



**MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung
S2 „Grundbildung und Standards“**

**VERMESSUNGSAUFGABEN IN DER
5. KLASSE:
GRUNDBILDUNG IN DER
TRIGONOMETRIE UND ARBEITEN IM
GELÄNDE**

Mag. Gabriela RÖSLER

GRg 10, Ettenreichgasse 41 - 43

Wien, 25. Juni 2006

INHALTSVERZEICHNIS

ABSTRACT	4
1 EINLEITUNG	5
2 DIE LEITLINIEN UND DAS KONZEPT	7
2.1 Leitlinien für die Auswahl von Inhalten	7
2.1.1 Weltverständnis	7
2.1.2 Wissenschaftsverständnis	7
2.1.3 Berufliche Orientierung und Studierfähigkeit	7
2.2 Leitlinien für die Auswahl von Methoden	8
2.2.1 An Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen	8
2.2.2 An authentischen Problemen anwendungsbezogen lernen	8
2.2.3 Im sozialen Umfeld lernen	8
2.2.4 Mit instruktionaler Unterstützung lernen	8
3 DAS GRUNDBILDUNGSKONZEPT	9
3.1 Grundvorstellungen und Grundwissen	9
3.2 Grundfähigkeiten	10
4 DER UNTERRICHTSVERSUCH	12
4.1 Der Einstieg	12
4.2 Die Vermessung des Schulgartens	14
4.3 Weitere Inhalte:	17
5 DER TEST	18
5.1 Abschlusstest zur Evaluation des Projektes:	18
5.2 Ausarbeitung des Testes	20
5.3 Testauswertung	23
SCHLUSSBEMERKUNGEN	27
6 LITERATUR	28

ABSTRACT

Das Projekt Grundvorstellungen zur Trigonometrie in der 5. Klasse AHS hat zwei grundlegende Motivationen:

Erarbeitung eines Grundvorstellungskonzeptes gemeinsam mit Prof. Günther MALLE (Fachdidaktik UNI – Wien).

Die praktische Erprobung dieser Konzepte in der 5. Klasse mit Vermessung des Schulgartens.

Die didaktischen Konzepte und Unterlagen, sowie der abschließende Test der Grundvorstellungen werden hier vorgestellt.

Schulstufe: 9. Schulstufe (5. Klasse AHS/Rg)

Fächer: Mathematik

Kontaktperson: Mag. Gabriela RÖSLER

Kontaktadresse: GRg10, Ettenreichgasse 41 - 43

1 EINLEITUNG

„Grundvorstellungen sind für (mathematische) Allgemeinbildung in erster Linie deshalb wichtig, weil sie unverzichtbar für mathematisches Problemlösen und für das Anwenden von Mathematik sind.“ (Günther MALLE)

Motivation des Projektes aus dem Lehrplan:

Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.

Beiträge zu den Bildungsbereichen:

Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen. Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden

Lernen in anwendungsorientierten Kontexten

Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben.

Aus dem Lehrplan für die 5. Klasse:

Trigonometrie

- Definieren von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)
- Kennenlernen von Polarkoordinaten

Motivation des Projektes aus allgemeinen Überlegungen:

[...] Man kann sich fragen, ob es in den ersten fünf Jahren des Curriculums überhaupt so etwas wie einen mathematischen Unterricht gibt. Was dort gelehrt wird, hat man früher völlig zu Recht als "Rechnen" bezeichnet. Auch heute noch werden die Kinder jahrelang fast ausschließlich mit öden Routinen gepeinigt, ein Verfahren, das auf die Epoche der Industrialisierung zurückgeht und inzwischen völlig veraltet ist. Bis um die Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts verlangte der Arbeitsmarkt von der Mehrzahl der Beschäftigten nur drei rudimentäre Fertigkeiten: Lesen, Schreiben und Rechnen. Die Elementarschule war dazu da, notdürftig alphabetisierte Arbeitskräfte zu liefern. Das dürfte die Erklärung dafür sein, dass sich in der Schule ein rein instrumentelles Verhältnis zur Mathematik durch- und festgesetzt hat. Nun will ich nicht bestreiten, dass es sinnvoll ist, das Einmaleins zu beherrschen und zu wissen, wie man einfache Dreisatz- oder Bruchrechnungen auszuführen hat. Aber mit mathematischem Denken hat das alles nichts zu tun. Es ist so, als würde man Menschen in die Musik einführen, indem man sie jahrelang Tonleitern üben lässt. Das Resultat wäre vermutlich lebenslänglicher Hass auf diese Kunst. [...] Hans Magnus Enzensberger: „Zugbrücke außer Betrieb“ (Frankfurter Allgemeine Zeitung, 29. 8. 1998)

Wie könnte Unterricht aussehen, der in den Schülerinnen und Schülern keinen lebenslangen Hass auf die Kunst auslöst? Was bedeutet es, im Mathematikunterricht nicht nur Tonleitern zu üben? Ich denke praktisches Arbeiten und Lösen von Problemen, die sich bei diesen praktischen Aufgaben stellen, könnten der Beginn des Verlassens der „Tonleitern“ sein, wenn auch die „Konzertstücke“ sicher der UNI vorbehalten sein werden.



Beginn beim Aufbau der Theodoliten

2 DIE LEITLINIEN UND DAS KONZEPT

2.1 Leitlinien für die Auswahl von Inhalten

2.1.1 Weltverständnis

Anwendung trigonometrischer Aufgaben in verschiedenen Lebensbereichen (*siehe auch Einstiegsaufgabe und die Diskussion dazu*)

2.1.2 Wissenschaftsverständnis

Fähigkeiten zur Abstraktion und Modellbildung werden geschult. Anhand von Alltagsproblemstellungen, die in eine formale Sprache übersetzt werden, werden die Begriffe der Winkelfunktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ zunächst als Zahlenverhältnisse verstanden und gelehrt. (Der Funktionsbegriff wird dann in der 6. Klasse erläutert). Es geht darum, ein konkretes Projekt, nämlich die Vermessung des Schulgartens, mit Hilfe der neu erworbenen mathematischen Kompetenzen zu bewältigen.

2.1.3 Berufliche Orientierung und Studierfähigkeit

An der TU Wien und an der TU Graz werden entsprechende Studien angeboten, das Angebot reicht vom Bakkalaureat bis zum Dipl. Ing. Auch in Deutschland werden entsprechende Studienrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten angeboten.

Auf der Seite des AMS wurden am 25. Juni 2006 zehn freie Stellen angeboten, auf der Seite der deutschen Bundesanstalt für Arbeit wurden am selben Tag 30 freie Stellen angeboten, auf „Jobscout“ am selben Tag 73 freie Stellen.

Stellenbeschreibung der Stellen des AMS: Es werden mehr Stellen für Absolventinnen und Absolventen eine einschlägigen Lehre beziehungsweise Fachschule angeboten, durchwegs werden eine gewisse Flexibilität und Computerkenntnisse erwartet. (z. B.: „HTL, Fachschüler/in oder Facharbeiter/in in den Fachrichtungen Maschinenbau, Kfz-Technik, Elektrotechnik, Geometer o.ä.“ [...] „mindestens 1-2 Jahre Berufserfahrung im Bedienen von CNC-Maschinen, computergesteuerten Anlagen, 3D-Konstruktion von Bauteilen“ oder „ [...] EDV-Kenntnisse, gutes 3D-Vorstellungsvermögen“, „Englisch Grundkenntnisse“, „[...] Ortungebunden und mobil (Führerschein + KFZ), abgeleiteter Präsenzdienst bei männlichen Bewerbern, pflichtbewusst, strebsam, kommunikationsfähig“, „mit abgeschlossener Ausbildung (Lehre, Fachhochschule) oder ausreichend Berufserfahrung“, „abgeschlossenen Lehrausbildung und Instrumentenerfahrung“)

Für die Absolventinnen und Absolventen eines Studiums: „Gesucht wird ein/e Absolvent/in Studium Vermessungswesen - Vertiefung Ingenieurgeodäsie für die eigenständige Abwicklung ingenieurgeodätischer Projekte. Selbständigkeit, Teamfähigkeit, Kommunikationsfähigkeit, Lernbereitschaft, Flexibilität, Belastbarkeit und Reisebereitschaft werden vorausgesetzt. Autocad-Kenntnisse von Vorteil. Führerschein B ist erforderlich.“

2.2 Leitlinien für die Auswahl von Methoden

2.2.1 An Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen

Die Schülerinnen und Schüler werden sich vielleicht noch keine Gedanken über Probleme der Vermessung gemacht haben. Hier wird ein ganz neues Feld der mathematischen Anwendungen eröffnet, das aber durch seine gleichzeitige Umsetzung in die Praxis konkret wird. Das ist bei den Trigonometrischen Funktionen unmittelbar möglich, daher nutze ich diese Chance.

