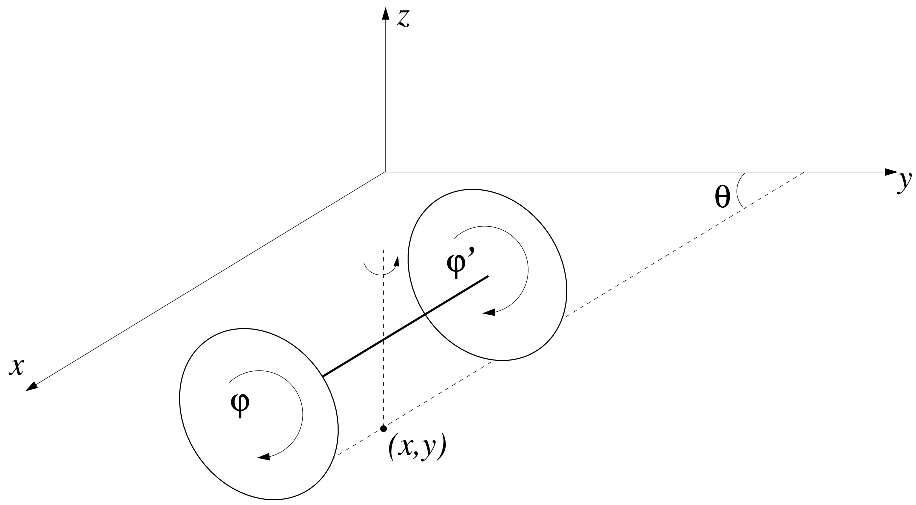
# Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

**Hausübung, Blatt 06** **WS 14/15** **Abgabetermin: 05.12.2014**

*Vorlesung: Luis Santos – Übungen: Andreas Deser – Computerübungen: Xiaolong Deng*

**[H14] rollende Hantel** **6 Punkte**

Betrachten Sie zwei Räder der Masse $m$ mit Radius $a$, die auf den Enden einer gemeinsamen masselosen Achse der Länge $b$ montiert sind und sich unabhängig voneinander drehen können. $\theta$ sei der Winkel dieser Achse mit der $y$-Achse (siehe Abbildung). Die Drehwinkel der beiden Räder seien $\phi$ und $\phi'$ und der Mittelpunkt der Achse liege am Punkt $(x, y)$. Diese Anordnung rollt ohne zu rutschen über die $xy$-Ebene.




a) Zeigen Sie, dass für das System 2 nicht-holonome Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \sin\theta\, \mathrm{d}x - \cos\theta\, \mathrm{d}y &= 0 \\ \cos\theta\, \mathrm{d}x + \sin\theta\, \mathrm{d}y &= a\, \mathrm{d}\Phi \qquad \text{mit } \Phi = \frac{\varphi + \varphi'}{2} \end{aligned}$$

sowie eine holonome Zwangsbedingung

$$\eta = c + \frac{b}{a}\theta \qquad \text{wobei } \eta = \varphi - \varphi' \text{ und } c \equiv \text{const}$$

existieren.(**1,5 Punkte**)

b) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der generalisierte Koordinaten $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \Phi$ und $q_4 = \theta$.(**1,5 Punkte**)
*Lösungshinweis:* $L = m(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2) + I_1\, \dot{q_3}^2 + \frac{3}{4}\, I_2\, \dot{q_4}^2$ mit $I_1 = \frac{m}{2}a^2$ und $I_2 = \frac{m}{2}b^2$

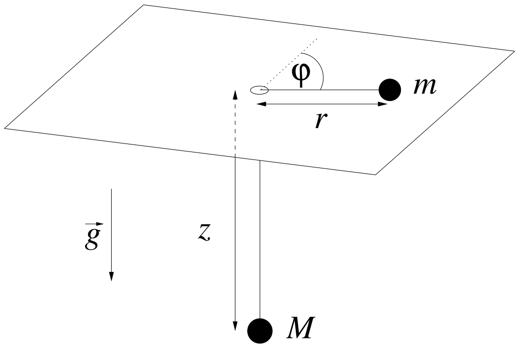
c) Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art mit 2 Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1$ und $\lambda_2$.(**1,5 Punkte**)
*Lösungshinweis*: $2m\ddot{q}_1 = \lambda_1 \sin q_4 + \lambda_2 \cos q_4$; $2m\ddot{q}_2 = -\lambda_1 \cos q_4 + \lambda_2 \sin q_4$; $2I_1\ddot{q}_3 = -a\lambda_2$; $\frac{3}{2}I_2\ddot{q}_4 = 0$

d) Lösen Sie die Gleichungen.(**1,5 Punkte**)
*Lösungshinweis:* $x = x_0 + \frac{v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$ mit $x_0, v_0 \equiv$ Konstanten und $\Omega = \dot{\theta} =$ konst

*Bitte wenden*

**[H15] Zentral gezogene Kugel** **4 Punkte**

Eine Punktmasse $m$ kann sich in der $xy$-Ebene reibungsfrei bewegen und ist über einen masselosen Faden der Länge $c$ durch ein Loch in der Ebene vernachlässigbarem Durchmessers mit einer Masse $M$ verbunden, welche sich nur in $z$-Richtung bewegen kann.




a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$. (**1 Punkt**
*Hinweis:* Benutzen Sie $r + z = c =$ konstant, dabei ist $c$ die (konstante) Länge des Fadens. Als Ergebnis müssen Sie $L = T(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) - V(r)$ erhalten.

b) Welche Koordinate ist zyklisch? Welche Bedeutung hat die dazugehörige Erhaltungsgröße?(**1 Punkt**)

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Schreiben Sie $\dot{\varphi}$ als Funktion von $|\vec{r}|$ für die Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = (a, 0), \vec{v}_0 = (0, v_0)$. (**1 Punkt**)

d) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für $r$ (ohne sie zu lösen) in der Form $m\ddot{r} = F(r)$ , wobei die Funktion $F$ zu bestimmen ist. (**1 Punkt**)

**Bitte geben Sie auf jeder Ausarbeitung der Hausübungen ihren Namen, Matrikelnummer und Studiengang an!**

**Die Ausarbeitungen können in der Handbibliothek am ITP (Appelstr.2) im Postfach von Andreas Deser abgegeben werden. Die Abgabe ist bis Freitags <u>VOR</u> der Vorlesung, d.h. bis <u>10:15 Uhr</u>. Eine spätere Abgabe ist nicht möglich!**