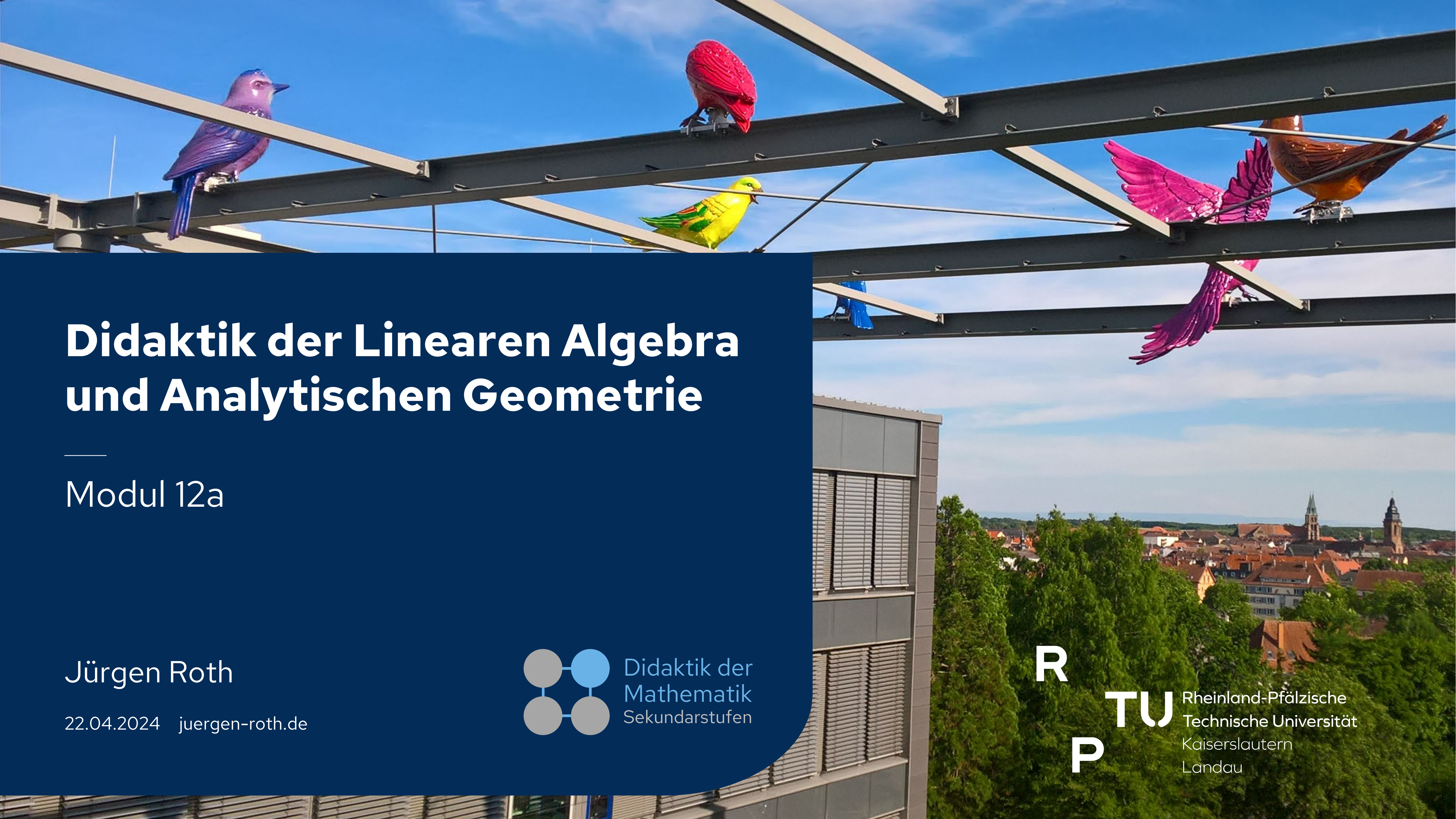


Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

Modul 12a

Jürgen Roth

22.04.2024 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

1. Ziele und Inhalte
2. Algebraisieren des Anschauungsraums
3. Skalarprodukt – Längen und Winkel messen
4. Modellieren und Angewandte Mathematik
5. Kegelschnitte

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-linearen-algebra-und-analytischen-geometrie

RPTU

2

Didaktik der Linearen Algebra & Analytischen Geometrie

Algebraisieren des Anschauungsraums

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Strategien beim Algebraisieren des Anschauungsraums

Zurückführen räumlicher Probleme auf ebene Probleme

- Schnittfiguren eines Körpers (einer Fläche) mit einer Ebene
- Projizieren eines Körpers (einer Fläche) in eine Koordinatenebene
- Folge: Einfachere Berechnung unbekannter Größen (Verfahren der ebenen Geometrie nutzbar.)

Koordinatisierung
Geeignetes Koordinatensystem wählen

Parametrisierung
Beschreiben von Bahnkurven durch Parametergleichungen

Vektorisierung
Erfassen von Strecken mit Hilfe von Vektoren

Kollinearität oder Vielfachheit
Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden untereinander

Komplanarität
Vektorielle Beschreibung der Parallelität von Geraden zur selben Ebene

Skalarprodukt
Grundlage von Längen-, Abstands- und Winkelberechnungen nach der Vektorisierung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

Präsenzaufgabe

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

1. Bearbeiten Sie diese Aufgabe für Schülerinnen und Schüler zunächst selbst.
2. Welche Schwierigkeiten sind ggf. bei der bei der Bearbeitung der Aufgabe durch Schülerinnen und Schüler zu erwarten?
3. Woran könnte es liegen, wenn Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit der Aufgabe haben?
4. Wie kann man damit im Unterricht umgehen?

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff

Einige typische Schülerschwierigkeiten

- Schwierigkeit mit Pfeilklassen
- Algebraische Auffassung von Vektoren fehlt („Vektor“ → „Schalter wird auf Geometrie gestellt“)
- Deutung von Zahlenpaaren/-tripeln als Pfeile
- Schwierigkeiten mit dem Nullvektor
- Lernen ohne die Entwicklung von (Grund-)Vorstellungen
- Vektorformeln aufstellen
- „Ortsvektor“ als Problemfall

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

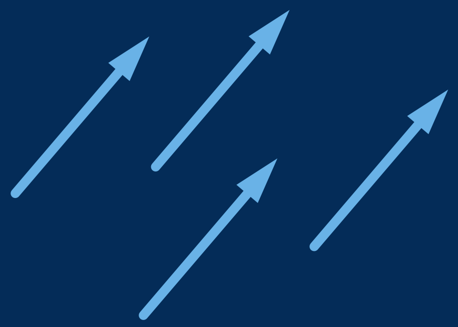
Schwierigkeit: Pfeilklassen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Alexandra (A)
Einen Pfeil in einem Raum.

Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“
Was sagst du dazu?



A: Stimmt nicht.

I: Warum?

A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.

I: Was ist für dich ein Vektor?

A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.

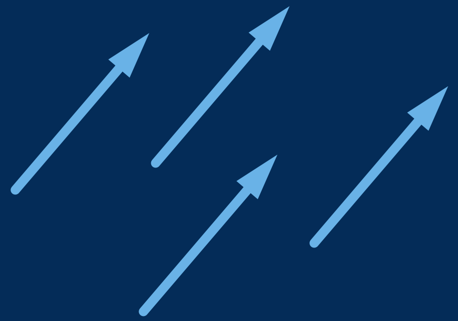
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?

A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Pfeilklassen

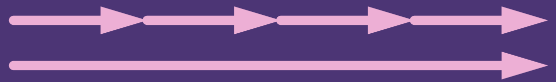
Interviewer (I)
Jemand sagt:
„Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“
Was sagst du dazu?

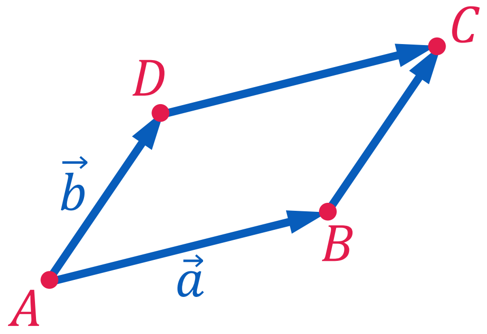


Richard (R)
Diese vier Vektoren kann man aneinanderreihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.

I: Bitte zeichne das auf.

R: [Fertigt eine Zeichnung an]





A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ … Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?

A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

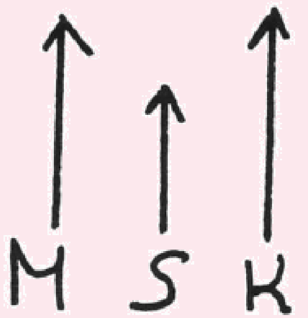
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

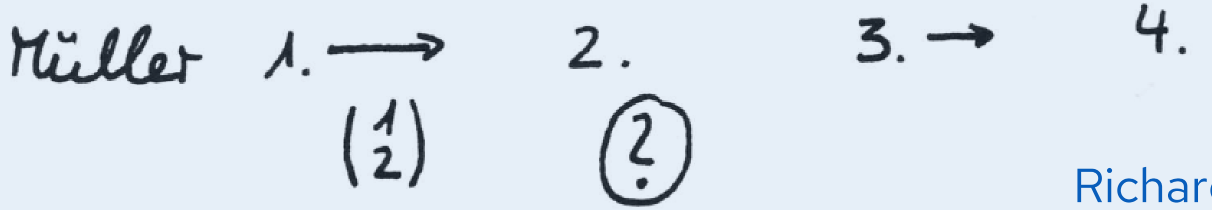
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

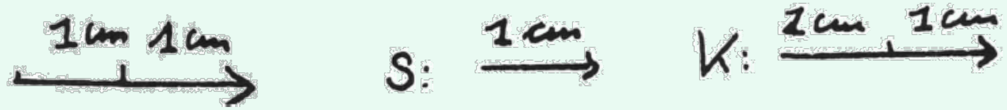
Schülerlösungen

Sandra





Richard



Alexandra

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Algebraische Auffassung von Vektoren

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)

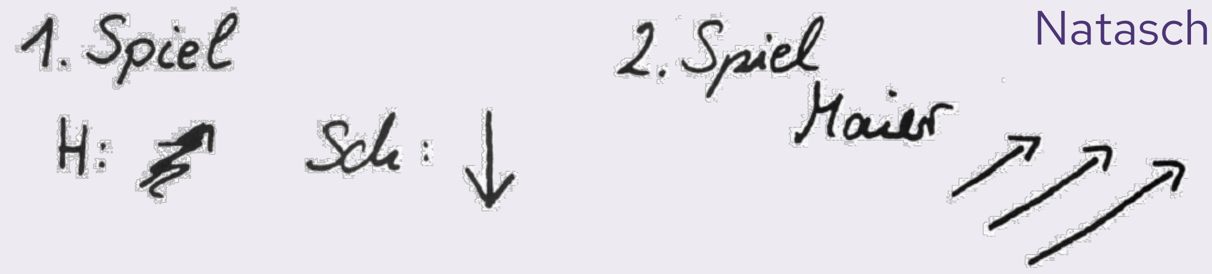
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)

3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)