2.2.2 An authentischen Problemen anwendungsbezogen lernen

Die Vermessung des Schulgartens beruht auf der Verwendung eines alten Planes der Schule, zu dem die dritte Dimension hinzugefügt werden soll. Ich hoffe, am Ende auch einen geeigneten Platz zum Aufstellen des Modells zu finden, sodass alle Schülerinnen und Schüler des GRg10 die Ergebnisse der Arbeit anschauen können.

2.2.3 Im sozialen Umfeld lernen

Ein Vorversuch, den ich im Hinblick auf das heurige Projekt in der vorjährigen 6. Klasse („alter“ Lehrplan) gemacht habe, hat gezeigt, dass die Organisation dieser Aufgabe eher schwierig war. Die nötige Präzision und Exaktheit im Zusammenspielen der verschiedenen Vermessergruppen zu erreichen war schwierig. Hier steht vor allem das gemeinsame Problemlösen im Mittelpunkt.

2.2.4 Mit instruktionaler Unterstützung lernen

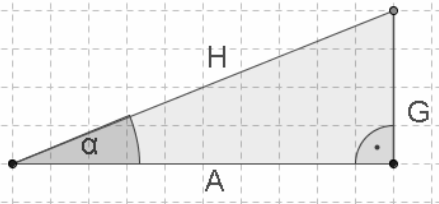
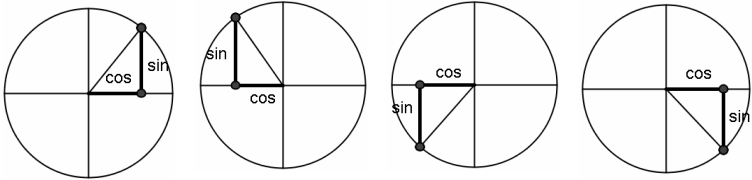
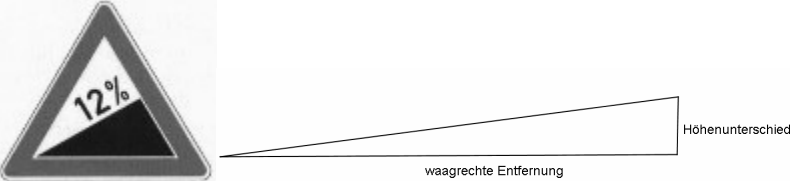
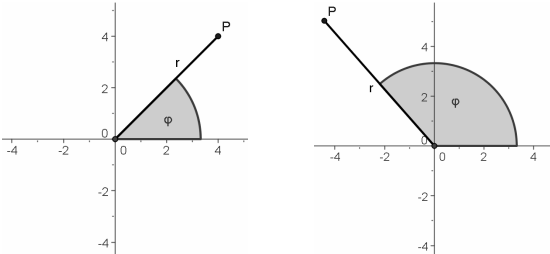
Da das Stoffgebiet den Schülerinnen und Schülern neu war, stand die Instruktion am Beginn im Vordergrund. Unterrichtsmaterialien sind beigelegt.



3 DAS GRUNDBILDUNGSKONZEPT

Die Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten verstehen sich in im Schwierigkeitsgrad aufsteigender Reihenfolge geordnet. Das bedeutet: die erste Grundvorstellung bzw. die erste Grundfähigkeit wird als die absolut grundlegende angesehen, die von jedem Schüler und jeder Schülerin einer AHS auch nach längerer Zeit noch beherrscht werden sollte. Unmittelbar ist bei den Grundvorstellungen Stufe 2 anzustreben, aber im Sinne der Nachhaltigkeit (was bleibt noch 20 Jahre nach der Reifeprüfung?) kann man sich auch mit Stufe 1 zufrieden geben. Die Stufen sind so aufgebaut, dass man Stufe 2 gegebenenfalls nachschlagen kann.

3.1 Grundvorstellungen und Grundwissen

Stufe1	Stufe2
<p>Sinus, Cosinus und Tangens sind Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, also Zahlen.</p>	 $\sin \alpha = \frac{G}{H}$ $\cos \alpha = \frac{A}{H}$ $\tan \alpha = \frac{G}{A}$
<p>Sinus, Cosinus und Tangens können im Einheitskreis dargestellt werden</p>	
<p>Die Steigung einer Straße ist ein Seitenverhältnis</p>	 $\tan \alpha = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{waagrechte Entfernung}}$
<p>Polarkoordinaten bestehen aus der Angabe einer Entfernung r und eines Winkels φ</p>	

Tangens kann durch Sinus und Cosinus ausgedrückt werden	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
Wissen, dass man jedes Dreieck mit Hilfe der Trigonometrie „auflösen“ kann.	Sinussatz : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ kennen Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$ kennen
Wissen, dass der Pythagoreische Lehrsatz ein Spezialfall des Cosinussatzes ist.	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$. Sonderfall ist der Pythagoreische Lehrsatz, denn wenn $\gamma=90^\circ$ ist, ist $\cos \gamma = 0$ und damit lautet der Cosinussatz für rechtwinkelige Dreiecke. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$ und das ist der Pythagoreische Lehrsatz.

Bemerkungen:

- Ein Verhältnis kann man nicht unmittelbar visualisieren, als Strecken im Einheitskreis kann man es sehen und darstellen. Noch besser ist es, zusätzlich zu den Strecken auch Punkte zur Veranschaulichung heranzuziehen, da es ja keine negativen Streckenlängen gibt, negative Koordinaten aber schon.
- Es geht in dieser Jahrgangsstufe nicht um Winkelfunktionen, daher gibt es kein Bogenmaß und auch keine Winkel außerhalb $[0^\circ; 360^\circ]$

3.2 Grundfähigkeiten

Grundvorstellungen und Grundwissen anwenden können. Dazu bietet sich ein dreistufiges Modell an, in dem auf jeder Stufe der Abstraktionsgrad steigt. Im Projekt wird eine Sichere Beherrschung der ersten Stufe angestrebt, in den Anwendungen, die auch im Gelände gemacht wurden, strebe ich Stufe 3 an.

Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3
Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken	Berechnungen in bereits vorgezeichneten Figuren und Körpern	Berechnungen nach selbst angefertigten Zeichnungen.

Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnen können und umgekehrt.

Eigenschaften von Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis ablesen und allenfalls mit den Definitionen begründen können, insbesondere:

- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Ziel des Projektes ist es, diese Grundvorstellungen und Grundfertigkeiten zu entwickeln. Als Evaluation ist der abschließende Test vorgesehen, der allenfalls am Beginn des nächsten Schuljahres in ähnlicher Form wiederholt wird, um Nachhaltigkeit zu überprüfen. Ich erwarte mir auch eine besondere Basis für die Weiterarbeit im Unterricht, mehr Motivation und Sinnbezug.



