Graph G.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Edge Cover* in G ist eine Menge $EC \subseteq E$, so dass jeder Knoten zu mindestens einer Kante aus EC inzident ist.

(a) Finde im Graphen G aus Abbildung 4 ein kardinalitätsminimales Edge Cover und ein kardinalitätsmaximales Matching. Begründe dabei die Minimalität bzw. Maximalität jeweils kurz.

(b) Sei $H = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Sei EC ein kardinalitätsminimales Edge Cover und M ein kardinalitätsmaximales Matching in H. Zeige: $|EC| \leq |V| - |M|$.

6.Aufgabe: Fragen **3+3+3+3+3 Punkte**

(a) Vergleiche den Moore-Bellman-Ford-Algorithmus mit dem Algorithmus von Dijkstra. Nenne einen Vorteil und einen Nachteil des ersten gegenüber dem zweiten.

(b) Gib eine möglichst große Menge von Graphen an, für die der Blossom-Algorithmus ein perfektes Matching findet.

(c) Welche Laufzeitkomplexität hat in Gegenwart von negativen Kantengewichten

   (i) die Bestimmung eines minimal aufspannenden Baumes.

   (ii) die Bestimmung von kürzesten Pfaden.

   (jeweils mit Begründung)

(d) Welche Worst-Case-Laufzeit hat der Algorithmus von Ford und Fulkerson? Warum?

(e) Ist das Problem, einen minimalen s-t-Cut in einem Netzwerk (G, u, s, t) zu finden, in polynomialer Zeit lösbar? Warum?

Viel Erfolg!!!