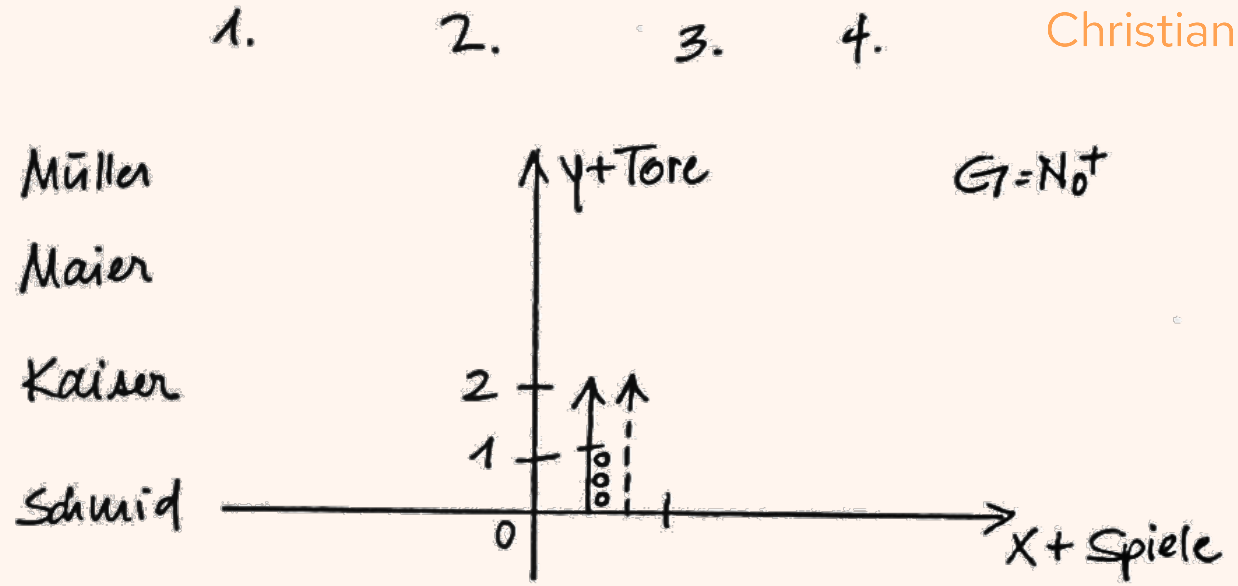
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Schülerlösungen



Natascha



Christian

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Algebraische Auffassung von Vektoren

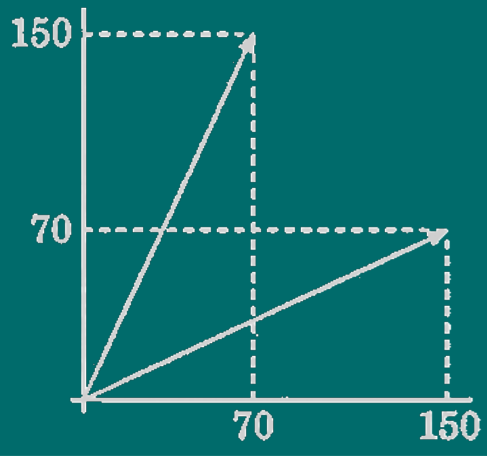
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Interviewer (I)
Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

Michaela
Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

I: Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}150\\70\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}70\\150\end{pmatrix}$ gleich oder verschieden?

A: [Fertigt eine Zeichnung an.]



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du das auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit:
Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

Zahlenpaare können …

- in der Regel als Punkte gedeutet werden.
- häufig nicht als Pfeile gedeutet werden.

Interviewer (I)
Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Christian
So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil. Wenn (3|4) da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Interviewer (I)
Stellt das Zahlenpaar $\binom{3}{4}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Natascha (N)
(3|4) sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Nullvektor

- Grenzfall eines Vektors
- Entarteter Pfeil der Länge Null (das ist aber ein Punkt)
- Weil Lernende Vektoren häufig mit Pfeilen identifizieren, ist der Nullvektor für sie kein Vektor.

Kathi (K): [Schreibt] $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dann ist es ein Punkt.

I: Dann ist es ein Punkt?

K: Ja, der Nullpunkt.

I: Kann es auch ein Pfeil sein?

K: Nein!

I: Warum nicht?

K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann?

K: Ja.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Nullvektor

Situation
Es geht um den Vektor $r \cdot \vec{a}$.

Interviewer (I): Und wenn $r = 0$?

Daniel (D): Dann gibt's den Vektor nicht.

Christoph (C): Es ist der Nullpunkt.

I: Es ist der Nullpunkt?

C: Ja.

D: … Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft … Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [Er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung.]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

Schwierigkeit: Fehlende (Grund-)Vorstellungen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Situation
Viele Lernende benutzen Vektoren, ohne zu verstehen, was sie tun.

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

Florian (F):
Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen X zu tun. X ist gleich irgendein Punkt A plus t mal $\overrightarrow{AB}$.
[Er schreibt:] $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

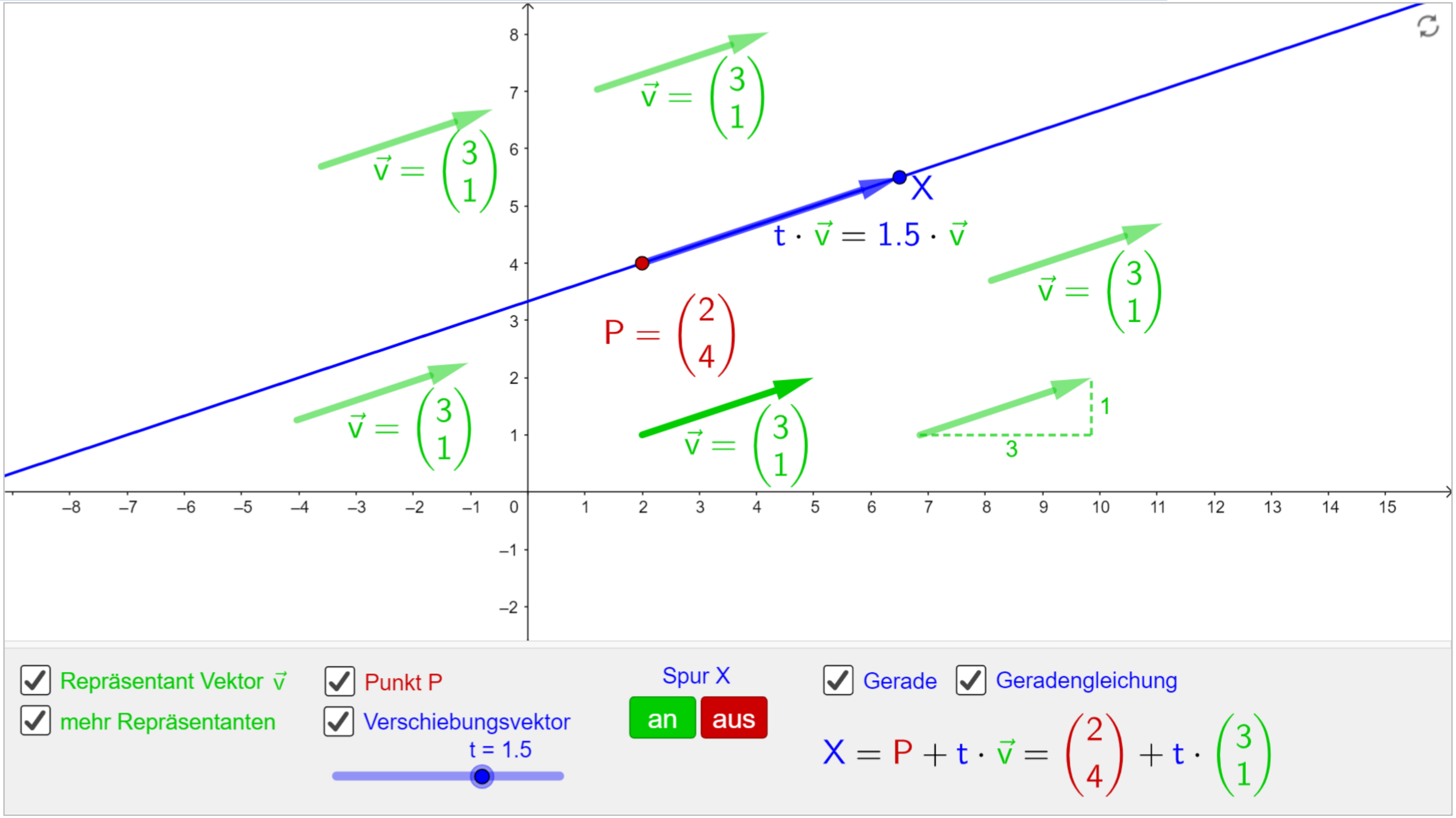
F: Für t kann man auch Lambda schreiben.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Weiß ich nicht!

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19 https://www.geogebra.org/m/e4rdbbg7

(Grund-)Vorstellungen zu Vektoren und Geraden



 https://www.geogebra.org/m/e4rdbbg7

Schwierigkeit: Vektorformeln aufstellen

Aufgabe

Stelle eine Formel auf, für den Mittelpunkt M einer Strecke AB.

Schülerlösungen

Alle gingen von derselben Skizze aus.

Sie schrieben aber unterschiedliches auf:

Isabella: $M = \frac{A+B}{2}$

Florian: $M = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

Martin: $M = \frac{A+\overrightarrow{AB}}{2}$

Karin: $M = \frac{A-B}{2}$

Probleme

- Im Prinzip wird so gedacht: „Ich gehe von A aus, füge die Hälfte von $\overrightarrow{AB}$ dazu und komme zu M."
- Wie kann der Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik notiert werden?
- Unverständnis des Vektorbegriffs
- „Typkontrolle" Pfeil ↔ Punkt fehlt.

 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

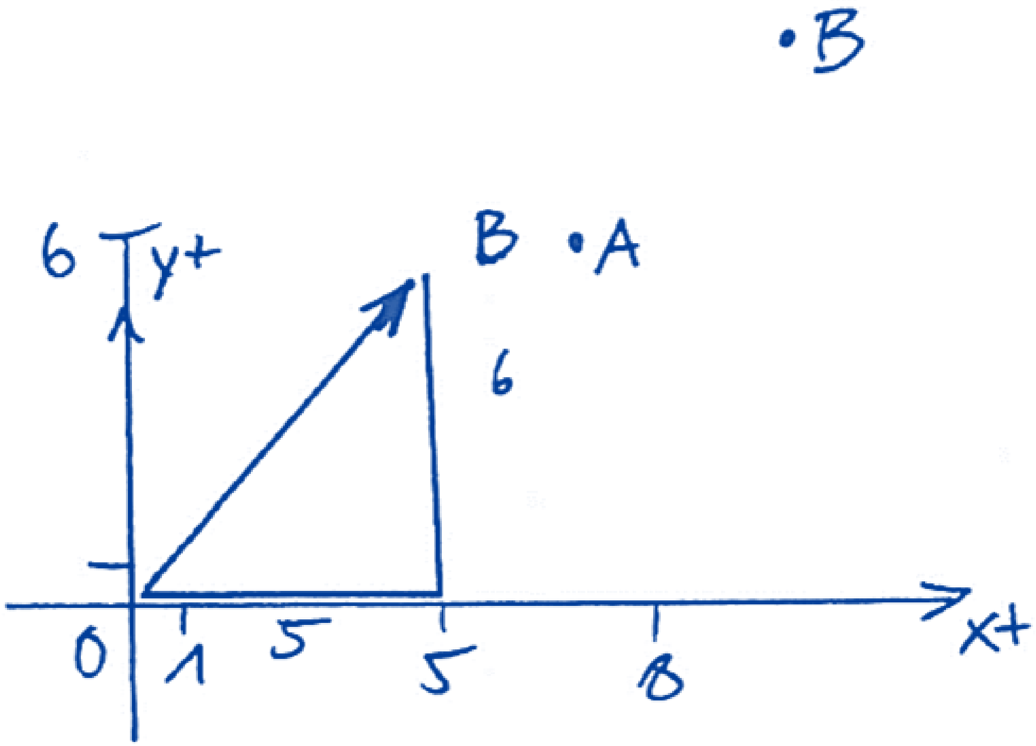
Schwierigkeit: „Ortsvektoren“

Aufgabe

Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $A = (8|6)$, $B = (13|12)$

Schülerlösung

- Christian rechnet richtig:
  $B - A = (5|6)$
- Er zeichnet die Punkte A und B einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein.
- Anschließend stellt er den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aber als Ortspfeil dar.