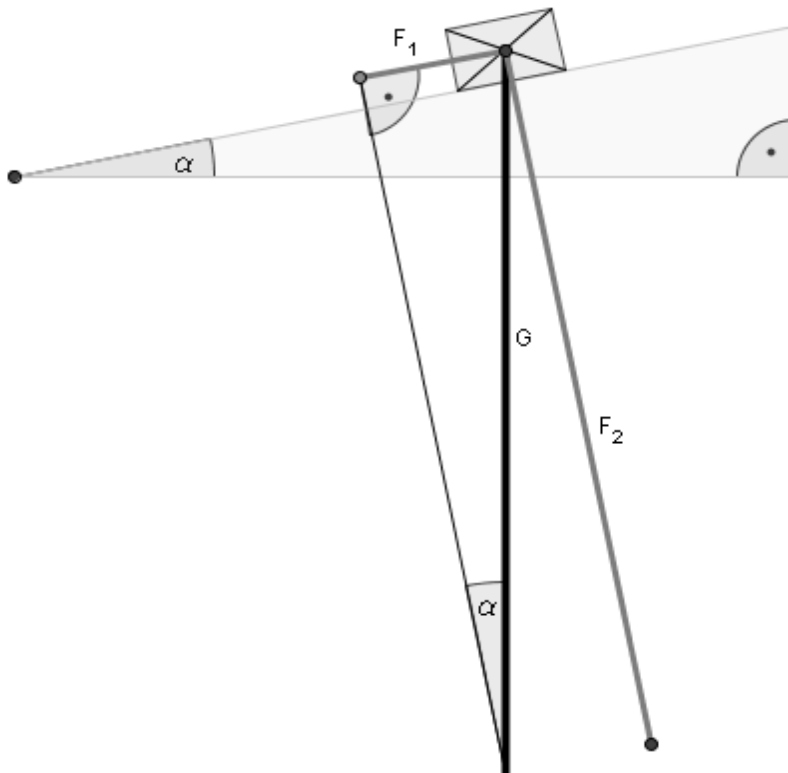
4 DER UNTERRICHTSVERSUCH

4.1 Der Einstieg

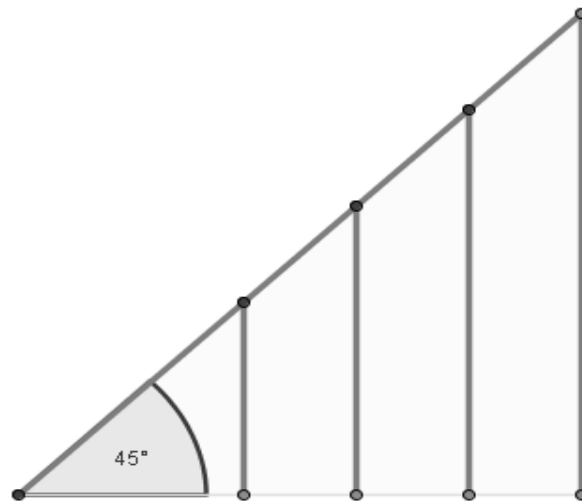
Über die Einstiegsaufgabe haben Prof. Malle und ich lange diskutiert. Sollte man von der Steigung der linearen Funktionen ausgehen, und den Quotienten aus Differenz der Funktionswerte und Differenz der Argumente einfach als Tangens definieren, oder sollte man an einem ganz anderen aber anwendungsorientierten Beispiel versuchen, diese Verhältnisse durch Messungen zu erarbeiten und dann Gesetzmäßigkeiten daraus ableiten?

Wir haben uns für das anwendungsorientierte Beispiel entschieden, das im Materialienzusatzband zu „Mathematik verstehen“ (das Buch wird in dieser Klasse auch als Lehrbuch verwendet!) zu finden ist.

Aufgabe: Ein Schrägaufzug steigt unter $\alpha = 24^\circ$ an. Der Wagen hat das Gewicht $G = 500\text{N}$. Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Geleises hinuntergezogen, und mit welcher Kraft F_2 wird er auf das Gleis gedrückt?



Die zweite Aufgabe war in Gruppen (jede Gruppe untersucht einen anderen Winkel), die Seitenverhältnisse an verschiedenen Winkeln für unterschiedliche Strecken festzustellen und Folgerungen zu ziehen und zu präsentieren. Als Beispiel sei hier der 45° -Winkel angeführt. Weitere Beispiele sowie die Arbeitsblätter findet man im Lehrerbeiheft zu „Mathematik verstehen“ 5



Die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Ausfüllen der Arbeitsblätter waren wider erwarten recht groß.

Einige Nachfragen zur Verwendbarkeit des Beispiels waren etwa: Wozu kann man die Größe der Kraft brauchen, die auf die Schiene drückt? Was bedeutet es praktisch, die Größe der Kraft zu wissen, die „bergab“ gerichtet ist?

Ebenso waren Anfangs die Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck durchaus nicht trivial, auch die Anwendung in Dreiecken, die anders bezeichnet waren oder wo andere Winkel gegeben waren, bereitete Schwierigkeiten.

Als Übungsaufgaben und Hausübung wurden zum Abschluss Berechnungen in ebenen Figuren angestellt.

Als Abschluss der Arbeiten in der Klasse wurden zwei Tests in mathe-online gemacht:

- <http://www.mathe-online.at/tests/trig/elementareDreieckseigenschaften.html>
- <http://www.mathe-online.at/tests/wfun/defWfun.html>

4.2 Die Vermessung des Schulgartens

So sieht unsere Schule in Google – Earth aus:

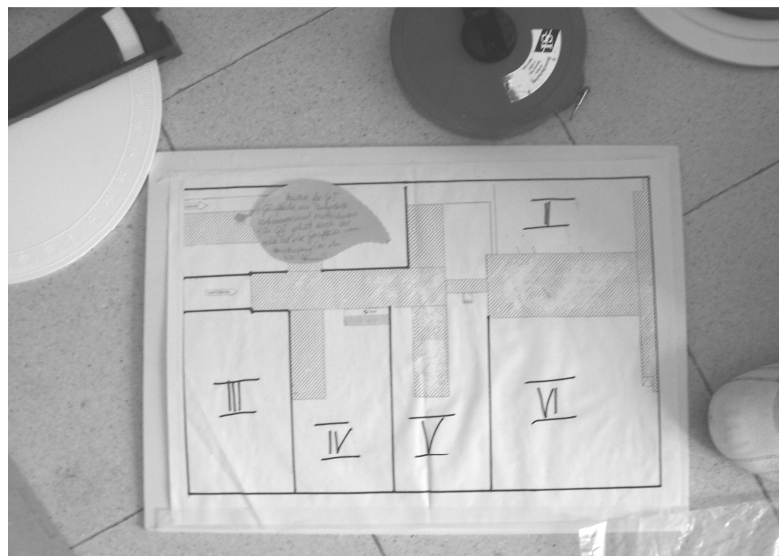


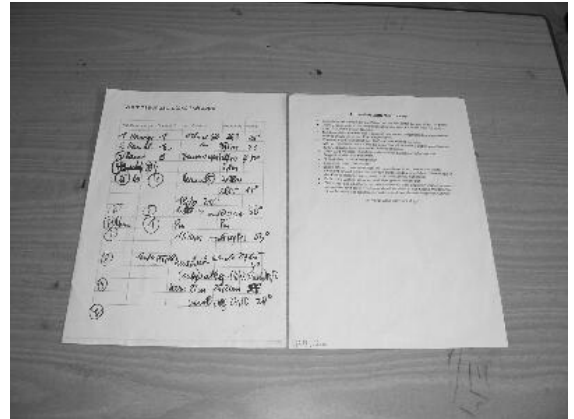
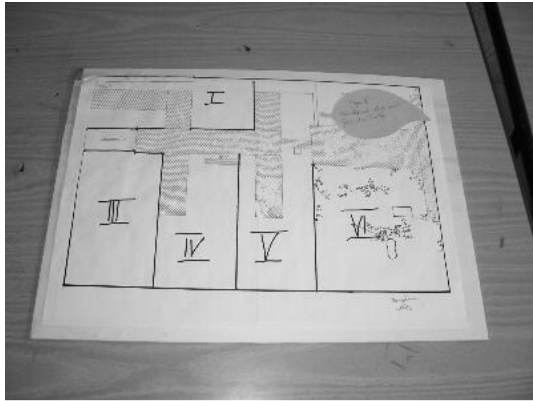
Für die Vermessung des Schulgartens stehen 10 Theodoliten zur Verfügung.



