

Bauforschung

Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie

T 2441

Fraunhofer IRB Verlag

T 2441

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie

von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Thomas Jul Hofmann

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr. techn. H. Bednarczyk

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1992

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1992

Zusammenfassung

Vorge stellt wird eine gegenüber der elementaren Theorie verfeinerte und konsistentere Balkentheorie.

Die Verfeinerung erfolgt über die Korrektur des Widerspruchs zwischen den Schubspannungen und den Schubverzerrungen, wie er bei der Timoshenko-Balkentheorie vorliegt. Diese Inkonsistenz wird durch eine genauere Erfassung der Schubverzerrungen beseitigt, wodurch im wesentlichen eine genauere Längsspannungsberechnung ermöglicht wird. In Analogie zur bekannten Wölbkrafttorsion werden Wölbfunktionen in die Biegetheorie eingeführt.

Zu der in diesem Sinne erweiterten Balkentheorie wird die Herleitung angegeben. Ihre Genauigkeit wird abgeschätzt, und sie wird auf ihren möglichen Anwendungsbereich hin untersucht.

Das Ergebnis ist eine geometrisch lineare Theorie für linear elastischen homogenen isotropen Werkstoff mit Erweiterung auf die linearisierte Theorie II. Ordnung und die Dynamik.

Es wird festgestellt, daß die entwickelte Balkentheorie u.a. dazu geeignet ist, bei gegliederten dünnwandigen Querschnitten und für gewöhnliche Balkenabmessungen den "Shear-Lag-Effekt" bzw. das Problem der "mittragenden Breite" wirklichkeitsnah und auf einfache Weise zu beschreiben.

Abstract

An extended and more consistent beam theory is introduced and compared to the elementary theory.

The contradiction between shear stresses and shear strains, existing in the beam theory of Timoshenko, is removed by the present extension. The inconsistency is eliminated by a more exact representation of the shear strains, leading to a more accurate calculation of the longitudinal stresses.

Essentially warping functions are introduced into the bending theory in analogy to the well known warping torsion.

The derivation of the extended beam theory for plane and spatial beams is given. Its accuracy is estimated, and the method is investigated with regard to its range of application. It turns out that the new theory is almost as simple as the traditional beam theories.

The result is a geometrically linear theory for linear elastic homogeneous isotropic material with an extension to the linearized second order theory and to dynamics.

It is shown that the developed beam theory is suitable to describe the "shear lag effect" and the problem of "effective flange width" of beams having usual dimensions and arbitrary thin-walled cross sections.

0 Motivation	11
1 Einleitung und Übersicht	17
2 Balkentheorie ohne Berücksichtigung der Schubverformung (Bernoulli-Theorie)	24
2.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	24
2.2 Übergang zur Stabtheorie der reinen Biegung	26
2.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	26
2.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Biege-Problems und ihre Lösung	27
3 Balkentheorie unter Annahme einer linearen Querschnittsverwölbung (Timoshenko-Theorie)	29
3.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	29
3.2 Übergang zur Stabtheorie mit konstanter Schubverzerrung	34
3.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	34
3.2.2 Die Differentialgleichung des reinen Schub-Problems und ihre Lösung	35
4 Balkentheorie unter Annahme einer kubischen Querschnittsverwölbung (Erweiterte Theorie)	36
4.1 Herleitung der erweiterten Biege-Schub-Theorie	36
4.1.1 Grundgleichungen des Stabkontinuums	37
4.1.2 Übergang zur Stabtheorie mit quadratischer Schubverzerrung	41
4.1.2.1 Grundgleichungen und Spannungen	41
4.1.2.2 Die Differentialgleichungen des Biege-Schub-Problems	49
4.1.2.3 Vergleich mit bekannten Differentialgleichungen	50
4.1.2.4 Lösung der Schub-Differentialgleichung der erweiterten Theorie	52
4.1.2.5 Steifigkeitsmatrizen	55
4.1.2.6 Integralformulierung	60
4.2 Wölbwiderstand I_{ω}	68
4.3 Abschließende Bemerkung	70
5 Verallgemeinerte Formulierung für Längskraft, Zweiachsige Biegung und Torsion	73
5.1 Voraussetzungen	73

