

# Formale Grundlagen der Informatik 1

## Kapitel 24

### Zusammenfassung

Frank Heitmann  
heitmann@informatik.uni-hamburg.de

11. Juli 2016

# Der Automatenteil

Der Automatenteil ...

# Überblick

Wir hatten die Sprachfamilien

- der regulären Sprachen (REG),
- der kontextfreien Sprachen (CF),
- der entscheidbaren Sprachen (REC) und
- der aufzählbaren Sprachen (RE).

Dabei gilt

- $REG \subsetneq CF \subsetneq REC \subsetneq RE$

Die entscheidbaren Probleme haben wir noch weiter bzgl. ihrer Komplexität unterteilt.

# Reguläre Sprachen - Modelle

Die Sprachfamilie der regulären Sprachen wird erfasst von:

- deterministischen, endlichen Automaten (DFAs)
- nichtdeterministischen, endlichen Automaten (NFAs)
  - mit/ohne  $\lambda$ -Kanten
- reguläre/rationale Ausdrücke
- (rechts-)lineare Grammatiken

# Reguläre Sprachen - Begriffe

Begriffe:

- Zustände, Eingabesymbole, Alphabet, Überföhrungsfunktion, Übergangsrelation, Startzustände, Endzustände,
- vollständig, initial zusammenhängend,
- Konfiguration, Rechnung, akzeptierte Sprache,
- deterministisch, nichtdeterministisch,
- Abschlusseigenschaften

# Reguläre Sprachen - Verfahren

Techniken/Verfahren:

- Beweis, dass ein Automat eine Sprache akzeptiert (zwei Richtungen zu zeigen!)
- Techniken zum Konstruieren eines Automaten
- Potenzautomatenkonstruktion
- Verschiedene Konstruktionen, um Abschlusseigenschaften zu zeigen
- Pumping Lemma der regulären Sprachen

# Kontextfreie Sprachen - Modelle

Die Sprachfamilie der kontextfreien Sprachen wird erfasst von:

- kontextfreien Grammatiken
- (nichtdeterministische Kellerautomaten)

# Kontextfreie Sprachen - Begriffe

Begriffe bei Grammatiken:

- Nonterminale, Terminale, Produktionen, Startsymbol,
- Ableitung, erzeugte/generierte Sprache
- $\lambda$ -Produktion

(Begriffe zum PDA)

- wie beim DFA/NFA



# Kontextfreie Sprachen - Verfahren

Techniken/Verfahren:

- Beweis, dass eine Grammatik eine Sprache generiert (zwei Richtungen zu zeigen!)
- Techniken zum Konstruieren einer Grammatik
- Herstellung der Chomsky-Normalform
  - Technik zum Reduzieren (produktiv, erreichbar)
- Verschiedene Konstruktionen, um Abschlusseigenschaften zu zeigen
- Pumping Lemma der kontextfreien Sprachen

# Entscheidbare und aufzählbare Sprachen - Modelle

Die Sprachfamilie der aufzählbaren Sprachen wird erfasst von:

- Turing-Maschinen
  - deterministische (DTMs)
  - nichtdeterministische (NTMs)
  - einseitig/beidseitig unendliches Band
  - mehrere Bänder
  - ...
- jedes Modell, das die intuitiv berechenbaren Funktionen erfasst ( $\Rightarrow$  Church-Turing-These)

# Entscheidbare und aufzählbare Sprachen - Begriffe

Begriffe:

- Zustände, Eingabesymbole, Bandsymbole, Überföhrungsfunktion, Überföhrungsrelation, Startzustand, Endzustände, Symbol für das leere Feld,
- Konfiguration
- Schrittrelation, Rechnung, Erfolgsrechnung, akzeptierte Sprache
- (Turing-)berechenbar
- aufzählbar, entscheidbar

# Entscheidbare und aufzählbare Sprachen - Verfahren

Techniken/Verfahren:

- TM konstruieren, die eine Sprache akzeptiert
- TM konstruieren, die eine Funktion berechnet
- TM konstruieren, die eine Sprache entscheidet
- Verschiedene Konstruktionen, um Abschlusseigenschaften zu zeigen
- Beweisen, dass ein Problem unentscheidbar ist

# Komplexität - Begriffe

Die entscheidbaren Probleme werden weiter bzgl. ihrer Komplexität unterteilt. Begriffe:

- zeitbeschränkt, platzbeschränkt, Zeitbeschränkung, Platzbeschränkung
- Komplexitätsklassen
- P, NP, PSPACE, NPSPACE
- Church-Turing-These, erweiterte Church-Turing-These
- Landau- oder O-Notation
- Verifikationsalgorithmus (alternative Def. von NP)
- Reduktion
- NP-vollständig (NPC), NP-schwierig

# Komplexität - Verfahren

Verfahren:

- Nachweis, dass ein Problem in NP ist
- Nachweis, dass ein Problem NP-vollständig ist

# Was wir ausgelassen haben...

Ausgelassen/Nur kurz erwähnt haben wir...