Ein fertiger Plan des Schulgartens wird ausgeteilt, die Gruppen organisieren sich. Gemeinsam werden „Planquadrate“ abgesteckt.

Der Plan „vorher“







4.3 Weitere Inhalte:

Polarkoordinaten, Erweiterung von Sinus, Cosinus und Tangens, Sinus und Cosinus im Einheitskreis, die trigonometrische Flächeninhaltsformel für Dreiecke sowie Sinussatz und Cosinussatz und deren Anwendungen der Berechnung schiefwinkliger Dreiecke wurden nach dem Lehrbuch „Mathematik verstehen“ 5 unterrichtet.

5 DER TEST

5.1 Abschlusstest zur Evaluation des Projektes:

VERMESSUNGS-AUFGABEN IN DER 5. KLASSE: GRUNDBILDUNG IN DER TRIGONOMETRIE UND ARBEITEN IM GELÄNDE

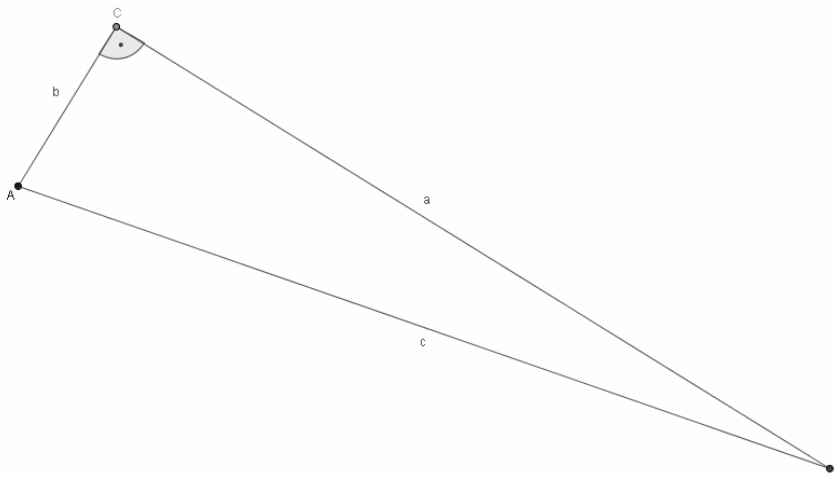
Theorie:

- 1.) a) Erläutere an einem rechtwinkligen Dreieck die Begriffe $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$.

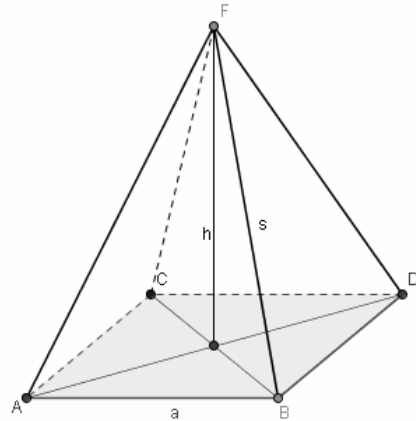
b) Stelle $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Punkte und als Strecken in einem Einheitskreis dar.
- 2.) Berechne den Neigungswinkel einer geradlinigen Straße mit der Steigung 10%.
- 3.) a) Berechne die kartesischen Koordinaten des Punktes P[6/245°]. Skizze!
b) Berechne die Polarkoordinaten des Punktes Q (-3/4)
- 4.) Begründe: (1) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
(2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- 5.) Wie hängen der pythagoreische Lehrsatz und der Cosinussatz zusammen?

Aufgaben:

- 1.) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Länge der Seite $b=58$ und den Winkel $\beta = 12,6^\circ$. Berechne die übrigen Seitenlängen und Winkelmaße des Dreiecks.



2.) Eine gerade quadratische Pyramide hat die Grundkantenlänge 6,8 und die Höhe $h=9,5$. Berechne den Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche, den Neigungswinkel einer Seitenfläche zur Grundfläche und den Winkel, den Seitenkante und Grundkante miteinander einschließen.



3.) Die geographische Breite von Wien beträgt $\varphi = 48,2^\circ$.

Welchen Abstand hat Wien von der Erdachse? Welchen Weg legt Wien bei einer Erdumdrehung zurück? Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich Wien um die Erdachse? (Erdradius $R=6370\text{km}$; Dauer einer Erdumdrehung 23,93h)

4.) In einen Berg werden vom gleichen Punkt aus zwei geradlinige Stollen getrieben, die miteinander einen Winkel von 30° einschließen. Der eine Stolle ist 5km, der andere ist 7km lang. Wie weit sind die Endpunkte der beiden Stollen voneinander entfernt und welchen Winkel schließen die Verbindungslinien dieser beiden Stollen miteinander ein?

5.) Max steht im Schulgarten und soll die Höhe eines Baumes ermitteln. Er misst von seinem Standpunkt aus 7m bis zum Fuß des Baumes und mit seinem Theodoliten (Instrumentenhöhe 1,6m) misst er einen Winkel von 25° bis zur Spitze des Baumes. Wie hoch ist der Baum?

Theorie:

Aufgabe 1.)		Aufgabe 2.)		Aufgabe 3.)		Aufgabe 4.)		Aufgabe 5.)	
a)	b)			a)	b)	(1)	(2)		

Aufgaben

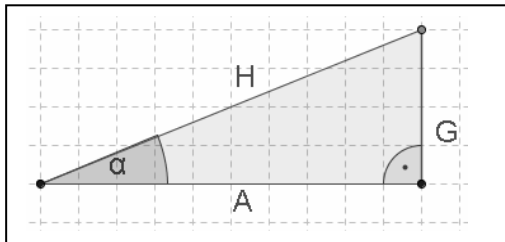
Aufgabe 1.)		Aufgabe 2.)		Aufgabe 3.)		Aufgabe 4.)		Aufgabe 5.)	

Bewertungsskala:

- richtig
- teilweise richtig
- nicht die Antwort auf die Frage
- falsch
- Aufgabe nicht beantwortet

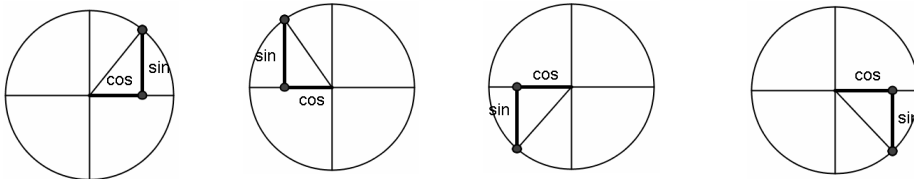
5.2 Ausarbeitung des Testes

1.) a) Erläutere an einem rechtwinkligen Dreieck die Begriffe $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$.

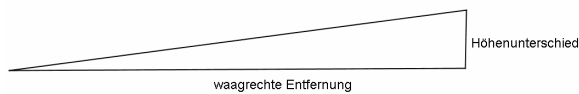


$$\sin\alpha = \frac{G}{H} \quad \cos\alpha = \frac{A}{H} \quad \tan\alpha = \frac{G}{A}$$

b) Stelle $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Punkte und als Strecken in einem Einheitskreis dar.

