Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Hausübung 1

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.1 (Abzählbarkeit) (12 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. (2 Punkte) $2^{A_\mathcal{P}}$ für $A_\mathcal{P}$ aus Definition 4.11 ist abzählbar.

   Lösungsvorschlag

   Die Aussage ist korrekt.

   Nach Definition 4.11 ist $A_\mathcal{P}$ endlich. Damit hat $A_\mathcal{P}$ nur endlich viele Teilmengen (genau $2^{|A_\mathcal{P}|}$), also ist $2^{A_\mathcal{P}}$ endlich und damit abzählbar.

2. (3 Punkte) Die Menge $\mathcal{F} \setminus [\![\mathcal{P}]\!]$ aller nicht-$\mathcal{P}$-berechenbaren Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ist abzählbar.

   Lösungsvorschlag

   Die Aussage gilt nicht.

   Sei $\mathcal{F} \setminus [\![\mathcal{P}]\!]$ abzählbar, die Menge $[\![\mathcal{P}]\!]$ aller berechenbaren Funktionen $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ist nach Satz 5.2 abzählbar, also auch die Teilmenge $[\![\mathcal{P}[1]]\!]$ der einstelligen, berechenbaren Funktionen. Damit ist dann auch die Vereinigung beider Mengen, $\mathcal{F}$, abzählbar. Dies steht in Widerspruch zu Satz 5.5, also war die Annahme falsch und es gilt: Die Menge der nicht-$\mathcal{P}$-berechenbaren Funktionen $\mathcal{F} \setminus [\![\mathcal{P}]\!]$ ist überabzählbar.

3. (6 Punkte) Die Menge $2^{\mathbb{N}}_{fin} := \left\{ M \in 2^{\mathbb{N}} \,\middle|\, |M| \in \mathbb{N} \right\}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto 2^{\mathbb{N}}_{fin}$:

$$f(n) := \begin{cases} \emptyset & \text{, falls } n = 0 \\ \left\{\pi^2_1(n-1)\right\} \cup f\left(\pi^2_2(n-1)\right) & \text{, falls } n > 0 \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Die Aussage gilt.

Zu zeigen ist, dass f surjektiv ist, also $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} \subseteq \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$:

Sei $M \in 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}}$ beliebig. Wir zeigen durch Induktion über $|M|$: $\exists n \in \mathbb{N}.\, M = f(n)$.

Induktionsanfang: $|M| = 0$, also $M = \emptyset$. Damit gilt $M = f(0)$.

Induktionsschritt: $|M| > 0$, also $M = \{m\} \cup M'$ mit $|M'| = |M| - 1$ Als Induktionsvoraussetzung gilt: $\exists n' \in \mathbb{N}.\, M' = f(n')$. Offenbar gilt dann $M = f\big(\pi^2(m, n') + 1\big)$, denn

$$f\big(\pi^2(m,n')+1\big) = \big\{\pi^2_1\big(\pi^2(m,n')\big)\big\} \cup f\Big(\pi^2_2\big(\pi^2(m,n')\big)\Big) = \{m\} \cup f(n') = \{m\} \cup M' = M$$

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch, dass f tatsächlich die Signatur $\mathbb{N} \mapsto 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}}$ besitzt, also $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} \supseteq \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$:

Durch Induktion zeigen wir: $\forall n \in \mathbb{N}.\, |f(n)| \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n = 0$ und damit $|f(n)| = |\emptyset| = 0 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n > 0$. Als Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\forall n' \in \mathbb{N}. n' < n \to |f(n')| \in \mathbb{N}$$

Nach Definition von f gilt: $f(n) = \big\{\pi^2_1(n-1)\big\} \cup f\big(\pi^2_2(n-1)\big)$. Aus Aufgabe 2.1 wissen wir, dass $\pi^2_2(n-1) < n$. Also gilt: $\Big|f\big(\pi^2_2(n-1)\big)\Big| = m \in \mathbb{N}$. Damit folgt: $\big|f(n)\big| = 1 + m \in \mathbb{N}$.

4. (1 Punkt) Die Menge $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{cf}} := \big\{M \in 2^{\mathbb{N}} \,\big|\, |\mathbb{N} \setminus M| \in \mathbb{N}\big\}$ aller cofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Lösungsvorschlag

Die Aussage gilt.

