Lineare Algebra II SoSe 2010 – Lösung Blatt 7

(1) (V, β) n-dimensionaler euklidischer Raum, φ orthogonaler Endomorphismus von V.

Vorbereitung: Sei $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n; \mathbb{R})$ die Matrix von φ bzgl. einer Orthonormalbasis von V.

Da φ orthogonal ist, gilt dann $A \cdot A^T = A^T \cdot A = E_n$.

Ein Vergleich der Diagonaleinträge von $A \cdot A^T$ und E_n liefert:

$$\circledast \quad \forall i = 1, \ldots, n: \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = 1.$$

Wegen $\alpha_{ij}^2 \geq 0$ für alle $i,j = 1, \ldots, n$ folgt insbesondere

$$\forall i = 1, \ldots, n: \quad \alpha_{ii}^2 \leq 1$$

$$\# \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n: |\alpha_{ii}| \leq 1, \quad \text{d.h. } -1 \leq \alpha_{ii} \leq 1.$$

(i) Beh.: $|\operatorname{Spur} \varphi| \leq n$.

Beweis:

$$|\operatorname{Spur} \varphi| = |\operatorname{Spur} A| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\alpha_{ii}|}_{\leq 1 \text{ nach } \#} \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

(ii) <u>Beh.:</u> $|\operatorname{Spur}\varphi| = n \iff \varphi = id_V$ oder $\varphi = -id_V$.

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$":

- $\varphi = id_V \Rightarrow A = E_n$

$$\Rightarrow |\operatorname{Spur}\varphi| = |\operatorname{Spur} A| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_{ii}}_{=1}\Big| = n.$$

- $\varphi = -id_V \Rightarrow A = -E_n$

$$\Rightarrow |\operatorname{Spur}\varphi| = |\operatorname{Spur} A| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_{ii}}_{=-1}\Big| = |-n| = n.$$

„$\Rightarrow$": Es gelte $|\operatorname{Spur}\varphi| = n \Rightarrow \operatorname{Spur}\varphi = \pm n$.

<u>1. Fall:</u> $\operatorname{Spur}\varphi = n$:

$$n = \operatorname{Spur}\varphi = \operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_{ii}}_{\leq 1 \text{ nach } (\#)}$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n: \alpha_{ii} = 1$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n: 1 \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = \underbrace{\alpha_{ii}^2}_{=1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \alpha_{ij}^2$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \underbrace{\alpha_{ij}^2}_{\geq 0 \ \forall j=1,\ldots,n} = 0 \Rightarrow \forall i,j = 1, \ldots, n,\ i \neq j: \alpha_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow A = E_n \Rightarrow \varphi = id_V.$$

<u>2. Fall:</u> $\operatorname{Spur}\varphi = -n$: $\varphi = -id_V$ analog zum 1. Fall,

<u>oder:</u> φ orthogonal $\Rightarrow -\varphi$ orthogonal,

$$\operatorname{Spur}(-\varphi) = -\operatorname{Spur}(\varphi) = n \overset{1.\text{Fall}}{\Longrightarrow} -\varphi = id_V \Rightarrow \varphi = -id_V.$$

Eleganterere Lösung zu (1):

(V, s) euklidischer Raum

$\Rightarrow$ $(\mathrm{End}(V), \gamma)$ euklidischer Raum mit $\gamma(\varphi, \psi) = \mathrm{Spur}(\varphi \circ \psi^*)$.

zu (i):

$$|\mathrm{Spur}\,\varphi|^2 = |\mathrm{Spur}(\varphi \circ \mathrm{id}_V^*)|^2 = |\gamma(\varphi, \mathrm{id}_V)|^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \|\varphi\|^2 \cdot \|\mathrm{id}_V\|^2 = \underbrace{\mathrm{Spur}(\underbrace{\varphi \circ \varphi^*}_{= \mathrm{id}_V})}_{= n} \cdot \underbrace{\mathrm{Spur}(\underbrace{\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V^*}_{= \mathrm{id}_V})}_{= n} = n^2$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Spur}\,\varphi| \leq n.$$

zu (ii):

$$|\mathrm{Spur}\,\varphi| = n \iff |\gamma(\varphi, \mathrm{id}_V)|^2 = \|\varphi\|^2 \cdot \|\mathrm{id}_V\|^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\iff} \varphi, \mathrm{id}_V \text{ linear abhängig} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: \varphi = \lambda\, \mathrm{id}_V$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ orthogonal} \\ \Rightarrow |\lambda| = 1}}{\iff} \varphi = \pm \mathrm{id}_V. \quad \lrcorner$$