 Malle, G. (2005). Schwierigkeiten mit dem Vektorbegriff. *Mathematik lehren, 133*, 16–19

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

Sind Vektoren sinnvoll für die Analytische Geometrie?

Nein

- Analytische Geometrie gab es in der Schule schon vor Einführung der Vektorrechnung (ab 1960). Man konnte in etwa die gleichen Aufgaben lösen.
- Vektoren sparen keine Rechenarbeit: Konkrete Rechnungen erfolgen koordinatenweise.

Ja

- Vektorrechnung: Knappere und übersichtlichere Darstellung von Rechnungen und Beziehungen.
- Vektorgeometrie: Liegt beim Aufgabenlösen oft näher am tatsächlichen Denken als die Koordinatengeometrie
- In der Analytischen Geometrie denkt man in Punkten und Pfeilen (Bewegungen), die mit Vektoren besser beschreibbar sind.
- Vektoren sind primär Darstellungs- und keine Rechenmittel.
- Vektoren in $\mathbb{R}^n$ fassen n reelle Zahlen zu einem neuen Denkobjekt zusammen. (Bezeichnung: z. B. A oder $\vec{a}$)
- Rechenanweisungen (Vektorterme) & Beziehungen (Vektor-formeln) können knapp und übersichtlich dargestellt werden, ohne alle Einzelschritte angeben zu müssen.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14

Zugänge zum Vektorbegriff

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

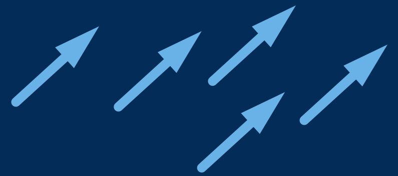
Was ist ein Vektor?

Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

Hochschulmathematik

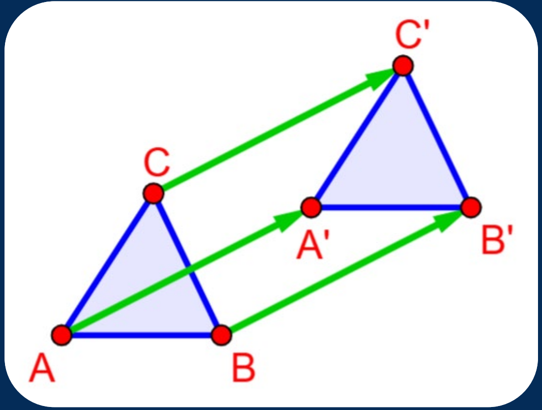
- **Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.**
- Axiomatischer Zugang über die Struktur

Schulmathematik



(1) Ein Vektor ist eine Pfeilklasse.

(2) Ein Vektor ist eine Verschiebung.



(3) Ein Vektor ist ein n-Tupel.

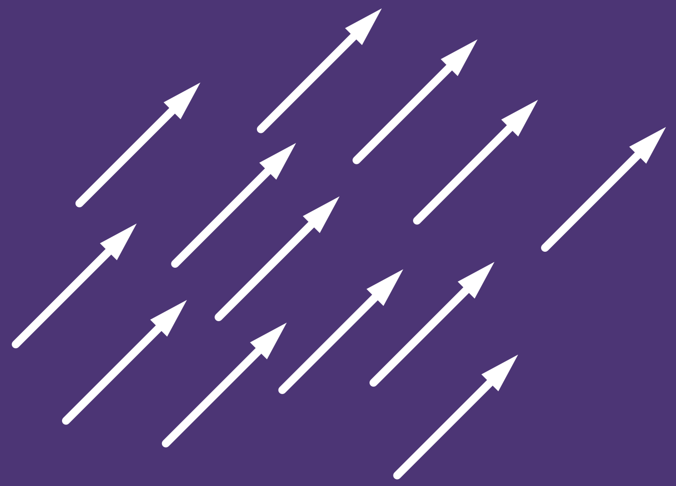
- Ein Vektor $\vec{v}$ ist als n-Tupel ein Element des $\mathbb{R}^n$.
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ oder auch als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



Probleme mit dem Pfeilklassenmodell

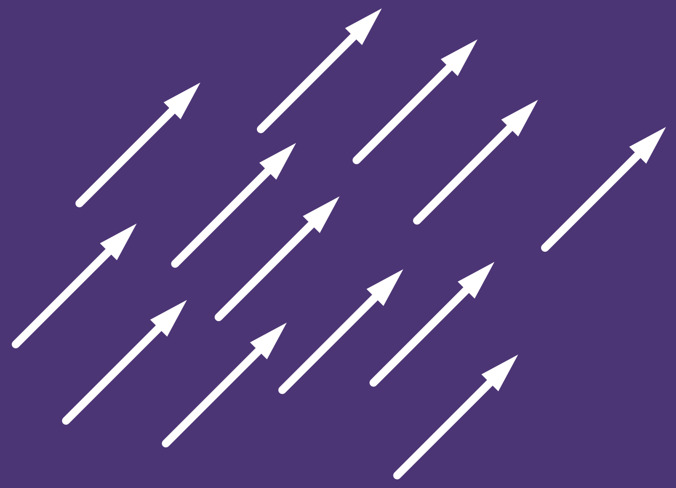
- Erfüllt Vektorraumaxiome, aber Probleme mit der Definition der Rechengesetze über Repräsentanten
- Einführung der Rechenoperationen und Beweise der Rechengesetzte kompliziert
  ⇒ Konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.
- Nur in der Schulmathematik etabliert.
- „Unbrauchbar" für
  - Analytische Geometrie
  - und Physik.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14

Vektoren als Pfeilklassen

Vektor im Pfeilklassenmodell

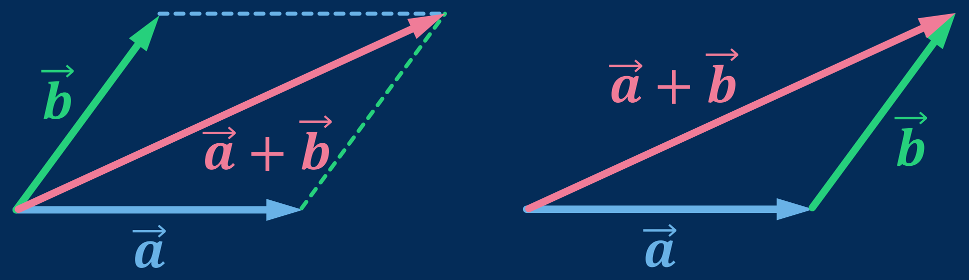
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile.



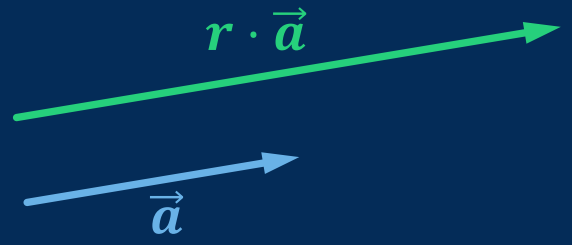
Bei jeder Definition muss die **Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten** gezeigt werden!

Rechenoperationen für Pfeilklassen

- … sind über Repräsentanten definiert.
- Definition der Addition durch Repräsentanten



- Definition der Vervielfachung durch Repräsentanten (für $r > 0$)

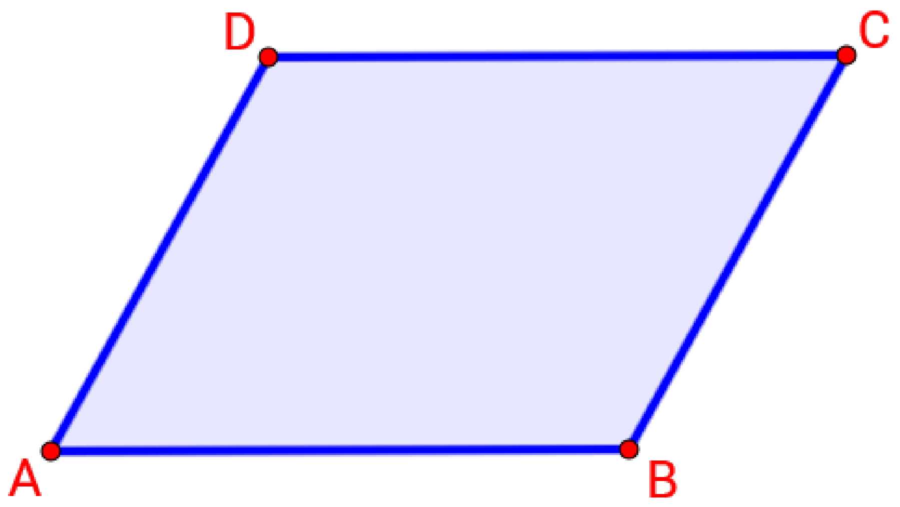


 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14 https://www.geogebra.org/m/p6btdgts

Pfeilklassen sind „unbrauchbar“ für die Analytische Geometrie

Aufgabe

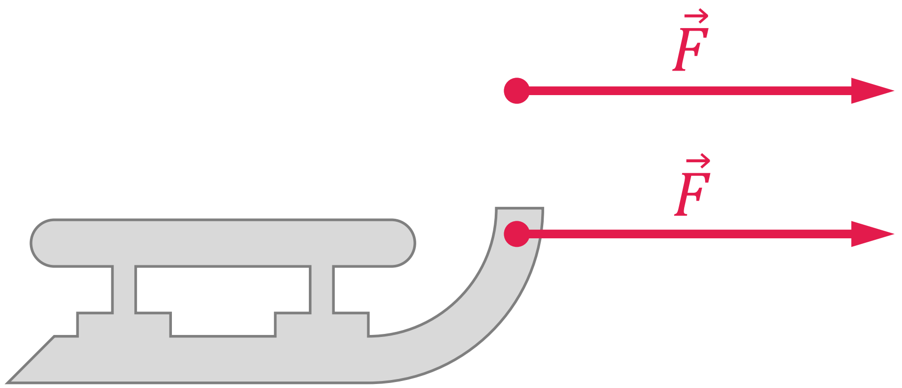
- Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A, B und D.
- Bestimme die Koordinaten des Eckpunkts C.

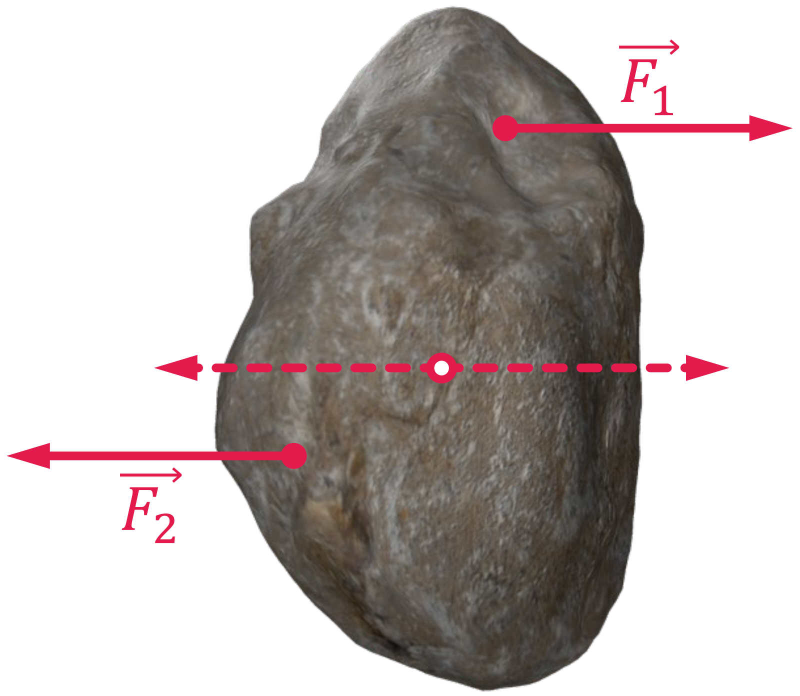


Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14

Pfeilklassen
sind „unbrauchbar“ für die Physik

Wo greift die Zugkraft an?





Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden!

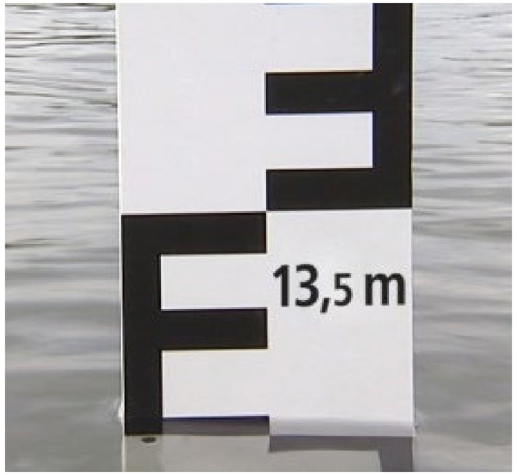
Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Von Koordinaten zu Vektoren

Idee:
Sachverhalte mit Koordinaten und Vektoren darstellen

- **Skalen als Beispiele für eindimensionale Koordinaten**
  Thermometer, Wasserstandsanzeiger, ...
- **Beispiele für zweidimensionale Koordinaten**
  Stadtpläne, Schachbrett, Fahrtenschreiber, Festlegung von Geländepunkten, ...
- **Beispiele für mehrdimensionale Koordinaten**
  Stückzahlen in einem Lager, Testergebnisse, ...

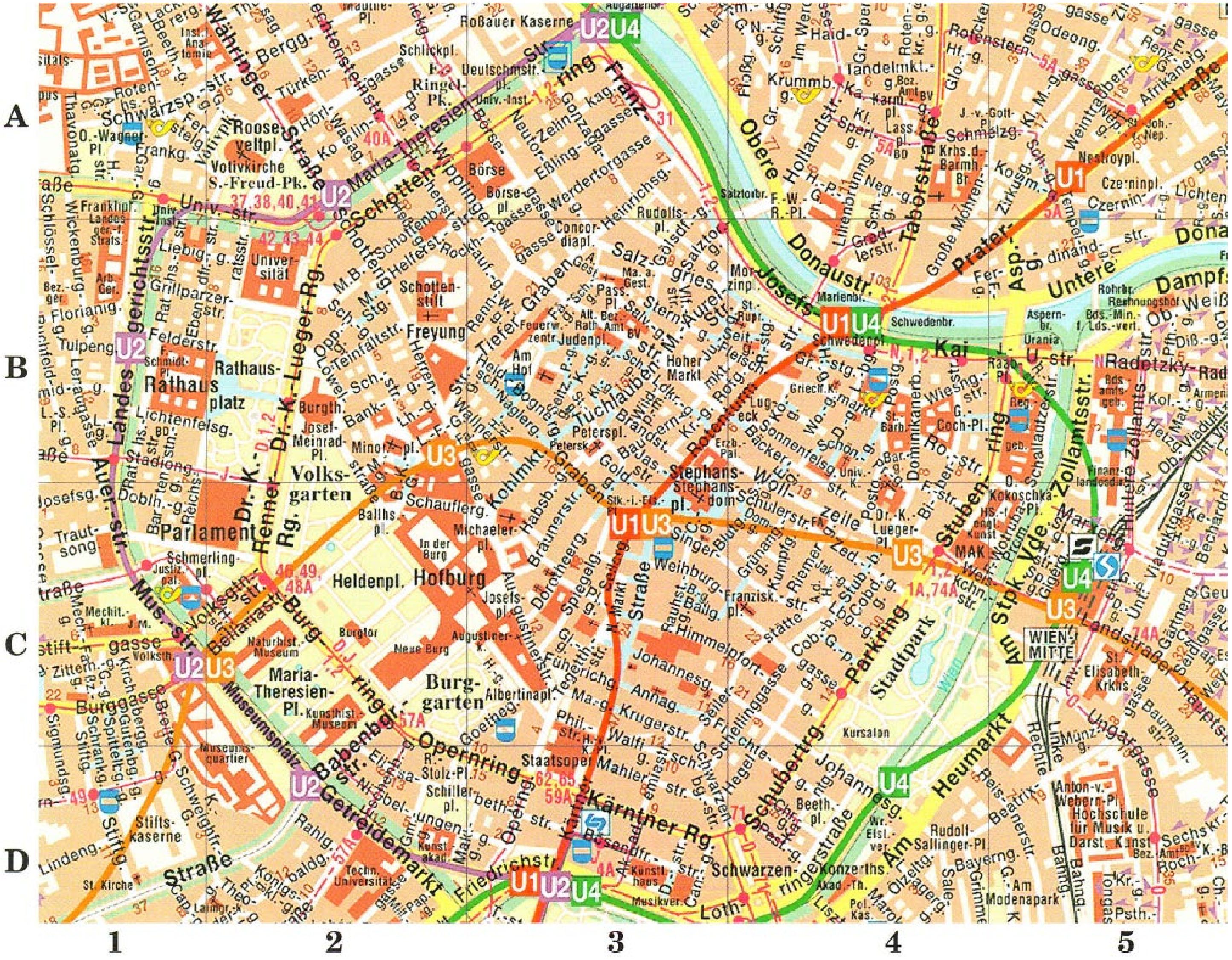
Wichtig: Dieser Zugang zum Vektorbegriff ist bewusst rein arithmetisch.



 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Von Koordinaten zu Vektoren

Das Burgtheater liegt in Planquadrat (B,2).



 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Tests

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert.
Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen.
Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte
und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt
jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib ein Zahlenpaar an, das ...

- Beates Punktzahlen bei den beiden Tests angibt.
- Doras Punktzahl bei den beiden Tests angibt.
- die Punktzahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt.
- Die Punktzahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.

$(15|18)$

$(15-2|18-2)$

$(15|15-2)$

$(18|18-2)$

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Aufgaben zu Zahlenpaaren und -tripeln

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Produktionskosten

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115 €, 135 € und 140 €.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 433 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65 €, 70 € bzw. 72 € pro Stück an.

a) **B**eschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.

Stückpreise:	$(115€\|135€\|140€)$
Lagerbestand:	$(728\|644\|840)$
Bestellzahlen:	$(411\|433\|596)$
Produktionskosten:	$(65€\|70€\|72€)$

b) **D**ie Produktionskosten steigen um 5 € pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5 € pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware im 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt. Wie lauten jetzt die Zahlentripel?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Vektorterme & -formeln aufstellen & interpretieren

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor $A = (a_1|a_2)$ gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor $B = (b_1|b_2)$ die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor C gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

a) **D**rücke C durch A und B aus.

b) **W**as gibt der Vektor $B - A$ an?

c) **W**as sagt die Gleichung $B = 2 \cdot A$ aus?

d) **D**rücke in diesem Fall C durch A aus.

Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor $V = (v_1|v_2|v_3|v_a)$ angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35 % Rabatt. Es sei V' der Vektor der Preise bei Großabnahme und R der Vektor der Rabatte.

a) **W**elche Beziehung besteht zwischen R und V?

b) **W**elche Beziehung besteht zwischen V' und V?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel

Vektorterme & -formeln aufstellen & interpretieren

Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor $P \in \mathbb{R}^{25}$ gibt die Zimmerpreise an, der Vektor $B \in \mathbb{R}^{25}$ gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

a) **D**rücke die Gesamteinnahmen G des Hotels im laufenden Monat durch P und B aus.

b) **I**m nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum G durch P und B aus.

Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$, die Preise der Waren seien $p_1, p_2, \ldots, p_{100}$.

a) **S**chreibe einen Stückzahlvektor S und einen Preisvektor P auf.

b) **W**as bedeutet $S \cdot P$?

 Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Komponentenweise Erklärung von Rechenoperationen

Addition, Subtraktion, Vervielfachung

- Komponentenweise erklärt
  - $(a_1|a_2) \pm (b_1|b_2) = (a_1 \pm b_1|a_2 \pm b_2)$
  - $r \cdot (a_1|a_2) = (r \cdot a_1|r \cdot a_2)$
- Formeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen
  - $b = 1{,}2 \cdot n$
  - $\vec{b} = 1{,}2 \cdot \vec{n}$

Die Erkenntnis, dass Addition, Subtraktion und Vervielfachung von Vektoren komponentenweise erklärbar ist, wird anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug erarbeitet.

(Vgl. etwa die Aufgaben auf den Folien 35-38.)

Skalarprodukt

Am Beispiel (Stückpreis, Stückzahl) einführen.

(Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt – Längen und Winkel messen)

$$(a_1|a_2) \cdot (b_1|b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. JMD 1, 171–187.

Erarbeitungsweg: Vektor als n-Tupel
Rechengesetze erarbeiten

Rechengesetze für Zahlenpaare
Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$ — $O = (0|0)$ ist der Nullvektor.
- $A + (-A) = O$ — $-A = (-a_1|-a_2)$ ist der Gegenvektor zu $A = (a_1|a_2)$.
- $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$
- $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
- $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
- $1 \cdot A = A$

Rechengesetze anhand von Aufgaben mit Anwendungsbezug (vgl. etwa Folien 35-38) erarbeitet.

Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum

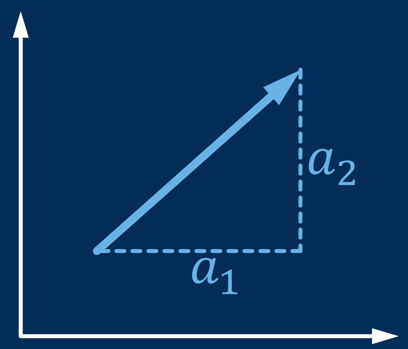
GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)
2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

Was ist ein Pfeil?
Ein Pfeil ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

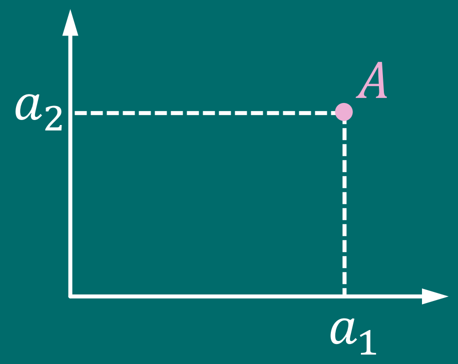
Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang und (vom Nullpfeil abgesehen) gleich gerichtet und gleich orientiert sind.

Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.



Was ist ein Punkt?
Ein Punkt ist ein n-Tupel (Zahlenpaar, Zahlentripel, …).

Geometrische Darstellung
Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.

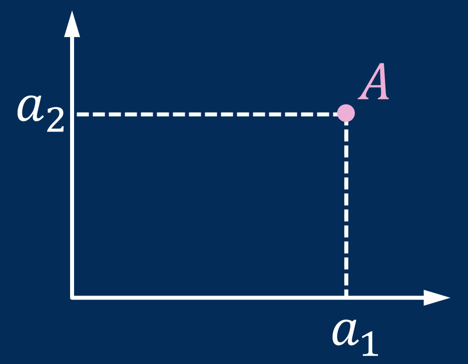


Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7.
Bürger, H., Fischer, R., Malle, G. & Reichel, H.-C. (1980).
Zur Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. *JMD, 1*(3), 171–187.

