Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Lösungsvorschlag zu Übung 5

Lösungsvorschlag

Aufgabe 5.1 Entscheidbarkeit

Zeigen Sie mit dem Satz von Rice, dass die folgenden Probleme nicht entscheidbar sind.

1. $M_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = \omega\}$

   Lösungsvorschlag

   Es gilt $\forall n, m \in \mathbb{N}.\ \varphi_m = \varphi_n \Rightarrow (n \in M_1 \Rightarrow m \in M_1)$, also $M_1 = \natural\Phi_1$ für $\Phi_1 = \{\omega\}$. Damit ist offenbar $\Phi_1 \neq \emptyset$ und auch $\Phi_1 \neq [\![\mathcal{P}]\!]$. Nach dem Satz von Rice ist damit $M_1 = \natural\Phi_1$ nicht entscheidbar.

2. $M_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \text{ ist monoton}\}$

   Lösungsvorschlag

   Es gilt $\forall n, m \in \mathbb{N}.\ \varphi_m = \varphi_n \Rightarrow (n \in M_2 \Rightarrow m \in M_2)$, also $M_2 = \natural\Phi_2$ für $\Phi_2 = \{f \in [\![\mathcal{P}]\!] \mid f \text{ ist monoton}\}$. Damit ist offenbar $\Phi_2 \neq \emptyset$, denn $z \in \Phi_2$ für $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}.\ z(n) = 0$. Auch gilt $\Phi_2 \neq [\![\mathcal{P}]\!]$, denn $\omega \notin \Phi_2$. Nach dem Satz von Rice ist damit $M_2 = \natural\Phi_2$ nicht entscheidbar.

3. $M_3 := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(0) = 0\}$

   Lösungsvorschlag

   Es gilt $\forall n, m \in \mathbb{N}.\ \varphi_m = \varphi_n \Rightarrow (n \in M_3 \Rightarrow m \in M_3)$, also $M_3 = \natural\Phi_3$ für $\Phi_3 = \{f \in [\![\mathcal{P}]\!] \mid f(0) = 0\}$. Damit ist offenbar $\Phi_3 \neq \emptyset$, denn $z \in \Phi$. Auch gilt $\Phi_3 \neq [\![\mathcal{P}]\!]$, denn $\omega \notin \Phi$. Nach dem Satz von Rice ist damit $M_3 = \natural\Phi_3$ nicht entscheidbar.

Aufgabe 5.2 (Semi-Entscheidbarkeit)

1. Zeigen Sie, dass das Problem $M := \{\pi^3(i,j,k) \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = \varphi_j \lor \varphi_i = \varphi_k\}$ nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie ID auf M reduzieren.

   ### Lösungsvorschlag

   Bekanntlich ist die Identitätsfunktion id berechenbar, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n = id$. Die Funktion $\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varrho(x) = \pi^3(x,n,n)$ ist offenbar auch total und berechenbar. Es gilt:

   $$\begin{aligned} x \in ID &\iff \varphi_x = id \\ &\iff \varphi_x = \varphi_n \\ &\iff \varphi_x = \varphi_n \lor \varphi_x = \varphi_n \\ &\iff \varphi_{\pi_1^3(\varrho(x))} = \varphi_{\pi_2^3(\varrho(x))} \lor \varphi_{\pi_1^3(\varrho(x))} = \varphi_{\pi_3^3(\varrho(x))} \\ &\iff \varrho(x) \in M \end{aligned}$$

   Also gilt $ID \preceq_\varrho M$. Da ID nicht semi-entscheidbar ist, kann damit auch M nicht semi-entscheidbar sein.

2. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Totalitätsproblem $TOT = \{i \in \mathbb{N} \mid \forall x \in \mathbb{N}.\ \varphi_i(x) \neq \bot\}$ nicht semi-entscheidbar ist. Zeigen Sie nun, dass auch das Komplement des Totalitätsproblems $\overline{TOT} = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N}.\ \varphi_i(x) = \bot\}$ nicht semi-entscheidbar ist. Reduzieren Sie dazu das Problem $\overline{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n) = \bot\}$ auf $\overline{TOT}$.

   ### Lösungsvorschlag

   Für die Reduktion von $\overline{S}$ auf $\overline{TOT}$ brauchen wir eine totale und berechenbare Funktion $\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varrho(n) \in \overline{TOT} \iff n \in \overline{S}$. Also $\exists x.\ \varphi_{\varrho(n)}(x) = \bot \iff \varphi_n(n) = \bot$.

   Wir betrachten das folgende $\mathcal{P}[2]$-Programm `P`.

   ```
   procedure P(n, x) <=
   begin var res;
     res := APPLY(PAIR²(n,n));
     return(res)
   end
   ```

   Offensichtlich gilt $\varphi_n(n) = \bot \implies \forall x \in \mathbb{N}.\ [\![\mathtt{P}]\!](n,x) = \bot \implies \exists x \in \mathbb{N}.\ [\![\mathtt{P}]\!](n,x) = \bot$. Umgekehrt gilt auch $\exists x \in \mathbb{N}.\ [\![\mathtt{P}]\!](n,x) = \bot \implies \varphi_n(n) = \bot$.

   Nach dem *s-m-n*-Theorem gibt es dann eine totale und berechenbare Funktion $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi_{s_1^1(\natural\mathtt{P},n)}(x) = \varphi_{\natural\mathtt{P}}(n,x) = [\![\mathtt{P}]\!](n,x)$ für alle $n, x \in \mathbb{N}$. Sicherlich ist dann auch die Funktion $\varrho(n) := s_1^1(\natural\mathtt{P}, n)$ berechenbar. Damit gilt:

   $$\begin{aligned} n \in \overline{S} &\iff \varphi_n(n) = \bot \\ &\iff \exists x \in \mathbb{N}.\ [\![\mathtt{P}]\!](n,x) = \bot \\ &\iff \exists x \in \mathbb{N}.\ \varphi_{\natural\mathtt{P}}(n,x) = \bot \\ &\iff \exists x \in \mathbb{N}.\ \varphi_{s_1^1(\natural\mathtt{P},n)}(x) = \bot \\ &\iff \exists x \in \mathbb{N}.\ \varphi_{\varrho(n)}(x) = \bot \\ &\iff \varrho(n) \in \overline{TOT} \end{aligned}$$

   Damit haben wir $\overline{S}$ erfolgreich auf $\overline{TOT}$ reduziert, es gilt $\overline{S} \preceq_\varrho \overline{TOT}$. Da $\overline{S}$ nicht semi-entscheidbar ist, folgt damit, dass auch $\overline{TOT}$ nicht semi-entscheidbar ist.