(2) (V,β) n-dimensionaler unitärer Raum, $U \subset V$ Unterraum,

$\varphi : V \to V$ definiert durch

$$\varphi(\underline{v}) = \varphi(\underset{\in U}{\underline{u}} + \underset{\in U^\perp}{\underline{w}}) = \underline{u} - \underline{w}.$$

(eindeutige Darstellung)

(i) <u>Beh.:</u> φ ist ein unitärer, selbstadjungierter Endomorphismus von V

<u>Beweis:</u>

- φ ist ein Endomorphismus, d.h. linear:

  Seien $\underline{v}, \underline{v}' \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Schreibe

  $$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}, \quad \underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}' \quad \text{mit } \underline{u}, \underline{u}' \in U, \ \underline{w}, \underline{w}' \in U^\perp$$

  Dann gilt

  $$\lambda \underline{v} + \mu \underline{v}' = (\lambda \underline{u} + \mu \underline{u}') + (\lambda \underline{w} + \mu \underline{w}'),$$

  wobei $\lambda \underline{u} + \mu \underline{u}' \in U$ und $\lambda \underline{w} + \mu \underline{w}' \in U^\perp$.

  Es folgt

  $$\begin{aligned} \varphi(\lambda \underline{v} + \mu \underline{v}') &= (\lambda \underline{u} + \mu \underline{u}') - (\lambda \underline{w} + \mu \underline{w}') \\ &= \lambda(\underline{u} - \underline{w}) + \mu(\underline{u}' - \underline{w}') \\ &= \lambda \varphi(\underline{v}) + \mu \varphi(\underline{v}') \end{aligned}$$

  d.h. φ ist linear.

- φ ist selbstadjungiert:

  Seien $\underline{v}, \underline{v}' \in V$. Schreibe

  $$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}, \quad \underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}' \quad \text{mit } \underline{u}, \underline{u}' \in U, \ \underline{w}, \underline{w}' \in U^\perp.$$

  Dann gilt

  $$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}') = \beta(\underline{u} - \underline{w}, \underline{u}' + \underline{w}')$$

$$= \beta(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{u}}') + \underbrace{\beta(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{w}}')}_{\substack{=0,\text{ da } \underline{\underline{u}}\in U,\\ \underline{\underline{w}}'\in U^\perp}} - \underbrace{\beta(\underline{\underline{w}},\underline{\underline{u}}')}_{\substack{=0,\text{ da } \underline{\underline{w}}\in U^\perp,\\ \underline{\underline{u}}'\in U}} - \beta(\underline{\underline{w}},\underline{\underline{w}}')$$

$$= \beta(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{u}}') - \underbrace{\beta(\underline{\underline{u}},\underline{\underline{w}}')}_{\substack{=0,\text{ da } \underline{\underline{u}}\in U,\\ \underline{\underline{w}}'\in U^\perp}} + \underbrace{\beta(\underline{\underline{w}},\underline{\underline{u}}')}_{\substack{=0,\text{ da } \underline{\underline{w}}\in U^\perp,\\ \underline{\underline{u}}'\in U}} - \beta(\underline{\underline{w}},\underline{\underline{w}}')$$

$$= \beta(\underline{\underline{u}}+\underline{\underline{w}},\ \underline{\underline{u}}'-\underline{\underline{w}}') = \beta(\underline{\underline{v}},\varphi(\underline{\underline{v}}')),$$

d.h. φ ist selbstadjungiert.

- φ ist unitär:

  Mit $\underline{\underline{v}}\in V$ wie oben gilt

  $$(\varphi\circ\varphi)(\underline{\underline{v}}) = \varphi(\underbrace{\underline{\underline{u}}}_{\in U}-\underbrace{\underline{\underline{w}}}_{\in U^\perp}) = \underline{\underline{u}}+\underline{\underline{w}} = \underline{\underline{v}},$$

  d.h. $\varphi\circ\varphi = id_V$ und damit

  $$\varphi\circ\varphi^* = \varphi^*\circ\varphi \underset{\substack{\uparrow\\ \varphi\text{ selbstadj.}}}{=} \varphi\circ\varphi = id_V,$$

  d.h. φ ist unitär.

(ii) $(V,\beta) = (\mathbb{R}^3,$ kanonisches Skalarprodukt$)$, $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

. ges: Matrix von φ bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

Setze $W := \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

Dann gilt $\beta\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \beta\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$, d.h. $W\subset U^\perp$

Andererseits ist $\operatorname{Dim} U^\perp = 3 - \operatorname{Dim} U = 3-1 = 2 = \operatorname{Dim} W$,

d.h. $W = U^\perp$.