- Kellerautomaten (PDAs) (nur skizziert)
  - Akzeptanz mit leerem Keller
  - Akzeptanz mit Endzustand
- deterministische Kellerautomaten (DPDAs)
- linear beschränkte Automaten (LBAs)
- kontextsensitive Grammatiken (Typ-1)

## Anmerkung

Mit den letzteren beiden hätte man die Sprachfamilie der kontextsensitiven Sprachen (CS). Dies führt zu

- $\text{REG} \subsetneq \text{CF} \subsetneq \text{CS} \subsetneq \text{REC} \subsetneq \text{RE}$

Eine Sprache, die in CS ist, nicht aber in CF ist  $a^n b^n c^n$ . Eine Sprache, die dann in REC ist, aber nicht in CS, ist der Äquivalenztest für reguläre Ausdrücke mit Exponenten.

# Frage-Runde 1

Fragen ...



# Bemerkung zu den Fragen

## Wichtige Anmerkung

In den Fragen eben fehlte oft die Variante: **Gegeben** eine Sprache, **konstruieren Sie dazu** einen Automaten / eine Grammatik / .... Für solche Aufgaben siehe die Sammlung klausurtypischer Aufgaben. Außerdem wird i.A. die **Behauptung zu begründen/beweisen** sein!

# Der Logikteil

Der Logikteil ...

# Überblick

Im Logikteil hatten wir

- Aussagenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - Folgerbarkeit und Äquivalenz
  - Normalformen
  - Hornformeln
  - Resolution
- Prädikatenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - (Folgerbarkeit und Äquivalenz)
  - Normalformen
  - Resolution

# Aussagenlogik - Syntax

## Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor
  - Aussagesymbol, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel
  - Negation, Disjunktion, Konjunktion, Implikation, Biimplikation
- Strukturbäume
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion
- Grad und Tiefe einer Formel

# Aussagenlogik - Semantik

## Zusammenfassung **Semantik**:

- Belegung, Auswertung (einer Formel)
- Wahrheitstafeln, Wahrheitswerteverlauf
- erfüllende Belegung, falsifizierende Belegung, Modell
- kontingent, (allgemein-)gültig, unerfüllbar
- Tautologie, Kontradiktion
- $\mathcal{A} \models F$ ,  $\mathcal{A} \not\models F$ ,  $\models F$ ,  $F \models$

# Aussagenlogik - Folgerbarkeit und Äquivalenz

## Zusammenfassung **Folgerbarkeit und Äquivalenz**:

- Definition
- Nachweis mit Wahrheitstafeln
- Nachweis ohne Wahrheitstafeln
- Gegenbeispiel (mit und ohne Wahrheitstafeln)

# Aussagenlogik - Normalformen

## Zusammenfassung **Normalformen**:

- Literal, Klausel, duale Klausel, DNF und KNF
- Herstellung von DNF und KNF
  - durch Äquivalenzumformungen (basierend auf dem Ersetzbarkeitstheorem)
  - mit Wahrheitstafeln

# Aussagenlogik - Verfahren

Die effiziente Berechnung von (Un-)Erfüllbarkeit rückte dann ins Zentrum. Folgerbarkeit und Äquivalenz sind darauf rückführbar.

- **Hornformeln**

- *Einschränkung* der Aussagenlogik
- Effizienter (Un-)Erfüllbarkeitstest
  - Markierungsalgorithmus

- **Resolution** (spezielles Ableitungsverfahren)

- Resolvente, Resolutionssatz
- Verfeinerungen (P-Resolution, N-Resolution, ...)