Mit der Funktion f aus Teilaufgabe 3 können wir auch die cofiniten Teilmengen abzählen. Es gilt offensichtlich: $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{cf}} = \{\mathbb{N} \setminus f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 1.2 (Gödelisierung) (14 Punkte)

Sei $2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} := \big\{M \in 2^{\mathbb{N}} \,\big|\, |M| \in \mathbb{N}\big\}$, also die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$. Sei $\gamma :\ 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}} \mapsto \mathbb{N}$:

$$\gamma(M) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } M = \emptyset \\ \pi^2\Big(\max(M), \gamma\big(M \setminus \{\max(M)\}\big)\Big) + 1 & \text{, falls } M \neq \emptyset \end{cases}$$

Dabei ist $\max :\ 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die jeder nicht-leeren Menge natürlicher Zahlen ihr maximales Element zuordnet.

Ist in den folgenden Teilaufgaben ein Programm anzugeben, so können Sie die Hilfsprozeduren $\mathtt{PAIR}^2$, $\mathtt{PAIR}^2_1$, $\mathtt{PAIR}^2_2$ nach Satz 4.3 und Satz 4.4 sowie die Prozeduren aus dem GGT-Beispiel in Abbildung 2.3 ohne Angabe einer Definition verwenden.

1. (2 Punkte) Berechnen Sie $\gamma(\{0\})$, $\gamma(\{1\})$ und $\gamma(\{2, 1\})$

Lösungsvorschlag

- $\gamma(\{0\}) = \pi^2(0, \gamma(\emptyset)) + 1 = \pi^2(0,0) + 1 = 1$
- $\gamma(\{1\}) = \pi^2(1, \gamma(\emptyset)) + 1 = \pi^2(1,0) + 1 = 3$
- $\gamma(\{2,1\}) = \pi^2(2, \gamma(\{1\})) + 1 = \pi^2(2,3) + 1 = 17 + 1 = 18$

2. (9 Punkte) Beweisen Sie, dass γ eine Gödelisierung gemäß Definition 4.1 ist. Geben Sie dabei insbesondere eine $\mathcal{P}[1]$-Prozedur `IS_SET` mit $[\![\texttt{IS\_SET}]\!] = \gamma?$ an.

Lösungsvorschlag

a) γ ist injektiv

Wir zeigen durch Induktion über k:

$$\forall k \in \mathbb{N}.\, \forall P, Q \in 2^{\mathbb{N}}_{fin}.\, |P| = k \wedge \gamma(P) = \gamma(Q) \to P = Q$$

Daraus folgt die Injektivität von γ, da $|P| \in \mathbb{N}$ für alle $P \in 2^{\mathbb{N}}_{fin}$.

Induktionsanfang, $k = 0$: Mit $|P| = k$ folgt $P = \emptyset$. Wegen $\gamma(P) = \gamma(Q)$ gilt $0 = \gamma(Q)$. Wegen $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}.\, \pi^2(n_1, n_2) + 1 > 0$ folgt $Q = \emptyset$ und somit $P = Q$.

Induktionsschritt $k > 0$: Als Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\forall P', Q' \in 2^{\mathbb{N}}_{fin}.\, |P'| = k - 1 \wedge \gamma(P') = \gamma(Q') \to P' = Q'$$

Wegen $k > 0$ gilt $P \neq \emptyset$ und damit

$$\gamma(P) = \pi^2\Big(\max(P), \gamma\big(P \setminus \{\max(P)\}\big)\Big) + 1.$$

Da $\gamma(P) = \gamma(Q)$ folgt $\gamma(Q) \neq 0$, also

$$\gamma(Q) = \pi^2\Big(\max(Q), \gamma\big(Q \setminus \{\max(Q)\}\big)\Big) + 1.$$

Damit muss also

$$\pi^2\Big(\max(P), \gamma\big(P \setminus \{\max(P)\}\big)\Big) = \pi^2\Big(\max(Q), \gamma\big(Q \setminus \{\max(Q)\}\big)\Big)$$

gelten. Wegen der Injektivität von π^2 (Satz 4.3) ist damit auch

$$\max(P) = \max(Q) \text{ und } \gamma\big(P \setminus \{\max(P)\}\big) = \gamma\big(Q \setminus \{\max(Q)\}\big).$$