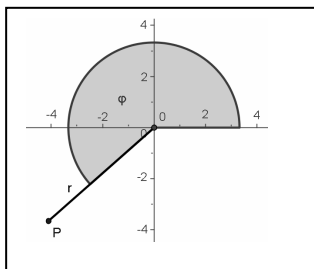


2.) Berechne den Neigungswinkel einer geradlinigen Straße mit der Steigung 10%.



$$\tan\alpha = \frac{1}{10} \quad \underline{\underline{\alpha \approx 5,71^\circ}}$$

3.) a) Berechne die kartesischen Koordinaten des Punktes $P[6/245^\circ]$. Skizze!



$$\sin 65^\circ = \frac{y}{6} \quad y \approx 5,44 \quad \cos 65^\circ = \frac{x}{6} \quad x \approx 2,54$$

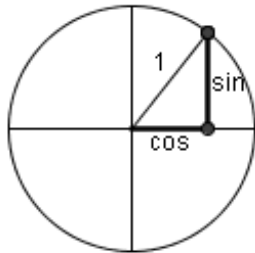
$$\underline{\underline{P(-2,54 / -5,44)}}$$

b) Berechne die Polarkoordinaten des Punktes $Q(-3/4)$

$$\tan \varphi = \frac{G}{A} \quad \tan \varphi = \frac{4}{3} \quad \varphi \approx 126,87^\circ \quad r=5 \quad \underline{\underline{Q(5|126,87^\circ)}}$$

- 4.) Begründe: (1) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$
 (2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Aus dem Einheitskreis mit Skizze wäre erwartet worden.

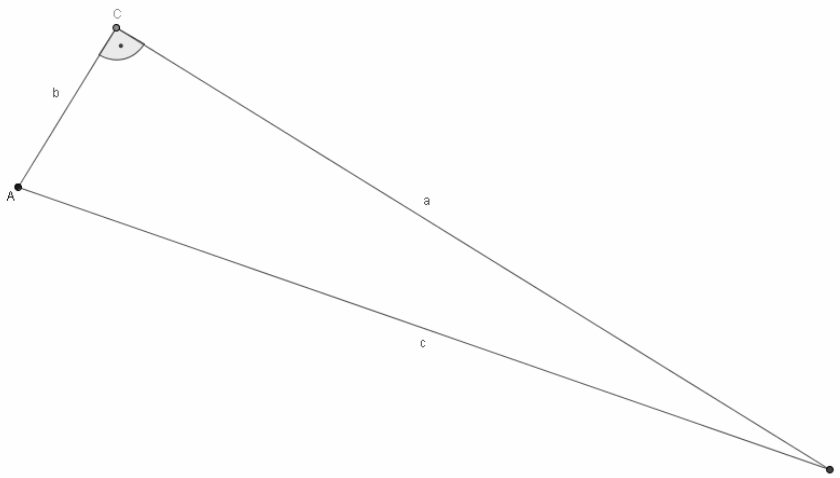


- 5.) Wie hängen der pythagoreische Lehrsatz und der Cosinussatz zusammen?

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ Wenn $\gamma = 90^\circ$ ist, ist $\cos \gamma = 0$ und dann ist der Cosinussatz der pythagoreische Lehrsatz. $c^2 = a^2 + b^2$

Aufgaben:

- 1.) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Länge der Seite $b=58$ und den Winkel $\beta = 12,6^\circ$. Berechne die übrigen Seitenlängen und Winkelmaße des Dreiecks.



aus
 $\alpha =$

$90^\circ - \beta$ ergibt sich $\alpha = 77,4^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad c = \frac{b}{\cos \alpha} \quad \underline{c \approx 265,88} \text{ und aus dem PL ergibt sich: } \underline{a \approx 259,48}.$$

- 2.) Eine gerade quadratische Pyramide hat die Grundkantenlänge 6,8 und die Höhe $h = 9,5$. Berechne den Neigungswinkel einer Seitenkante zur Grundfläche, den Neigungswinkel einer Seitenfläche zur Grundfläche und den Winkel, den Seitenkante und Grundkante miteinander einschließen.

$$d = a\sqrt{2} \quad d \approx 9,62$$

- a) Neigungswinkel Seitenkante s zu Grundfläche:

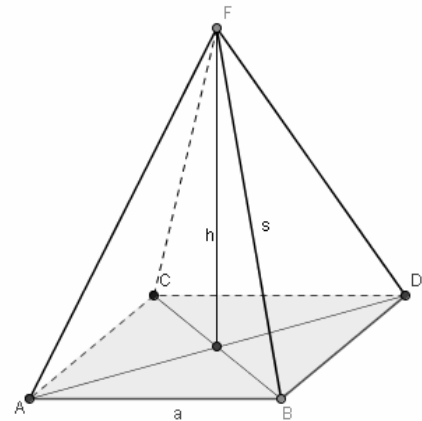
$$\tan \alpha = \frac{h}{\frac{d}{2}} \quad \underline{\alpha \approx 63,15^\circ}$$

- b) Neigungswinkel einer Seitenfläche zur Grundfläche:

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad h_1 \approx 19,09$$

$$\tan \beta = \frac{h_1}{\frac{a}{2}}$$

$$\beta \approx 71,37^\circ$$



- c) Winkel, den Seitenkante und Grundkante miteinander einschließen

$$\cos \gamma = \frac{a}{s} \quad \gamma \approx 70,31$$

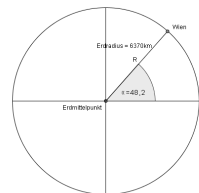
- 3.) Die geographische Breite von Wien beträgt $\varphi = 48,2^\circ$.

Welchen Abstand hat Wien von der Erdachse? Welchen Weg legt Wien bei einer Erdumdrehung zurück? Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich Wien um die Erdachse? (Erdradius $R=6370\text{km}$; Dauer einer Erdumdrehung 23,93h)

a) Abstand zur Erdachse: $\sin 41,8^\circ = \frac{x}{6370} \quad \underline{x \approx 4245,81 \text{ km}}$

b) Weg bei einer Erdumdrehung: $s=2 \times \pi \times s \approx 26677,22\text{km}$

c) Geschwindigkeit: $v = \frac{s}{t} \quad v \approx 1114,80\text{km/h}$



- 4.) In einen Berg werden vom gleichen Punkt aus zwei geradlinige Stollen miteinander einen Winkel von 30° einschließen. Der eine Stollen ist 5km, der andere ist 7km lang. Wie weit sind die Endpunkte der beiden Stollen voneinander entfernt

und welchen Winkel schließen die Verbindungslinien dieser beiden Stollen miteinander ein?

