Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — SS 2007

Prof. Dr. Henning Esser — Dipl. Math. Thies Frings, Dr. Normann Pankratz,
Dipl. Math. Christian Plesken

Klausur Numerisches Rechnen für Informatiker/Physiker 16. August 2007

- Hilfsmittel: keine (nur dokumentenechtes Schreibgerät)
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sieben Aufgaben
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich, von denen mindestens 10 aus Aufgabe 1 sein müssen. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Dienstag, den 21. August 2007, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekannt gegeben. Die Klausureinsicht findet am Freitag, den 24. August 2007, von 9:00 – 11:00 Uhr im R149 (Hauptgebäude, 1. Stock) statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.
Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren (ab Klausurdatum) innerhalb von 3 Wochen bei Frau Jarausch (Raum 104.1 im Hauptgebäude) in der Sprechzeit abgeholt werden.

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: ______________________________

Korrekturvermerke

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	$\sum$

Aufgabe 1

Nr.	Frage	wahr	falsch
1.	**Banach-Fixpunktsatz:**		
	(i) Eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene und konvexe Menge erfülle die folgende Bedingung: $\\|\varphi(x) - \varphi(y)\\| \leq \kappa \\|x - y\\|, \quad \forall x, y \in G$ mit $0 < \kappa < 1$. Dann hat φ einen eindeutigen Fixpunkt in G.	☐	☐
	(ii) Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D$. Erfüllt f die Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes, so konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x^0 \in D$ gegen die Nullstelle von f.	☐	☐
2.	**Norm und Kondition:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
	(i) Die Kondition bezüglich der Norm $\\|\cdot\\|_2$ ist definiert als $\kappa_2(A) = \frac{1}{2} \\|A\\|_2 \cdot \\|A^{-1}\\|_2$.	☐	☐
	(ii) Für die Spaltensummennorm $\\|A\\|_1$ gilt $\\|A\\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$.	☐	☐
3.	**Lösung linearer Gleichungssysteme:**		
	(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $PA = LR$, wobei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Permutationsmatrix sowie $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix bezeichnen. Dann gilt: $det(A) = det(P)^{-1} \cdot det(L) \cdot det(R)$.	☐	☐
	(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, dann kann A durch die Cholesky-Zerlegung in $A = LDL^T$ zerlegt werden mit einer unteren Dreiecksmatrix L und Diagonalmatrix D, wobei der Aufwand geringer ist als bei einer LR-Zerlegung.	☐	☐
4.	**QR-Zerlegung:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
	(i) Die QR-Zerlegung von A ist eindeutig, $A = QR$ mit orthogonaler Matrix Q und rechter oberer Dreiecksmatrix R.	☐	☐
	(ii) Seien $A, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und M orthogonal. Dann gilt für die Konditionszahl $\kappa_2(MA) = \kappa_2(A)$.	☐	☐
5.	**Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
	(i) Erfüllt A das Spaltensummenkriterium, so konvergieren Gesamt- und Einzelschrittverfahren.	☐	☐
	(ii) Das Zeilensummenkriterium ist genau dann erfüllt, wenn $\sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} < a_{ii} \ \forall i \in \{1, .., n\}$ gilt.	☐	☐