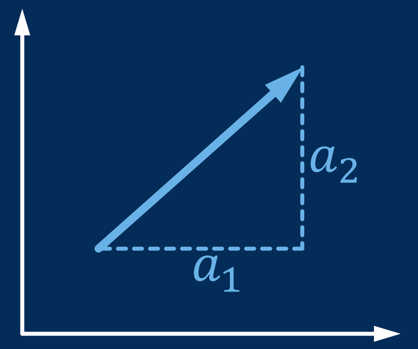
Vektoren als n-Tupel (Zahlenpaare, -tripel, …)

2- & 3-Tupel geometrisch als Punkte oder Pfeile deuten

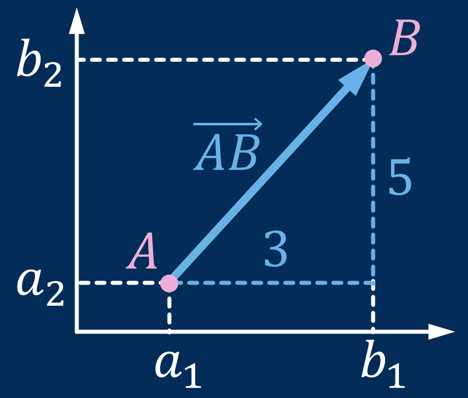
RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Zahlenpaar $A = (a_1|a_2)$ als Punkt in der Ebene.



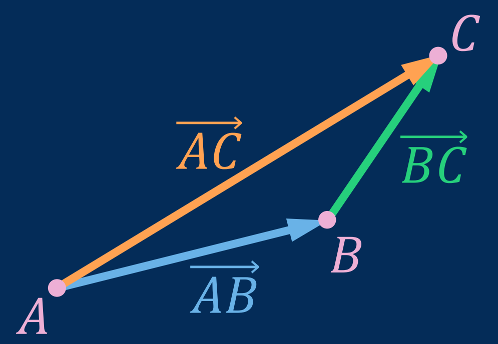
Zahlenpaar $\vec{a} = (a_1|a_2)$ als Pfeil in der Ebene.



Vektor $\overrightarrow{AB}$ gegeben durch Anfangs- und Endpunkt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1|b_2 - a_2)\\ &= (b_1|b_2) - (a_1|a_2)\\ &= B - A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A + \overrightarrow{AB} = B$$



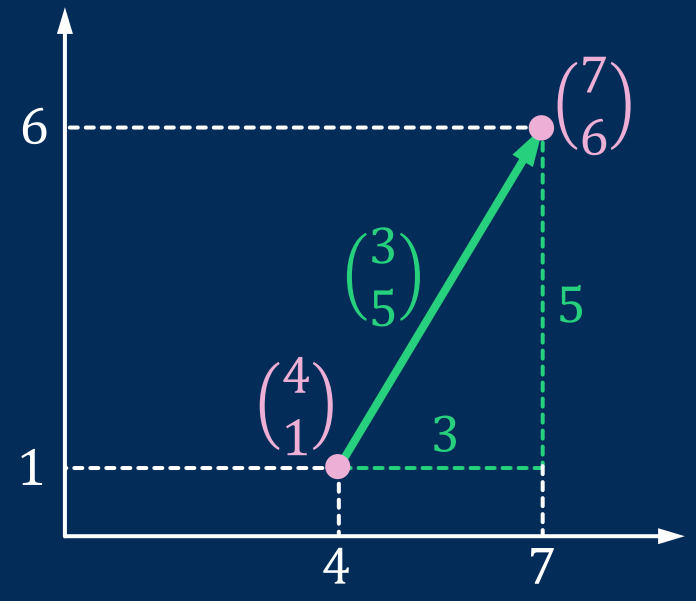
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\\ &= (B - A) + (C - B)\\ &= C - A\\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Geometrische Darstellungen der (arithmetischen) Addition

Punkt-Pfeil-Darstellung

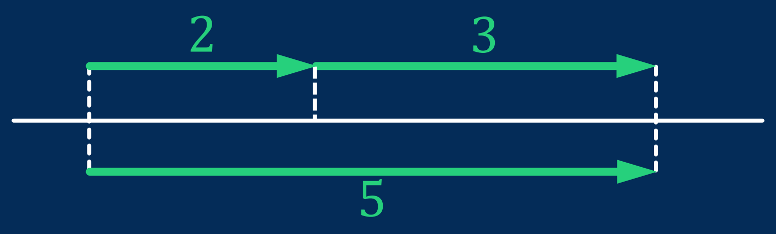
- Reelle Zahlen → Zahlengerade

- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem

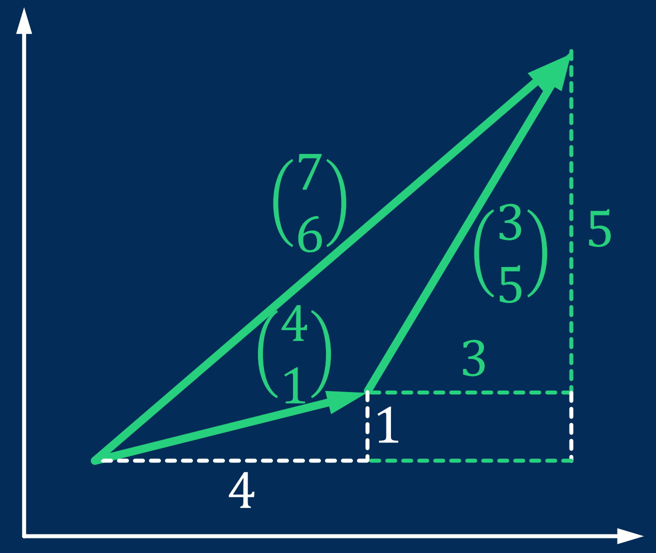


Pfeildarstellung

- Reelle Zahlen → Zahlengerade

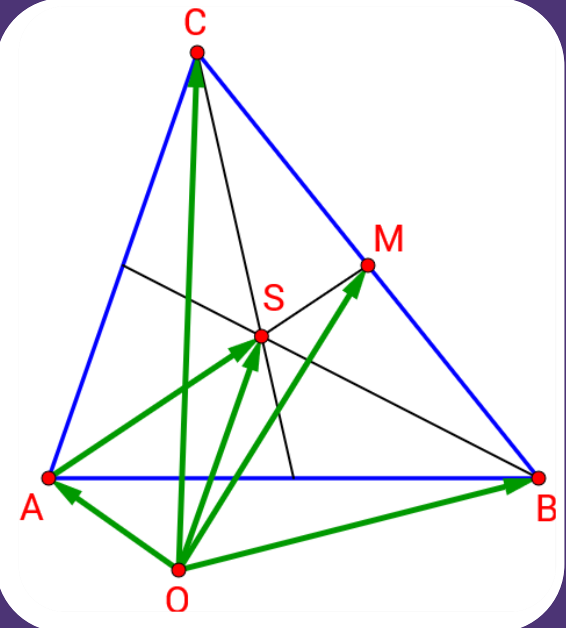


- Vektor (n-Tupel) → Koordinatensystem

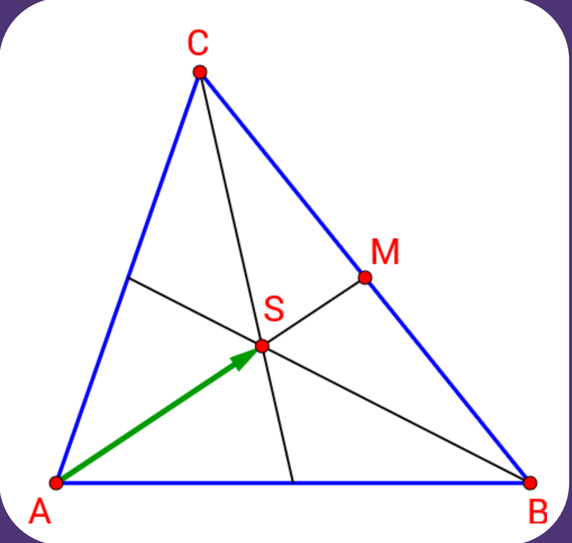


 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8–14 https://www.geogebra.org/m/kpww4bah

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



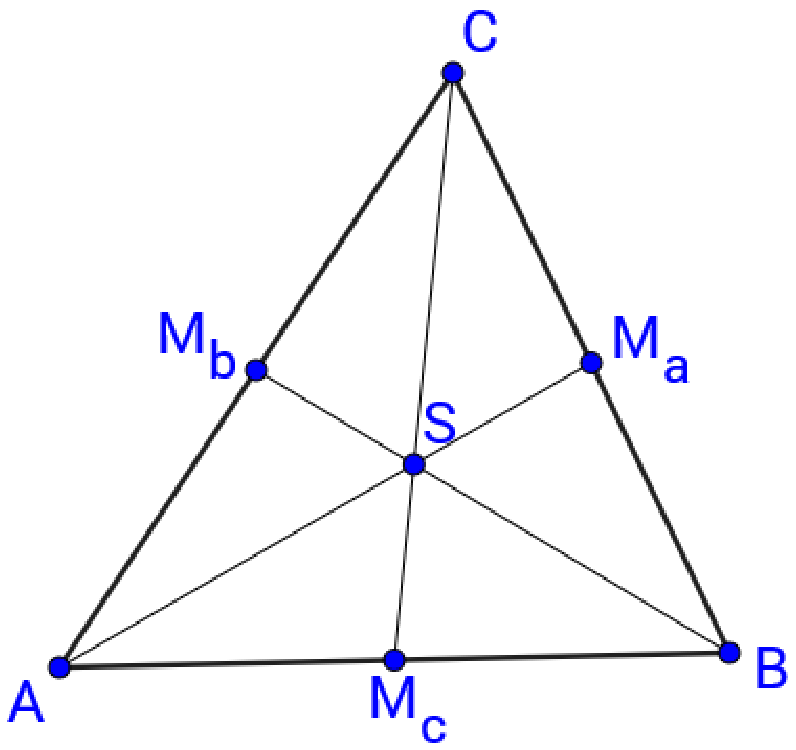
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$



$$S = A + \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= A + \tfrac{2}{3} \cdot (M - A)$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{2}{3} \cdot M$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot (B + C)\right)$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot A + \tfrac{1}{3}(B + C)$$
$$= \tfrac{1}{3}(A + B + C)$$

 Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

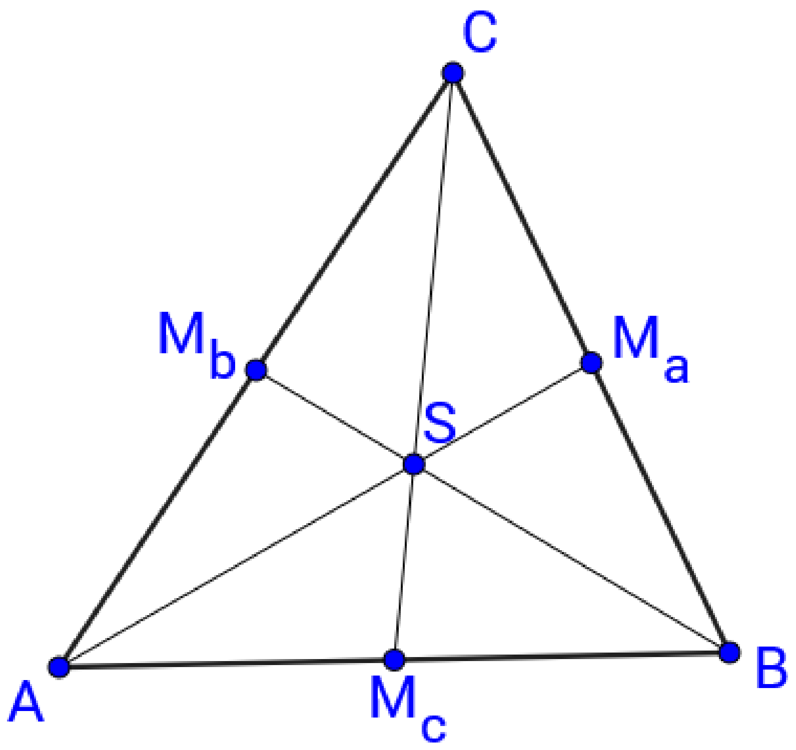


Satz

- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt S, dem Schwerpunkt.
- Zwischen den Eckpunkten A, B, C und dem Schwerpunkt S besteht die Lagebeziehung $3 \cdot S = A + B + C$.

 Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44–49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis

- Die Seitenhalbierenden s_a und s_b sind gegeben durch $s_a: X = A + t \cdot \overrightarrow{AM_a}$ und $s_b: X = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$.
- Es gibt reelle Zahlen t und u, so dass für den Schnittpunkt S dieser Seitenhalbierenden gilt:
$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = S = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$
- Richtungsvektoren $\overrightarrow{AM_a}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ als Linearkombinationen von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ schreiben:

$$\overrightarrow{AM_a} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

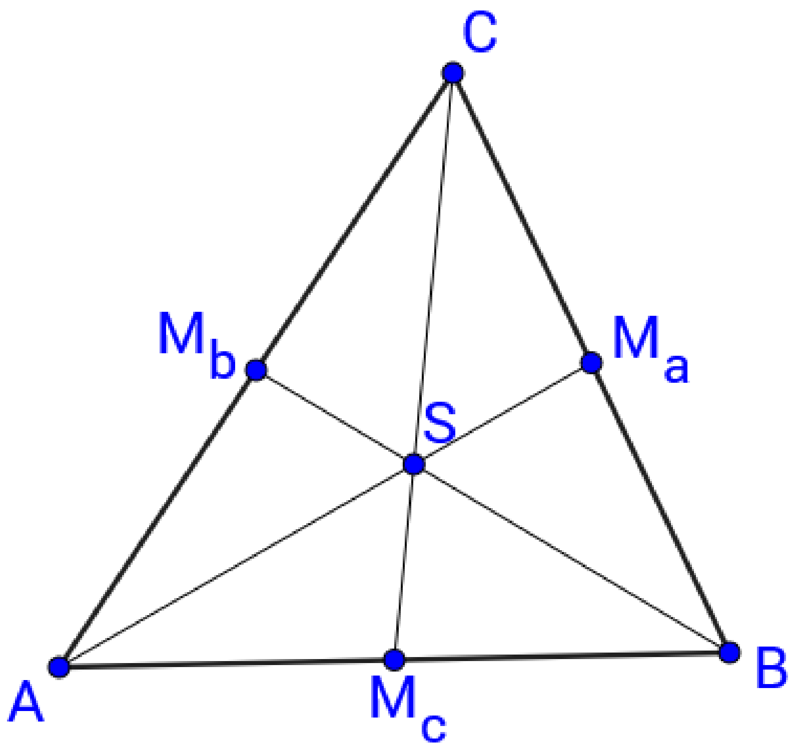
$$\overrightarrow{BM_b} = \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis (Fortsetzung)

- Wir erhalten damit:

$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}$$

$$\Leftrightarrow \ A + t \cdot \left(-\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = B + u \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$$

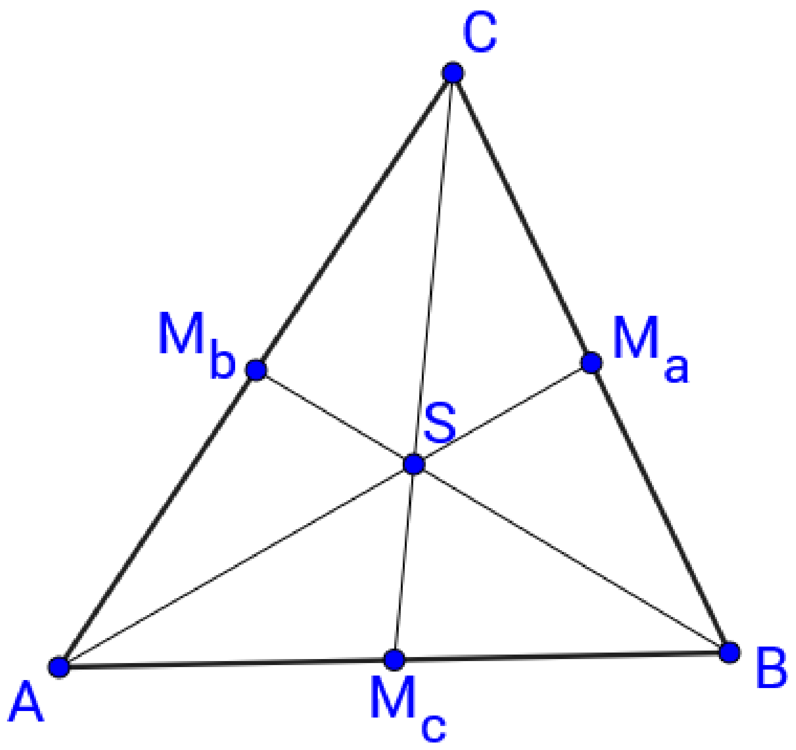
$$\Leftrightarrow A - B - t \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{t}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - t - \frac{u}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{u}{2} - \frac{t}{2}\right) \cdot \overrightarrow{BC}$$

- Weil $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht parallel sind, ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $1 - t - \frac{u}{2} = 0$ und $\frac{u}{2} - \frac{t}{2} = 0$.
- Lösen dieses Gleichungssystems ergibt: $u = t = \frac{2}{3}$
- Als Schnittpunkt S von s_a und s_b erhält man also:
$S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = A + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - A\right) = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$

Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44-49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks



Beweis (Fortsetzung)

- Aus $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$ folgt durch nachrechnen:
  $$S = C + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$$
- Folglich liegt S auch auf der dritten Seitenhalbierenden s_c des Dreiecks.
- Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.
- Der zweite Teil des Satzes folgt direkt aus
  $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$.
  $\Leftrightarrow 3 \cdot S = A + B + C$

■

Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren 133*, 44–49 https://www.geogebra.org/m/dwv7pdjy

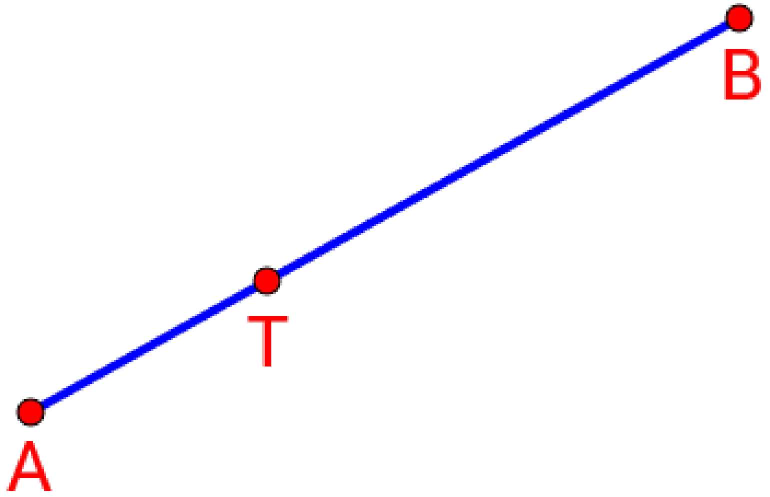
Ebene Geometrie mit analytischen Methoden
Beispiel: Teilung einer Strecke

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe

Die Strecke AB wird durch den Punkt T im Verhältnis 1 : 2 geteilt.

Drücke T durch A und B aus.



1. Lösungsmöglichkeit

$$T = A + \tfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow T = A + \tfrac{1}{3} \cdot (B - A)$$
$$\Leftrightarrow T = \tfrac{1}{3} \cdot (2A + B)$$

2. Lösungsmöglichkeit

$$\overrightarrow{AT} = \tfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow T - A = \tfrac{1}{3} \cdot (B - A)$$
$$\Leftrightarrow T = \tfrac{1}{3} \cdot (2A + B)$$

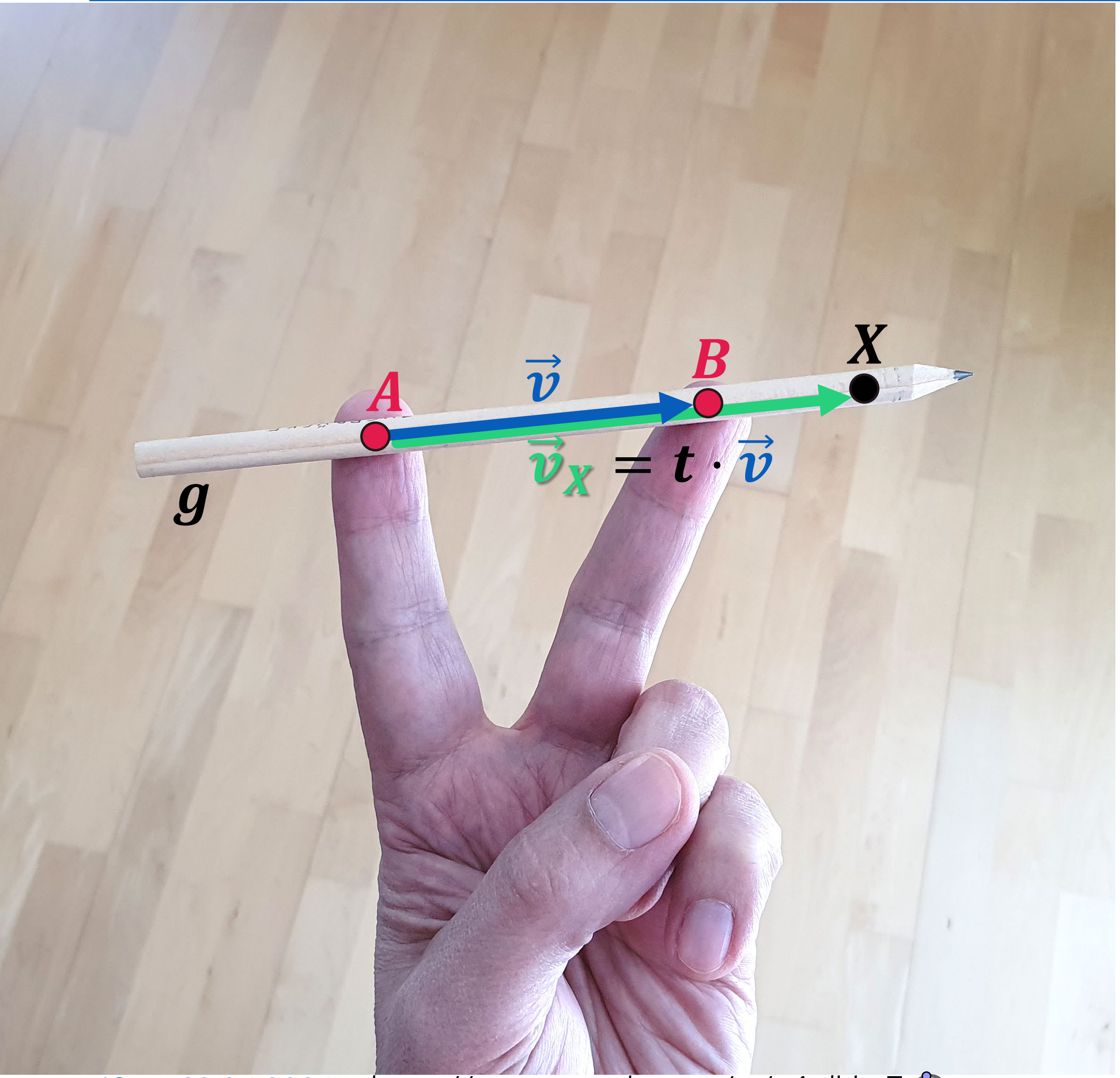
Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 8-14
Koth, M. (2005). Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie. *Mathematik lehren, 133*, 44-49