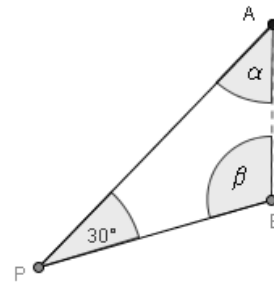
a) Entfernung der Endpunkte:

$$c = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 30^\circ} \quad \underline{c \approx 3,66 \text{ km}}$$

$$\text{b) Winkel: } \frac{c}{\sin 30^\circ} = \frac{7}{\sin \beta} \quad \sin \beta = \frac{7 \cdot \sin 30^\circ}{c}$$

$$\beta \approx 73,12^\circ \quad \underline{\beta' \approx 106,88^\circ}$$

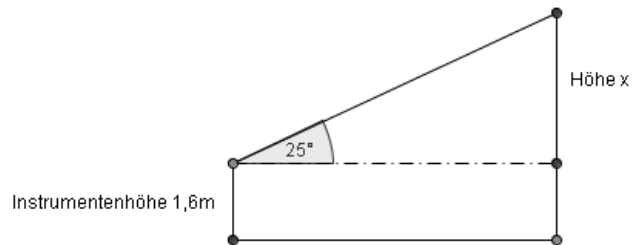
$$\sin \alpha = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{c} \quad \underline{\alpha \approx 43,11^\circ}$$



- 5.) Max steht im Schulgarten und soll die Höhe eines Baumes ermitteln. Er misst von seinem Standpunkt aus 7m bis zum Fuß des Baumes und mit seinem Theodoliten (Instrumentenhöhe 1,6m) misst er einen Winkel von 25° bis zur Spitze des Baumes. Wie hoch ist der Baum?

$$\tan 25^\circ = \frac{x}{7} \quad x \approx 3,26 \text{ m} \quad \text{plus Instru-}$$

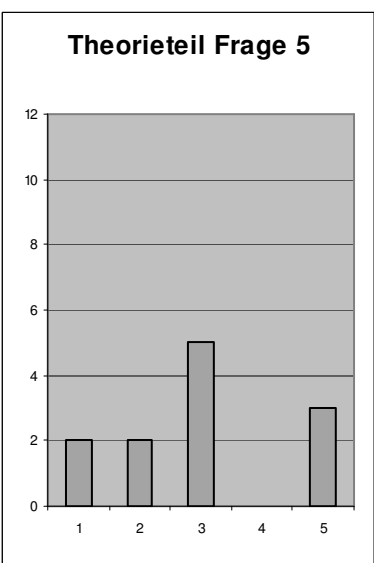
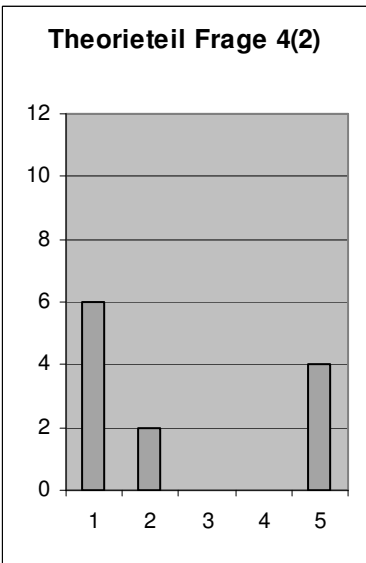
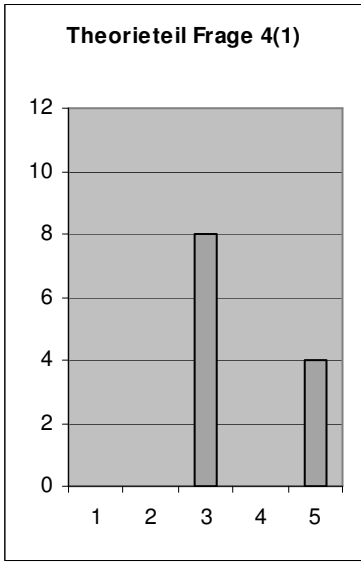
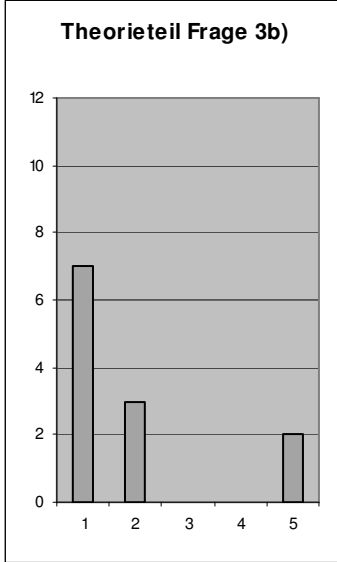
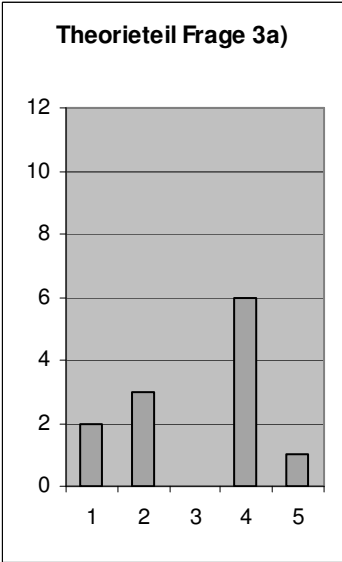
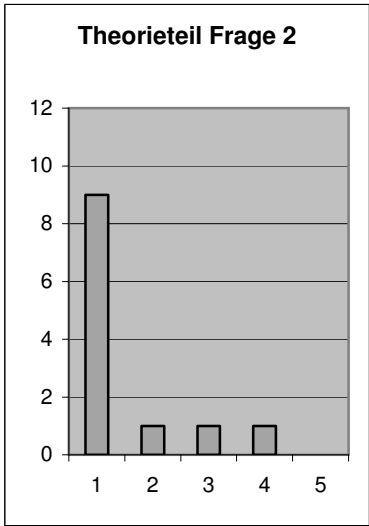
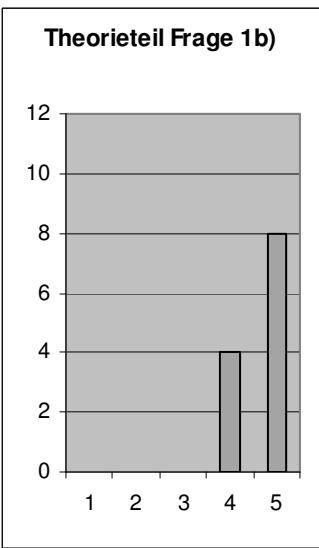
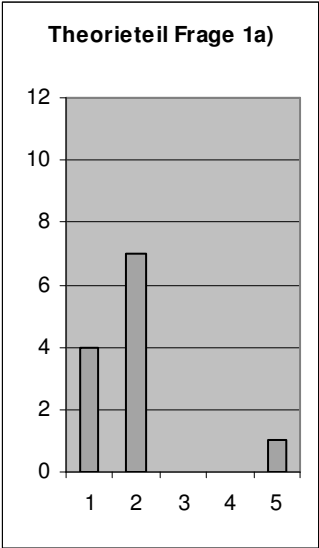
mentenhöhe ist der Baum insgesamt ca. 4,86m hoch.