5.2 Virtuelle innere Arbeit	79
5.3 Virtuelle äußere Arbeit	84
5.4 Zusammenfassung der virtuellen Arbeiten	84
6 Vergleich der erweiterten Balkentheorie mit der Scheibentheorie und Fehlerabschätzung an einem Beispiel	86
6.1 Scheibentheorie	86
6.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie mit Fourier-Reihen	88
6.1.1.1 Allgemeiner Belastungsfall	88
6.1.1.2 Sonderfall I	91
6.1.1.3 Sonderfall II	93
6.2 Erweiterte Balkentheorie	95
6.2.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	95
6.3 Vergleich und Fehlerabschätzung der Formeln für die Randlängsspannung und die Mittenschubspannung der erweiterten Balkentheorie und der Scheibentheorie	98
6.3.1 Vergleich	98
6.3.2 Fehlerabschätzung	99
6.3.3 Zahlenbeispiel: Rechteckscheibe unter sinusförmiger Belastung	103
6.3.4 Abschließende Bemerkung	107
6.4 Lösung einiger Scheibenprobleme mit Polynom-Spannungsansatz	107
6.4.1 Beidseitig gelagerte Scheibe (1. Art)	107
6.4.1.1 Lösung nach der Scheibentheorie	107
6.4.1.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	109
6.4.2 Beidseitig gelagerte Scheibe (2. Art)	111
6.4.2.1 Lösung nach der Scheibentheorie	111
6.4.2.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	113
6.4.3 Kragträger unter Gleichlast	115
6.4.3.1 Lösung nach der Scheibentheorie	115
6.4.3.2 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	116
6.4.3.3 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebungen	118
6.4.4 Kragträger unter Einzellast	119
6.4.4.1 Lösung nach der erweiterten Balkentheorie	119
6.4.4.2 Vergleich der vertikalen Achsenverschiebung	121

6.4.5 Abschließende Bemerkung		124
7 Beschreibung des "Shear-Lag-Effektes" durch die erweiterte Balkentheorie und Klassifizierung an einem Beispiel		127
7.1 Lösung des Faltwerkproblems nach verschiedenen Theorien		132
7.1.1 Elementare Balkentheorie (TB)		132
7.1.2 Klassische Theorie (KT)		135
7.1.3 Strenge Theorie (ST)		139
7.1.4 Erweiterte Balkentheorie (EB)		145
7.2 Zahlenbeispiel: T-Profil unter sinusförmiger Belastung		146
7.2.1 Vergleich der Ergebnisse		146
7.2.2 Mittragende Breite		151
7.3 Abschließende Bemerkung		153
8 Erweiterung auf die linearisierte Theorie II. Ordnung		155
8.1 Herleitung		155
8.2 Integralformulierung		158
8.3 Geometrische Steifigkeitsmatrix		160
8.4 Beispiel: Eulerfall 1	$b/h/l = 0.1/1/5$ [m]	163
8.5 Abschließende Bemerkung		164
9 Erweiterung auf die Dynamik		165
9.1 Herleitung		165
9.2 Integralformulierung		168
9.3 Konsistente Massenmatrix		169
9.4 Beispiel: Balken auf zwei Stützen	$b/h/l = 0.1/1/5$ [m]	172
9.5 Beispiel: Kragträger	$b/h/l = 0.1/1/2.5$ [m]	178
9.6 Abschließende Bemerkung		183
10 Zusammenfassung und Schlußfolgerung		185
Schrifttum		186
A Anhang		191
A1 Primäre Schubspannungsverteilungen und Schubkorrekturfaktoren		192
A1.1 Rechteck-Querschnitt		193
A1.2 T-Profil		194

A1.3 I-Profil	195
A1.4 Hohlkasten-Querschnitt	196
A1.5 Kreisring-Querschnitt	197
A2 Wölbfunktionen und Wölbwiderstände	198
A2.1 Rechteck-Querschnitt	198
A2.2 T-Profil	200
A2.3 I-Profil	203
A2.4 Hohlkasten-Querschnitt	206
A2.5 Kreisring-Querschnitt	209
A3 Schublösungen einiger Grundlastfälle	211
A3.1 Kragträger	211
A3.1.1 Kragträger unter Einzellast, Volleinspannung	211
A3.1.2 Kragträger unter Einzellast, "wölbfreie" Einspannung	213
A3.1.3 Kragträger unter Gleichlast, Volleinspannung	215
A3.2 Biegeträger	217
A3.2.1 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert	217
A3.2.2 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig gelenkig (nicht wölbbehindert) gelagert	219
A3.2.3 Biegeträger unter sinuslinienförmiger Belastung, beidseitig gelenkig gelagert	221
A3.2.4 Biegeträger unter Einzellast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)	223
A3.2.5 Biegeträger unter Gleichlast, beidseitig eingespannt (wölbbehindert)	226
A4 Steifigkeitsmatrizen	228
A4.1 Lineare Steifigkeitsmatrix	228
A4.2 Geometrische Steifigkeitsmatrix	229
A4.3 Konsistente Massenmatrix	232
A5 Analogie: Torsions-Schub <--> Querkraft-Schub (2D)	235
A5.1 Reine Torsion (St. Venant) ; Reine Querkraft (Timoshenko)	235
A5.2 Wölbbehinderte Torsion ; Wölbbehinderte Biegung	239