# Prädikatenlogik - Syntax

## Zusammenfassung **Syntax**:

- Definition der Syntax:
  - Alphabet, Junktor, Quantor, Hilfssymbole
  - Variablen, Konstante, Funktions- und Prädikatensymbole, Aussagensymbole
  - Terme, atomare Formel, komplexe Formel
  - Hauptoperator, Teilformel, Teilterm
  - Quantorenvariable, Skopus
  - gebundene Variable, freie Variable
- strukturelle Induktion
- strukturelle Rekursion

# Prädikatenlogik - Semantik

## Zusammenfassung **Semantik**:

- Struktur, Universum, Interpretation
- Auswertung
- $x$ -Variante
- weitere semantische Begriffe wie in der Aussagenlogik (insb. auch *Folgerbarkeit* und *Äquivalenz*)

# Prädikatenlogik - Normalformen

## Zusammenfassung **Normalformen**:

- Normalformen basierend auf Äquivalenz:
  - aussagenlogische Äquivalenzen übertragen
  - neue Äquivalenzen durch Quantoren
  - Gebundene Umbenennung von Variablen
  - Pränexform
- Normalformen basierend auf Erfüllbarkeitsäquivalenz:
  - Bindung freier Variablen
  - Skolemisierung
  - Klauselnormalform
- Umformen einer Formel in Klauselnormalform

# Prädikatenlogik - Verfahren

Aufgrund der **Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik** kann es kein Verfahren wie in der Aussagenlogik geben, um (Un-)Erfüllbarkeit zu entscheiden (geschweige denn, dies effizient zu machen). Dennoch war es möglich ein Resolutionsverfahren einzuführen:

- **Resolution** (spezielles Ableitungsverfahren)
  - **Unifikationsalgorithmus**
  - Resolvente, Resolutionssatz
  - Verfeinerungen (P-Resolution, N-Resolution, ...)
  - Der Weg zur Resolution:
    - Herbrand-Universum, -Struktur, -Modell
    - Herbrand-Expansion
    - Algorithmus von Gilmore, Grundresolution

# Was wir ausgelassen haben...

Ausgelassen/Nur kurz erwähnt haben wir...

- Endlichkeitssatz der Aussagenlogik
- Genauer Beweis der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik
- Beweise im Rahmen der Herbrand-Theorie
- Beweis der Korrektheit des Unifikationsalgorithmus und der prädikatenlogischen Resolution

# Frage-Runde 2

Fragen ...

## Bemerkung zu den Fragen

### Wichtige Anmerkung

Auch hier die Anmerkung: Meist wird es nötig sein, die eigenen **Behauptungen zu begründen/beweisen!**

# Werbung

- Coq-Kurs
  - Mathematisches Argumentieren mit Coq als Hilfsmittel
  - 4.-8. und 10.-14. Oktober
  - 3 Credits, Klausur
  - Ansprechpartner: Maria Knobelsdorf (knobelsdorf(at)inf...) und Sebastian Böhne (boehne(at)uni-potsdam.de)
- Algorithmen und Datenstrukturen
- Algorithmik
- FGI2
- Weiteres bei der neu entstehenden Arbeitsgruppe ALGO und weiteren Arbeitsgruppen ...



# Schwierigkeit im Automatenteil

Im Automatenteil fiel mir am schwersten:

- 1 Endliche Automaten konstruieren und Korrektheit beweisen
- 2 Grammatiken konstruieren und Korrektheit beweisen
- 3 Turingmaschinen konstruieren und Korrektheit beweisen
- 4 Pumping Lemma für reguläre Sprachen
- 5 Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen
- 6 Abschlusseigenschaften beweisen
- 7 Chomsky-Normalform herstellen
- 8 Unentscheidbarkeit nachweisen
- 9 NP-vollständigkeit nachweisen

# Schwierigkeit im Logikteil

Im Logikteil fiel mir am schwersten:

- 1 Strukturelle Induktion
- 2 Folgerbarkeit und/oder Äquivalenz
- 3 Beweise zu Semantik, Folgerbarkeit usw.
- 4 Herstellung der KNF/DNF
- 5 Markierungsalgorithmus
- 6 Aussagenlogische Resolution
- 7 Prädikatenlogische Semantik
- 8 Herstellung der Klauselnormalform
- 9 Prädikatenlogische Resolution

# Klausurvorbereitung

Zur Klausurvorbereitung:

- **Stoff wiederholen...**

- **Skript + Buch/Bücher**
- Folien (und Lecture2Go-Videos)
- Erstellt euch eine Zusammenfassung mit allen wichtigen Begriffen, Verfahren etc. Wichtig ist, dass ihr so was selber macht. Es geht nicht darum, dass einer von euch das macht und an alle verteilt. Selber machen hat den wichtigen Lerneffekt!

- **... und viel(e) Aufgaben rechnen!**

- Aufgabenzettel
- **klausurtypischen Aufgaben** (sind online)
- Ggf. weitere Aufgaben aus Büchern
- eigene Aufgaben ausdenken ist auch sehr gut!

Ende...