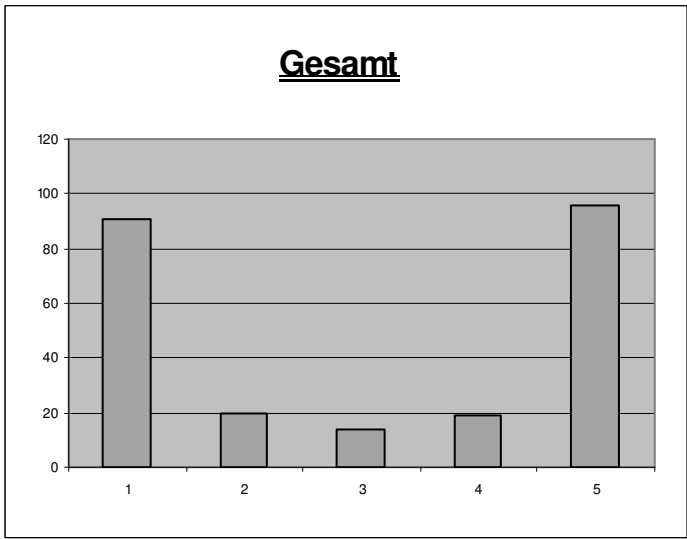
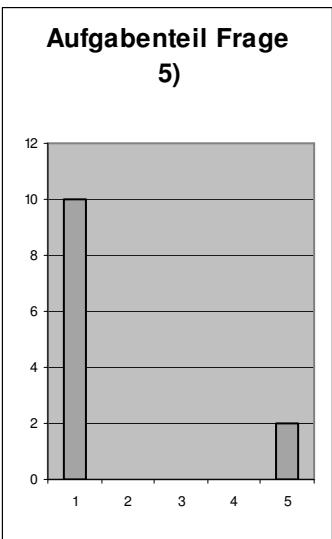
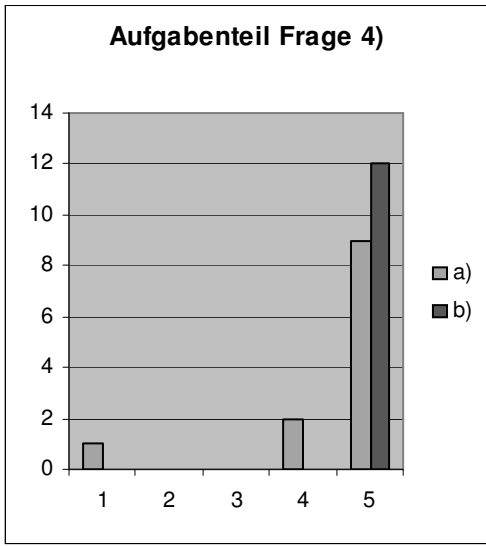
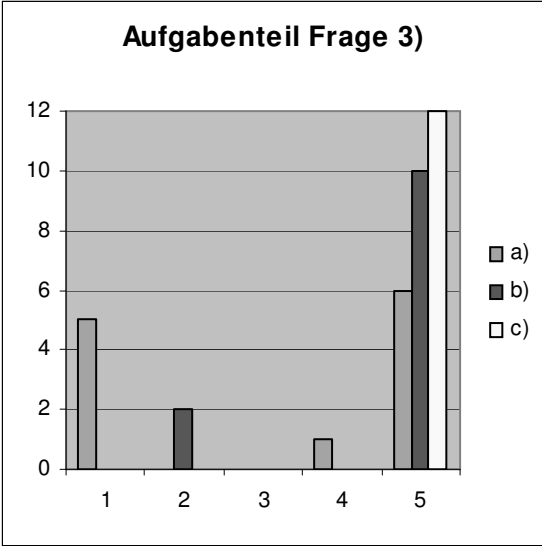
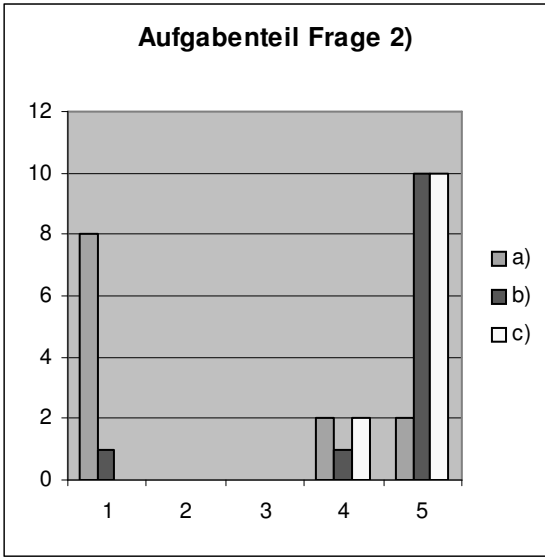
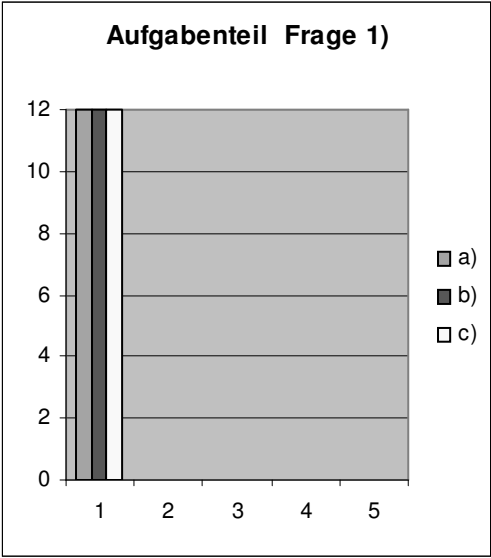


5.3 Testauswertung

Der besseren Übersichtlichkeit wegen gebe ich hier „nur“ die Balkendiagramme der einzelnen Fragen und einen Kommentar dazu. Die Gesamte Tabelle mit allen Einzelheiten findet man dann im Anhang.

- richtig entspricht 1
- teilweise richtig entspricht 2
- nicht die Antwort auf die Frage entspricht 3
- falsch entspricht 4
- Aufgabe nicht beantwortet entspricht 5





Das Gesamtbild zeigt, dass die Hälfte der Klasse ein zufriedenstellendes Resultat erreichen konnte, die andere Hälfte hat die Aufgaben nicht bearbeitet. Das könnte zwei Gründe haben:

- sie waren trotz des Projektes nicht motiviert
- sie waren nicht in der Lage, die Aufgaben zu lösen

Wenn man dem Projekt einen motivierenden Einfluss zubilligen möchte, und ich denke, dass die Schülerinnen und Schüler während der Arbeit im Freien viel Spaß hatten und die Mathematik durchaus einmal von einer anderen Seite aus betrachtet haben, so konnte sich dieser nicht auf die Arbeit in der Klasse ausweiten, vielleicht war die Arbeit im Freien für diese Gruppe von Schülerinnen und Schülern sogar kontraproduktiv, da sie der dann unmittelbar folgenden Inhaltlichen Komponente offensichtlich zu wenig Beachtung schenkten. Auch der IMST – Fragebogen wurde, meiner Meinung nach, nicht allzu ernst genommen.

Zu den einzelnen Fragen:

Theorieteil:

ad 1b) und 4(1) Warum die Bearbeitung im Einheitskreis solche Schwierigkeiten macht, ist mir völlig unerklärlich. Hingewiesen durch eine Fragestellung bei einer freiwillig als Pilotprojekt im Vorjahr durchgeführten Standardtestung (da bereitete der Einheitskreis der 7. Klasse ziemliche Schwierigkeiten!!) beobachte ich es eben heuer in der 5. Klasse wieder.

ad 3)a) Hauptsächliche Fehlerquelle war hier das Weglassen der negativen Vorzeichen im III. Quadranten.

ad 5.) Die Antworten wären gar nicht so schlecht gewesen, aber die Begründungen waren mir einfach zu wenig, daher das schlechte Abschneiden.

Aufgabenteil:

ad 2) Die meisten Schülerinnen und Schüler sahen die Aufgabe nach Berechnung des ersten Winkels als beendet an.

ad 3) hier scheiterten viele an der Formel für den Kreisumfang. Es durfte keine Formelsammlung verwendet werden.

ad 4) Das wurde ganz zum Schluss unterrichtet und war offenbar noch zu wenig gefestigt.

SCHLUSSBEMERKUNGEN

Ziel des Projektes war für Günther Malle und für mich eine Entwicklung von Grundvorstellungen zur Trigonometrie, wie es sie ja für andere Lehrstoffgebiete ja schon gibt, und wie sie in den MNI-Projekten, die die Gruppe in den vergangenen Jahren gemacht hat, auch schon im Unterricht erprobt wurden. (vgl. dazu unter anderem die Projektberichte von B. SALZGER: Grundvorstellungen zu den Begriffen Differenzenquotient und Differentialquotient, V. AUE: Differenzenquotient und Differentialquotient; G. RÖSLER: Lineare Funktionen - Ein Unterrichtversuch zur Grundbildung; M.JARMER, G.RÖSLER, B.SALZGER: Grundwissen und Grundvorstellungen im Stochastikunterricht) und die Umsetzung dieser Grundvorstellungen im Unterricht.