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie"
https://roth.tel/anageo

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Kapitel 2:
Algebraisieren des Anschauungsraum



Bemerkung

- Eine Gerade $\boldsymbol{g}$ ist eindeutig festgelegt über
  - zwei verschiedene Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\boldsymbol{A}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- Für jeden Punkt $\boldsymbol{X}$ der Gerade $\boldsymbol{g}$ gibt es eine reelle Zahl t, so dass gilt:

$$X = A + t \cdot \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

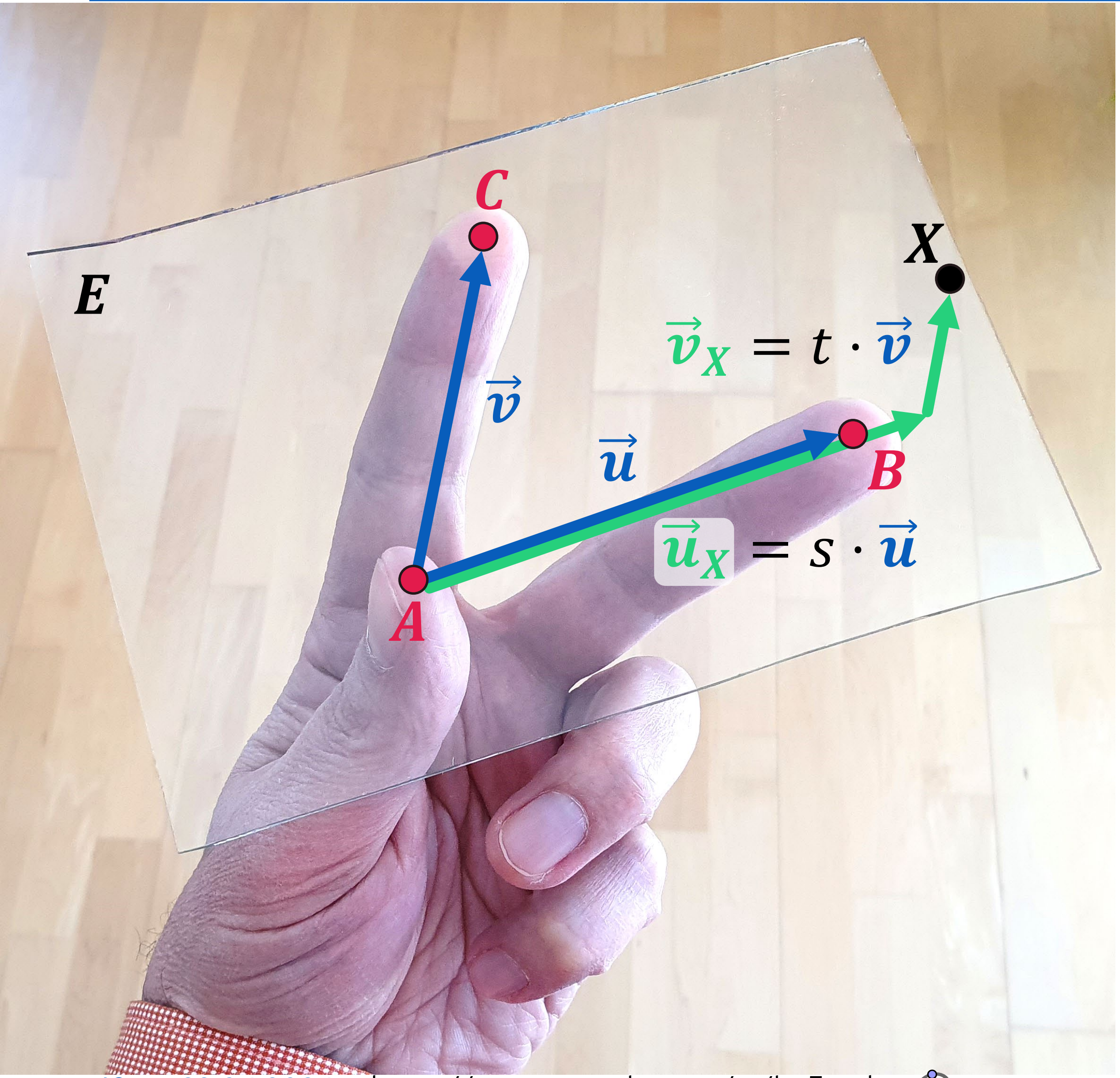
Geradengleichung: Parameterform

Eine Gerade $\boldsymbol{g}$ ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als

$$g = \{X \mid X = A + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz $\quad g: X = A + t \cdot \vec{v},\ \ t \in \mathbb{R}.$

Ebenengleichung: Parameterform



Bemerkung

- Eine Ebene $\boldsymbol{E}$ ist eindeutig festgelegt über
  - drei nicht kollineare Punkte $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ bzw.
  - einen Anfangspunkt $\boldsymbol{A}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
- Für jeden Punkt $\boldsymbol{X}$ der Ebene $\boldsymbol{E}$ gibt es zwei reelle Zahlen s und t, so dass gilt:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Ebenengleichung: Parameterform

Eine Ebene $\boldsymbol{E}$ ist eine Menge aus Punkten, die sich schreiben lässt als:

$$\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$$

oder kurz

$$\boldsymbol{E}: \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v},\ \ s, t \in \mathbb{R}.$$

 https://www.geogebra.org/m/bg5pcdep

Ebenengleichung: Koordinatenform

Beispiel: $x + 2y + 3z = 6 \quad (*)$

Vermutung: Die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ der Gleichung $x + 2y + 3z = 6$ ist eine Ebene.

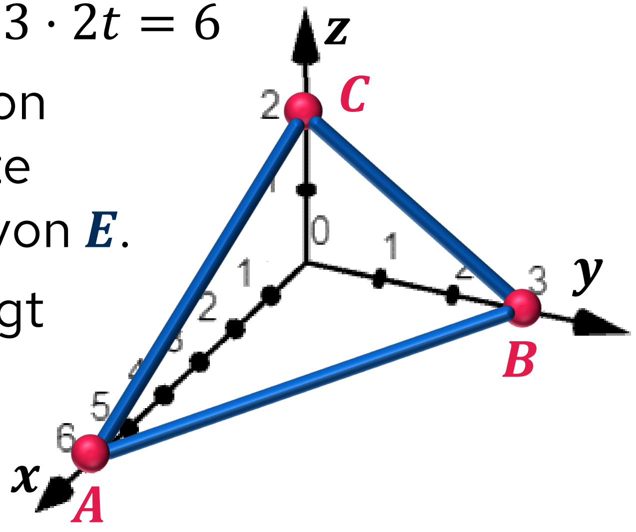
Vorgehen

- Setzt man $y = z = 0$ dann ergibt sich $x = 6$.
- Daraus ergibt sich der Punkt $\boldsymbol{A} = (6|0|0)$, den man als Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der x-Achse deuten kann.
- $x = z = 0$ liefert $y = 3$. $\boldsymbol{B} = (0|3|0)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der y-Achse.
- $x = y = 0$ liefert $z = 2$. $\boldsymbol{C} = (0|0|2)$ ist Schnittpunkt von $\boldsymbol{E}$ mit der z-Achse.
- $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ heißen **Spurpunkte** und man kann vermuten, dass die von ihnen bestimmte Ebene die Lösungsmenge $\boldsymbol{E}$ ist.

- Zu zeigen: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ ist der Punkt $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + s \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ Lösung der Gleichung $(*)$.
- Einsetzen der Punktkoordinaten liefert:

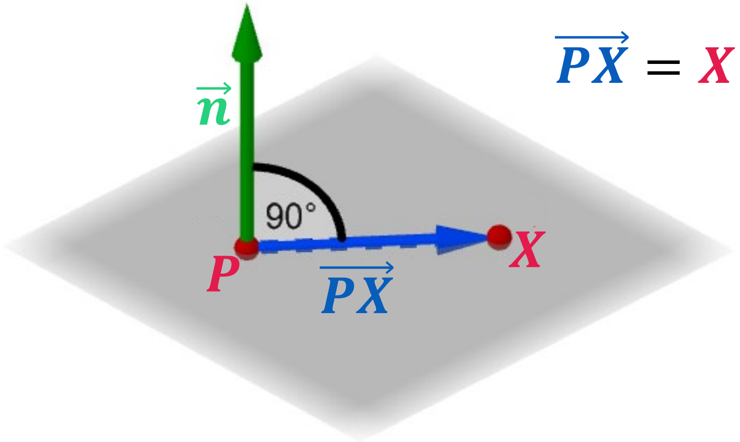
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 6s - 6t \\ 3s \\ 2t \end{pmatrix}$$

- Einsetzen in die Gleichung $(*)$ ergibt: $(6 - 6s - 6t) + 2 \cdot 3s + 3 \cdot 2t = 6$
- Also ist $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{E}$ und die von $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ aufgespannte Ebene eine Teilmenge von $\boldsymbol{E}$.
- Durch Nachrechnen zeigt man, dass jede weitere Lösung von $(*)$ wieder in der von den Spurpunkten aufgespannten Ebene liegt.



Ebenengleichung: Normalenform

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$$\overrightarrow{PX} = X - P$$

- Ein Normalenvektor einer Ebene E ist ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, der zu jedem Verbindungsvektor zweier beliebiger Punkte P und X der Ebene E orthogonal ist, für den also gilt: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n}$
- Damit folgt für das Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

Ebenengleichung in Normalenform

Ist P ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte X der Ebene schreiben als

$$E = \{X | (X - P) \cdot \vec{n} = 0\}$$

oder kurz:

$$E: (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

Hesse'sche Normalenform

Ist P ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene E, dann kann man alle Punkte X der Ebene schreiben als

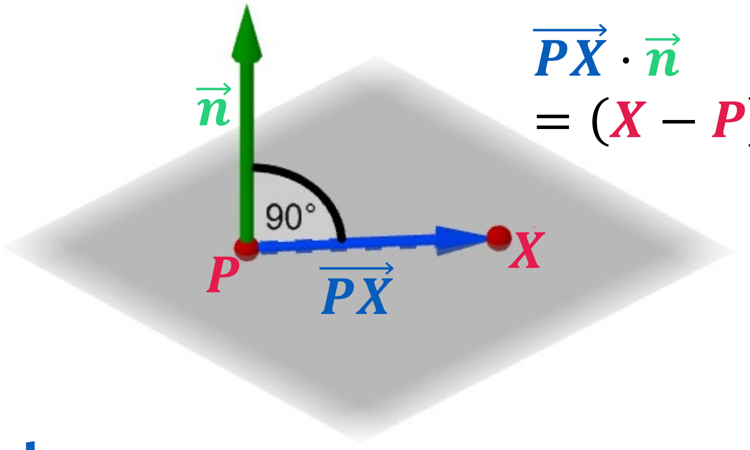
$$E = \left\{X \middle| (X - P) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0\right\}$$

Oder mit dem Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0} := \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

kurz: $E: (X - P) \cdot \vec{n} = 0$

Ebenengleichung: Normalenform

Ebene mit Normalenvektor beschreiben



$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = (X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

Beispiel

Gegeben: Punkt $P = (2,2,1)$ und Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ einer Ebene E.