Nun gilt:

- $$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

- $$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

- $$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Die Matrix von φ bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$ ist also

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}}}.$$

(3) Sei (V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum, φ selbstadjungierter, unitärer Endomorphismus von V.

<u>Beh.:</u> Es existiert ein Unterraum $U \subset V$, so dass φ die in Aufgabe (2) zu U definierte Abbildung ist.

<u>Beweis:</u> Es gilt:

$$\varphi \circ \varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ selbstadjungiert}}}{=} \varphi \circ \varphi^* \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ unitär}}}{=} \mathrm{id}_V,$$

d.h. für das Polynom $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(X) = X^2 - 1$ gilt $p(\varphi) = 0$.
Folglich ist das Minimalpolynom $\mu_\varphi(X) \in \mathbb{C}[X]$ ein Teiler von $p(X)$, d.h. $\mu_\varphi(X) \in \{X-1, X+1, X^2-1\}$.

<u>Fallunterscheidung:</u>

<u>1. Fall:</u> $\mu_\varphi(X) = X - 1$

Dann gilt $0 = \mu_\varphi(\varphi) = \varphi - \mathrm{id}_V \Rightarrow \varphi = \mathrm{id}_V$ und man bekommt φ aus Aufgabe (2) mit $U := V$.

<u>2. Fall:</u> $\mu_\varphi(X) = X + 1$

Dann gilt $0 = \mu_\varphi(\varphi) = \varphi + \mathrm{id}_V \Rightarrow \varphi = -\mathrm{id}_V$ und man bekommt φ aus Aufgabe (2) mit $U = \{0\}$.

<u>3. Fall:</u> $\mu_\varphi(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

Dann hat φ genau die Eigenwerte 1 und -1.
Als selbstadjungierter Endomorphismus ist φ orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gilt

$$V = V(1,\varphi) \oplus V(-1,\varphi) \quad \text{mit} \quad V(-1,\varphi) = V(1,\varphi)^{\perp}.$$

Setze $U := V(1,\varphi)$ und bezeichne mit $\varphi_U : V \to V$ die in Aufgabe (2) mit U definierte Abbildung.

Für ein beliebiges $\underline{v} \in V$ schreibe $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ mit

$$\underline{u} \in V(1,\varphi) = U$$

und $\underline{w} \in V(-1,\varphi) = U^{\perp}$.

Dann gilt:

$$\varphi(\underline{v}) = \varphi(\underline{u}+\underline{w}) = \varphi(\underline{u}) + \varphi(\underline{w})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \underline{u} \in V(1,\varphi), \\ \underline{w} \in V(-1,\varphi)}}{=} \underline{u} - \underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{u} \in U, \\ \underline{w} \in U^{\perp}}}{=} \varphi_U(\underline{u}+\underline{w}) = \varphi_U(\underline{v}),$$

d.h. $\varphi = \varphi_U$.

(4) $U = \left\langle \underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$,

φ = Drehung des $\mathbb{R}^3$ um Winkel ϑ um $U^\perp$.

<u>ges.:</u> Matrix von φ bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

Bestimme ON-Basis von U durch Orthonormieren der Basis $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}$:

- $$\underline{\underline{a}}_1 = \frac{\underline{\underline{a}}}{\|\underline{\underline{a}}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $$\underline{\underline{a}}_2' = \underline{\underline{b}} - \beta(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{a}}_1)\, \underline{\underline{a}}_1$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 \cdot \underline{\underline{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\underline{\underline{a}}_2 = \frac{\underline{\underline{a}}_2'}{\|\underline{\underline{a}}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ergänze diese Basis $\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2$ zu einer ON-Basis von $\mathbb{R}^3$:

wähle $$\underline{\underline{a}}_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Algorithmus: Mit Austauschsatz beliebig ergänzen, dann orthonormieren.)

Die Matrix von φ bzgl. der Basis $\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2, \underline{\underline{a}}_3$ ist dann

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von φ bzgl. der kanonischen Basis ist dann

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1},$$

wobei S die Übergangsmatrix von der kanonischen Basis zur Basis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ ist.

Die Spalten von S sind $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, d.h. man erhält

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad SAS^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\vartheta + 1 & \cos\vartheta - 1 & \sqrt{2}\sin\vartheta \\ \cos\vartheta - 1 & \cos\vartheta + 1 & \sqrt{2}\sin\vartheta \\ -\sqrt{2}\sin\vartheta & -\sqrt{2}\sin\vartheta & 2\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$