Nr.	Frage	wahr	falsch
6.	**Lineare Differentialgleichungssysteme:** Sei I ein offenes Intervall und $W(x)$ die Wronski-Matrix zu einem Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$ mit $x \in I$ mit $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b(x) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:		
	(i) Die Wronski-Matrix $W(x)$ löst das homogene Differentialgleichungssystem $y'(x) = A(x)y(x)$.	☐	☐
	(ii) Die Wronski-Matrix $W(x)$ ist nicht eindeutig.	☐	☐
7.	**Lineare Ausgleichsprobleme:** Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem: Minimiere $\|Ax - b\|_2$ mit Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und rechter Seite $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$.		
	(i) Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist eindeutig, wenn $rang(A) = n$.	☐	☐
	(ii) Die Normalengleichungen $A^TAx = A^Tb$ sind gut konditioniert, falls $\kappa(A) \gg 1$.	☐	☐
8.	**Interpolation:** Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ Stützstellen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, k-mal differenzierbare Funktion.		
	(i) Es gibt eine Permutation π von $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so dass das Interpolationspolynom $P(f\|x_0, \ldots, x_n) \neq P(f\|\pi(x_0), \ldots, \pi(x_n))$.	☐	☐
	(ii) Sind zusätzlich zu den Stützwerten $f(x_i)$ auch noch die Ableitungen $f^{(l)}(x_i)$ mit $l = 1, \ldots, k$ zu interpolieren, so spricht man von einem Hermite-Interpolationsproblem.	☐	☐
9.	**Newton-Verfahren:** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.		
	(i) Für jedes Nullstellenproblem kann eine Lösung durch das Newton-Verfahren iterativ angenähert werden.	☐	☐
	(ii) Bei der Durchführung des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung von f muss in jedem Schritt die Jakobische Matrix von f invertiert werden.	☐	☐
10.	**Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme:** Sei $y'(x) = f(y, x)$ und $y(x^0) = y_0$		
	(i) Jede Differentialgleichung höherer Ordnung kann zu einem System erster Ordnung reduziert werden.	☐	☐
	(ii) Der Iterationsschritt des impliziten Euler-Verfahrens lautet $y^{k+1} = y^k + hf(x^{k+1}, y^{k+1}), x^{k+1} = x^k + h$, mit Schrittweite h.	☐	☐

20 Punkte

Aufgabe 2
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -12 \\ -3 & 0 & -14 \\ 12 & 24 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung aus Aufgabenteil a).

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen P, L und R aus Aufgabenteil a).

6+1+3=10 Punkte

Aufgabe 3
Es sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Prüfen Sie, daß das Einzel- und das Gesamtschrittverfahren für jeden beliebigen Startwert konvergieren.

b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^0 = (1, 2, 0)^T$ zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens (Gesamtschrittverfahren) durch.

c) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^0 = (1, 2, 0)^T$ einen Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) durch.

d) Zeigen Sie, daß die Iterierte $x^{(m)}$ des Jacobi-Verfahrens für die angegebene Matrix A die Abschätzung

$$\left\| x^* - x^{(m)} \right\|_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^m \left\| x^* - x^{(0)} \right\|_1$$

erfüllt, wobei $x^* = A^{-1}b$ ist.

1+4+2+3=10 Punkte

Aufgabe 4
Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, daß die Meßwerte

i	1	2	3
x_i	-1	0	1
f_i	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die Modellfunktion

$$f(x) = \alpha\Big(3 - 3\cdot(x+1) + \frac{7}{2}\cdot(x+1)(x)\Big) + \beta\Big(7 + 5\cdot(x+1) - 8\cdot(x+1)(x)\Big)$$

optimal approximiert werden.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem auf.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Givens-Verfahren (Householder oder Normalengleichungen 0 Punkte!).

c) Berechnen Sie das Residuum des Ausgleichproblems.

2+7+1=10 Punkte

Aufgabe 5
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ und $x_2 = 9$.

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.

b) Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 4$ aus.

c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |P(f|x_0, x_1, x_2)(x) - f(x)|$ möglichst genau ab.

Hinweis: Für $\omega(x) := (x)(x-3)(x-9)$ gilt $\max\limits_{x\in[x_0,x_2]} |w(x)| < \frac{115}{2}$.

d) Berechnen Sie das Hermite-Interpolationspolynom $H(x)$ zu den Interpolationsbedingungen $H(x_0) = f(x_0)$, $H(x_1) = f(x_1)$, $H(x_2) = f(x_2)$ und $H'(x_0) = f'(x_0)$.

4+1+3+2=10 Punkte

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $y'(t) = A \cdot y(t) + F(t)$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, \quad y_0 := y(0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

11 Punkte

Aufgabe 7
Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + ty + 1 = 0, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

Berechnen Sie

a) mit dem expliziten Euler–Verfahren und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ und

b) mit dem impliziten Euler–Verfahren und der Schrittweite $\tilde{h} = 1$

jeweils eine Approximation von $y(2)$, $y'(2)$.

5+4=9 Punkte