Da $\big|P \setminus \{\max(P)\}\big| = k - 1$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $P \setminus \{\max(P)\} = Q \setminus \{\max(Q)\}$. Mit $\max(P) = \max(Q)$ folgt

$$P = \big(P \setminus \{\max(P)\}\big) \cup \{\max(P)\} = \big(Q \setminus \{\max(Q)\}\big) \cup \{\max(P)\} = \big(Q \setminus \{\max(Q)\}\big) \cup \{\max(Q)\} = Q.$$

b) γ ist algorithmisch

Zunächst stellen wir in einer Fallunterscheidung fest, ob die Menge leer ist. Ist dies der Fall, wird 0 zurückgegeben. Andernfalls bestimmen wir das maximale Element der Menge. Enthält die Menge genau ein Element, so ist dieses das maximale. Ansonsten merken wir uns das erste eingelesene Element (in einer Variablen `n`) und stellen zunächst rekursiv das maximale Element der Menge der restlichen Elemente fest. Dann vergleichen wir dieses Maximum mit dem Wert von `n`. Ist der Wert von `n` größer, speichern wir das berechnete Maximum in der Variablen `n`. Das berechnete Maximum der Menge und die durch rekursive Anwendung dieses Algorithmus auf die Menge der nicht-maximalen Elemente erhaltene Kodierung werden durch die berechenbare Funktion π^2 in eine natürliche Zahl kodiert. Schließlich wird noch 1 addiert und das Ergebnis zurückgegeben.

c) $\gamma ? : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mit $\gamma ?(m) = 1$ gdw. $m \in \gamma(2^{\mathbb{N}}_{fin})$ ist berechenbar.

```
procedzre IS_SET(y) <=
begin var m, n, r, x;
  x := 1;
  if y then
    m := PAIR₁²(PRED(y));
    r := PAIR₂²(PRED(y));
    while r do
      n := PAIR₁²(PRED(r));
      r := PAIR₂²(PRED(r));
      if ¬GE(n,m)
        then m := n
        else x := 0; r := 0
      end_if
    end_while
  end_if;
  return(x)
end
```

Nach Definition von γ ist eine natürliche Zahl y genau dann eine Kodierung einer Menge $M \in 2^{\mathbb{N}}_{fin}$, wenn $y = 0$ oder $y = \pi^2(m, r) + 1$ wobei r wieder die Kodierung einer Menge $N \in 2^{\mathbb{N}}_{fin}$ sein und $\forall n \in N. m > n$ gelten muss.

Dieser Test wird durch die Prozedur `IS_SET` realisiert. Zunächst wird der Fall $y = 0$ überprüft. Ansonsten werden m und r bestimmt. Für die Überprüfung, ob r eine Menge aus $2^{\mathbb{N}}_{fin}$ kodiert, wird zunächst $r = 0$ getestet und andernfalls r wiederrum in m' und r' aufgeteilt.

Ist r' die Kodierung einer endlichen Menge natürlicher Zahlen, so ist m' das maximale Element der durch r kodierten Liste. Um die Maximalität von m zu zeigen, reicht es also, m mit m' zu vergleichen. Anschliessend wird im nächsten Schleifendurchlauf dann getestet, ob r' eine Kodierung einer Menge aus $2^{\mathbb{N}}_{fin}$ ist.

Die Schleife terminiert, wenn die Maximalitätsbedingung verletzt oder die noch zu überprüfende Zahl 0 und damit die Kodierung der leeren Menge ist. Aus Aufgabe 2.1 ist bekannt, dass $\pi^2(n_1, n_2) \geq n_2$, also ist $\pi^2_2(r - 1) \leq r - 1 < r$. Da r also in jedem Schleifendurchlauf kleiner wird, terminiert die Schleife für jede Eingabe.

Wurde die Maximalitätsbedingung verletzt, so wird dies durch x angezeigt und 0 zurückgegeben. Ansonsten ist y offenbar die Kodierung einer Menge $M \in 2^{\mathbb{N}}_{\mathit{fin}}$.

d) γ^{-1} ist algorithmisch

Wir starten mit einer leeren Menge als Ergebnismenge. Analog zu `IS_SET` testen wir zunächst ob $n = 0$. In diesem Fall geben wir die Ergebnismenge zurück. Andernfalls ist $n > 0$. Das maximale Element $\pi^2_1(n-1)$ der durch n kodierten Menge fügen wir der Ergebnismenge hinzu und wiederholen diesen Schritt mit der durch $\pi^2_2(n-1)$ kodierten Menge. Mit dem gleichen Argument wie oben terminiert auch diese Schleife. In jedem Schleifendurchlauf wird das maximale der noch nicht ausgegebenen Elemente in der Ergebnismenge gespeichert, so dass nach Terminierung der Schleife alle Elemente in der Menge enthalten sind.