Wir haben also die Liste „Grundvorstellungen und Grundwissen“ sowie die für uns daraus resultierenden Grundfähigkeiten, die jede Schülerin und jeder Schüler beherrschen sollten, gemeinsam zusammengestellt. Eine solche Liste hat es in dieser Form noch nicht gegeben.

Als praktische Aufgabe zur Umsetzung dieser Theorien habe ich mit den Schülerinnen und Schülern dann den Schulgarten vermessen. Ich habe dabei beobachtet, dass viel mehr Zeit darauf verwendet wurde, zum Beispiel den Maßstab des Planes zu bestimmen, die genauen Standorte zu vermessen und in die Pläne einzutragen sowie zu klären, wer was mit wem wann wie macht (obwohl die Gruppen aus maximal 4 Personen bestanden!), als für die „reine Berechnung“ der Höhen, die ja dann mit der Anwendung der trigonometrischen Funktionen ihre mathematische Anwendung fanden. Allerdings hatte ich das schon so ungefähr erwartet, auch dass das den Schülerinnen und Schülern großen Spaß machen würde, hatte ich erhofft. Ich hatte allerdings auch gehofft, dass sich diese Begeisterung in die Klasse würde hinüberretten lassen, aber das war leider nicht der Fall, wie ja auch der Abschlusstest zeigt.

Man muss auf jeden Fall mehr Zeit einplanen, als eigentlich für die Behandlung der Trigonometrie in der 5. Klasse vorgesehen ist, und ich kann aus meiner Erfahrung nicht einmal sagen, dass sich das für den „mathematischen“ Teil auch wirklich auszahlt, aber für den „gemeinschaftlichen, menschlichen“ Teil, den Unterricht ja auch hat, war es sicher eine Bereicherung und hat mir sehr viel Spaß gemacht. Man schlüpft in dieser Phase mehr in die Rolle des Trainers oder Beraters und diese seltenen Gelegenheiten nutze ich immer gerne.

Zusammenfassend kann ich sagen, dass das Projekt auch dem Erreichen der Stufe 1 der von uns definierten Grundvorstellungen und Grundfähigkeiten förderlich war. Vielleicht konnte ich auch zumindest die Hälfte der Klasse motivieren, sich auch mit weiterführenden Aufgaben auseinander zusetzen, die andere Hälfte aber leider nicht.

Zum Abschluss erfreulich fand ich, dass die Aufgabe, die genau der entsprach, die im Schulgarten zu lösen war, von allen, die sie überhaupt gemacht haben, auch richtig gelöst wurde.

6 LITERATUR

MALLE, G., RAMHARTER, E., ULOVEC, A. & KANDL, S.: Mathematik verstehen (5),
Wien, öbv&hpt 2005

Internetadressen:

<http://www.mathe-online.at/tests/trig/elementareDreieckseigenschaften.html>

<http://www.mathe-online.at/tests/wfun/defWfun.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/zugbruecke.html>

(9. 7. 2006)

ANHANG

Auswertung Abschlusstest 5BRg

			1	2	3	4			
<u>Theorieteil</u>	$\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ im rw Dreieck	1a	tw, Dreieck fehlt	2r	1r	1	tw, Dreieck fehlt	2	
	im Einheitskreis	1b	f	4f	4Anb	5Anb		5	
	Steigung		2r	1	tw, RF bei α	2nAF	3r	1	
	Polar in Kartesisch	3a	- fehlen	4	- fehlen	4tw	2	- fehlen	4
	Kartesisch in Polar	3b	r	1	ρ fehlt	2r	1r	1	
	$-1 \leq \sin\alpha \leq +1$	4(1)	nAF	3nAF	3Anb	5nAF		3	
	$\sin^2 + \cos^2 = 1$	4(2)	r	1Anb	5Anb	5	tw, gl. Nenner falsch	2	
	cos - Satz und PL	5r		1Anb	5nAF	3nAF		3	
<u>Aufgaben</u>	rw Dreieck Seite a	1a	r	1r	1r	1r		1	
	Seite b	1b	r	1r	1r	1r		1	
	Winkel α	1c	r	1r	1r	1r		1	
	Neigungswinkel Seitenkante zu Grundfläche	2a	r	1Anb	5f	4r		1	
	Neigungswinkel Seitenfläche zu Grundfläche	2b	f	4Anb	5Anb	5Anb		5	
	Neigungswinkel Seitenkante zu Grundkante	2c	f	4Anb	5Anb	5Anb		5	
	Abstand von Erdachse	3a	Anb	5Anb	5f	4r		1	
	Weg bei einer Umdrehung	3b	Anb	5Anb	5tw	2Anb		5	
	Geschwindigkeit	3c	Anb	5Anb	5Anb	5Anb		5	
	Entfernung der Endpunkte der Stollen	4a	Anb	5Anb	5r	1Anb		5	
	Winkel zwischen Verbindungslinien	4b	Anb	5Anb	5Anb	5Anb		5	
	Baum im Schulgarten	5r		1Anb	5r	1r		1	

r1		9	4	7		8
tw2		1	2	2		2
nAF3		1	1	2		2
f4		4	2	2		1
Anb5		5	11	7		7

5	6	7	8	9	10		
tw, Dreieck fehlt	2tw, Dreieck fehlt	2tw, Dreieck fehlt	2r	1tw, Dreieck fehlt	2r	1	
Anb	5Anb	5Anb	5Anb	5f	4f	4	
r	1r	1r	1f	4r	1r	1	
f	4tw P fehlt	2	- fehlen	4Anb	5tw, Zeichnung falsch, P fehlt	2r	1
r	1Anb	5r	1Anb	5tw, r fehlt	2r	1	
nAF	3nAF	3nAF	3Anb	5Anb	5Anb	5	
r	1tw, gl. Nenner falsch	2r	1Anb	5Anb	5r	1	
nAF	3Anb	5r	1tw	2nAF	3	tw, Begründung fehlt	2
r	1r	1r	1r	1r	1r	1	
r	1r	1r	1r	1r	1r	1	
r	1r	1r	1r	1r	1r	1	
r	1r	1r	1Anb	5f	4r	1	
Anb	5Anb	5Anb	5Anb	5Anb	5r	1	

Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5	f	4
r	1	r Antwort (!!)	1	Anb	5	Anb	5	Anb	5
tw	2	Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5
Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5
Anb	5	f	4	Anb	5	Anb	5	Anb	5
Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5	Anb	5
r	1	r	1	r	1	r	1	Anb	5

	9	7	9	5	5	10
	2	3	1	1	3	1
	2	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	2	2
	6	8	8	13	9	7

11		12							
Anb	5	tw, Dreieck fehlt	2	4 7 0 0 1					
Anb	5	Anb	5	0 0 0 4 8					
r	1	r	1	9 1 1 1 0					
r	1	f, - fehlen, P fehlt	4	2 3 0 6 1					
tw, r falsch	2	r	1	7 3 0 0 2					
nAF	3	nAF	3	0 0 8 0 4					
r	1	r	1	6 2 0 0 4					
Anb	5	naF	3	2 2 5 0 3					
r	1	r	1	a)	12	0	0	0	0
r	1	r	1	b)	12	0	0	0	0
r	1	r	1	c)	12	0	0	0	0
r	1	r	1	a)	8	0	0	2	2
Anb	5	Anb	5	b)	1	0	0	1	10
Anb	5	Anb	5	c)	0	0	0	2	10
r	1	r	1	a)	5	0	0	1	6
Anb	5	Anb	5	b)	0	2	0	0	10
Anb	5	Anb	5	c)	0	0	0	0	12
Anb	5	f	4	a)	1	0	0	2	9
Anb	5	Anb	5	b)	0	0	0	0	12
r	1	r	1		10	0	0	0	2

	9	9	91	91	20	14	19	96
	1	1	20					
	1	2	14					
	0	2	19					
	9	6	96					