3. (3 Punkte) Geben Sie eine $\mathcal{P}[1]$-Prozedur `MIN` zur Berechnung des minimalen Elements einer kodierten Menge an. Es soll gelten:

$$[\![\texttt{MIN}]\!](\gamma(M)) = \begin{cases} \bot & \text{, falls } M = \emptyset \\ \min(M) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag

Die Elemente sind in absteigender Folge kodiert. Daher ist das letzte Element das Minimum der Menge. Im Falle der leeren Liste ist die Kodierung 0 und die Prozedur bleibt endlos in der Schleife. Ansonsten wird analog zur Prozedur `IS_SET` die noch verbleibende Menge aufgeteilt, bis die Restmenge leer ist.

```
procedure MIN(y) <=
begin var m, r;
  r := y;
  while ¬r do SKIP end_while;
  while r do
    m := PAIR_1^2(PRED(r));
    r := PAIR_2^2(PRED(r))
  end_while;
  return(m)
end
```

Aufgabe 1.3 (rekursive Aufzählbarkeit) (7 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

1. (2 Punkte) Falls A und B rekursiv aufzählbar sind, so ist $A \cup B$ auch rekursiv aufzählbar.

Lösungsvorschlag

Falls eines der Mengen leer ist, gilt $A \cup B = A$ oder $A \cup B = B$, welche rekursiv aufzählbar sind. Für nicht-leere A und B gibt es surjektive, berechenbare Funktionen $f_A : \mathbb{N} \mapsto A$ und

$f_B : \mathbb{N} \mapsto B$. Somit gibt es die surjektive, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto A \cup B$, mit:

$$f(x) = \begin{cases} f_A(z) & \text{, falls } x = 2z \\ f_B(z) & \text{, falls } x = 2z + 1 \end{cases}$$

2. (1 Punkt) Falls $A \cup B$ rekursiv aufzählbar ist, so sind A und B auch rekursiv aufzählbar.

   Lösungsvorschlag

   Wählen wir H und $\overline{H}$, so ist $H \cup \overline{H} = \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar; $\overline{H}$ ist aber bekanntlich nicht rekursiv aufzählbar.

3. (2 Punkte) Falls A und B rekursiv aufzählbar sind, so ist $A \times B$ auch rekursiv aufzählbar.

   Lösungsvorschlag

   Falls eines der Mengen leer ist, gilt $A \times B = \emptyset$ ist rekursiv aufzählbar. Für nicht-leere A und B gibt es surjektive, berechenbare Funktionen $f_A : \mathbb{N} \mapsto A$ und $f_B : \mathbb{N} \mapsto B$. Somit gibt es die surjektive, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto A \times B$, mit:

   $$f(x) = (f_A(\pi_1^2(x)), f_B(\pi_2^2(x)))$$

4. (2 Punkte) Falls $A \times B \neq \emptyset$ rekursiv aufzählbar ist, so sind A und B auch rekursiv aufzählbar.

   Lösungsvorschlag

   Mit Hilfe der surjektiven, berechenbaren Funktion $f : \mathbb{N} \mapsto A \times B$ lassen sich die surjektiven, berechenbaren Funktionen $f_A : \mathbb{N} \mapsto A$ und $f_B : \mathbb{N} \mapsto B$ angeben, mit:

   $$f_A(x) = a, \text{ für } f(x) = (a, b)$$

   $$f_B(x) = b, \text{ für } f(x) = (a, b)$$

Aufgabe 1.4 (Entscheidbarkeit) (7 Punkte)

Betrachten Sie das Problem $A := \{n \in \mathbb{N} \,|\, \varphi_n(n) = 8\}$.

1. (6 Punkte) Zeigen Sie durch Diagonalisierung, dass A nicht entscheidbar ist.

   Lösungsvorschlag

   Angenommen, A sei entscheidbar. Dann ist die charakteristische Funktion χ_A berechenbar. Damit ist die Funktion f mit

   $$f(n) := \begin{cases} 7 & \text{, falls } \chi_A(n) = 1 \\ 8 & \text{, falls } \chi_A(n) = 0 \end{cases}$$

ebenfalls berechenbar. Also gibt es ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{n'} = f$. Wir betrachtetn $f(n') = \varphi_{n'}(n')$. Sei $f(n') = 8$, also $n' \in A$, dann folgt $f(n') = 7 \neq 8$, ein Widerspruch. Ist $f(n') \neq 8$, dann ist $n' \notin A$ und damit $f(n') = 8$. Auch hier ergibt sich ein Widerspruch. Da alle Fälle zu Widersprüchen führen, muss die Annahme, f sei berechenbar, falsch gewesen sein. Also kann χ_A nicht berechenbar sein, d. h. A ist nicht entscheidbar.

2. (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\overline{A}$ nicht entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag

Dies folgt mit Satz 7.6 aus der Nicht-Entscheidbarkeit von A.