Für alle Punkte X der Ebene gilt dann $(X - P) \cdot \vec{n} = 0$, bzw. mit Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$-1 \cdot (x-2) + 3 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z + \big(-1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1)\big) = 0$$

$$-1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6$$

Bemerkung

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich die Normalenform einer Ebenengleichung in eine Koordinatenform umwandeln, bei der die Koeffizienten die Koordinaten eines Normalenvektors sind.

Satz

Ist $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ eine Gleichung einer Ebene E, dann ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

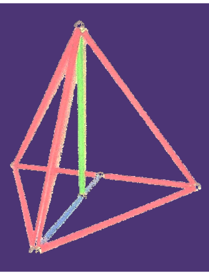
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

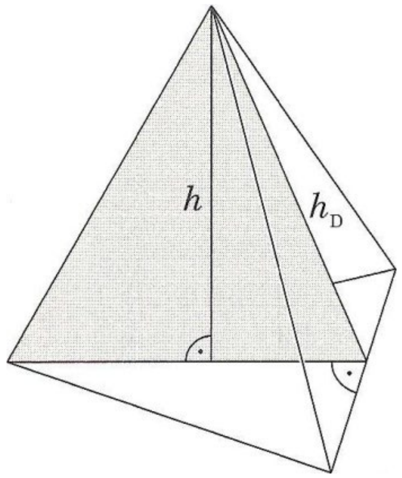
Kapitel 2: Algebraisieren des Anschauungsraum

GeoGebra-Buch „Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie“ https://roth.tel/anageo

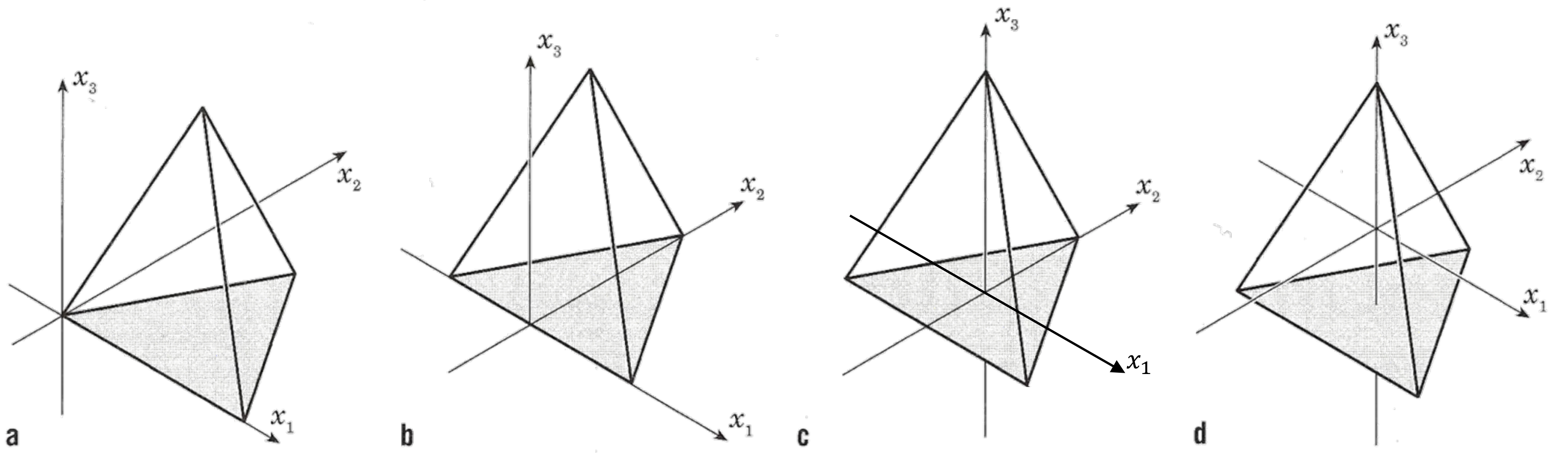
Beispiel: Tetraeder

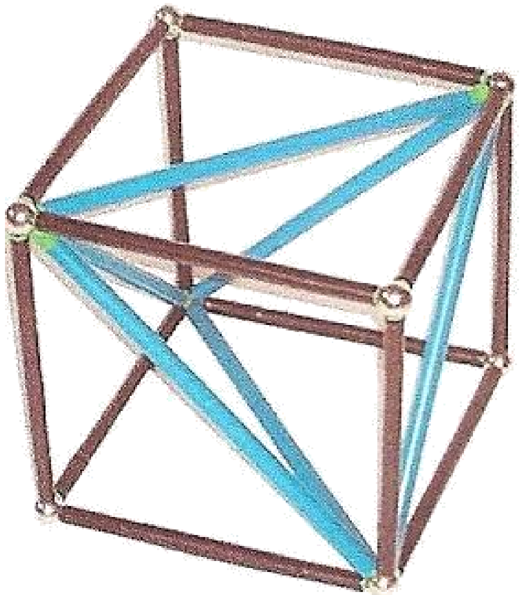
Aufgabe 1
Wie hoch ist ein gleichseitiger Tetraeder.





Aufgabe 2:
Wie können die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders der Kantenlänge a durch ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden?



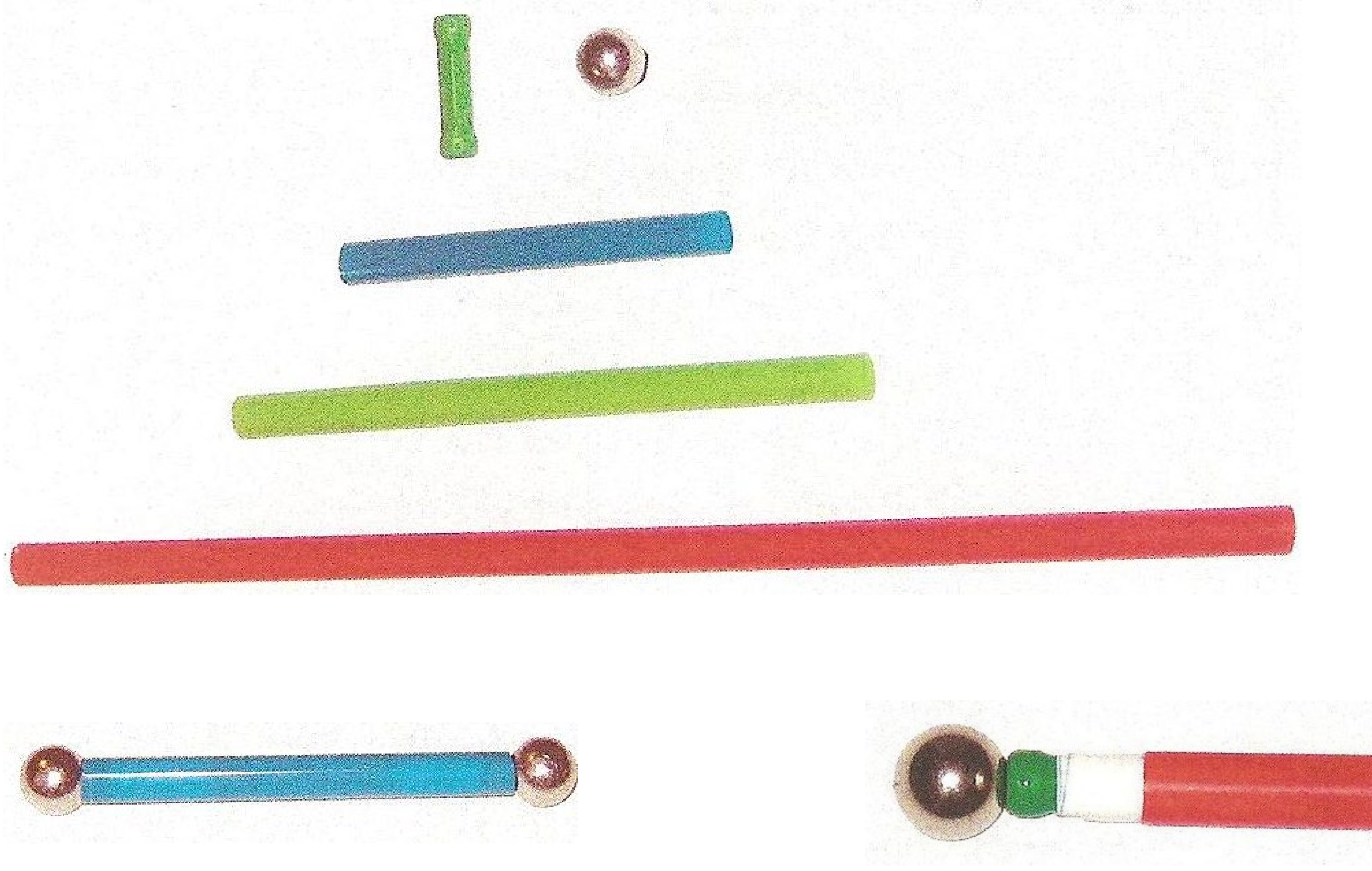


 Wittmann, G. (2003). Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie. Mathematik lehren 119, 47-51

Exkurs: Modellbaukasten

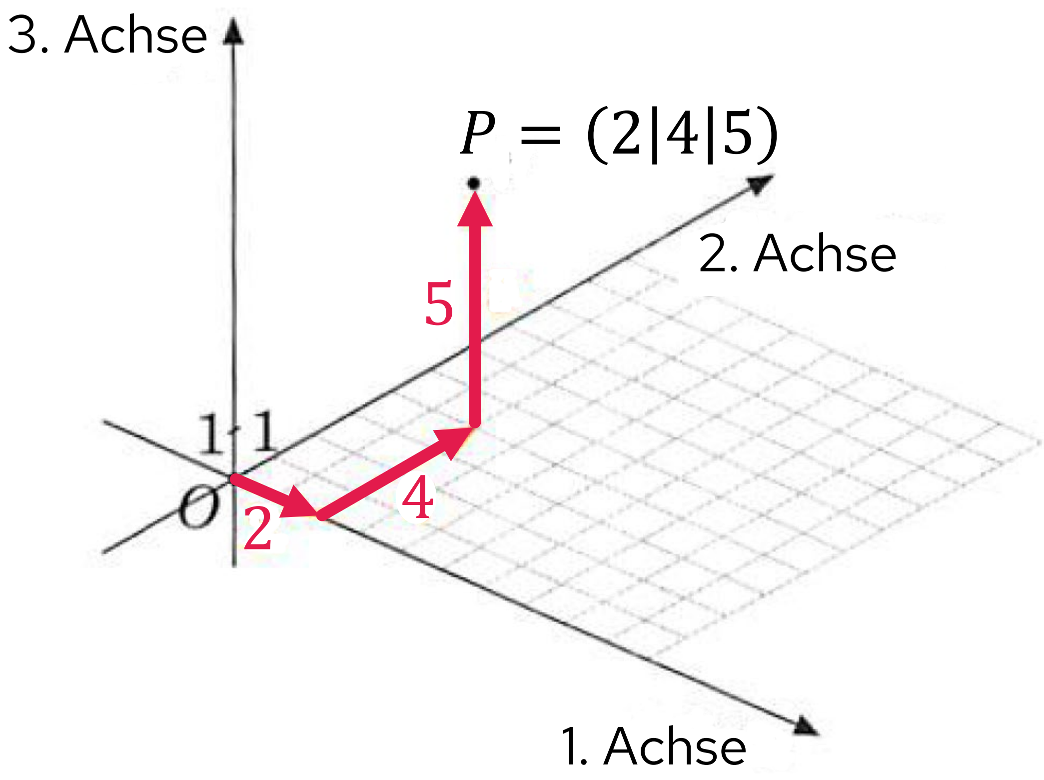
Modellbaukasten

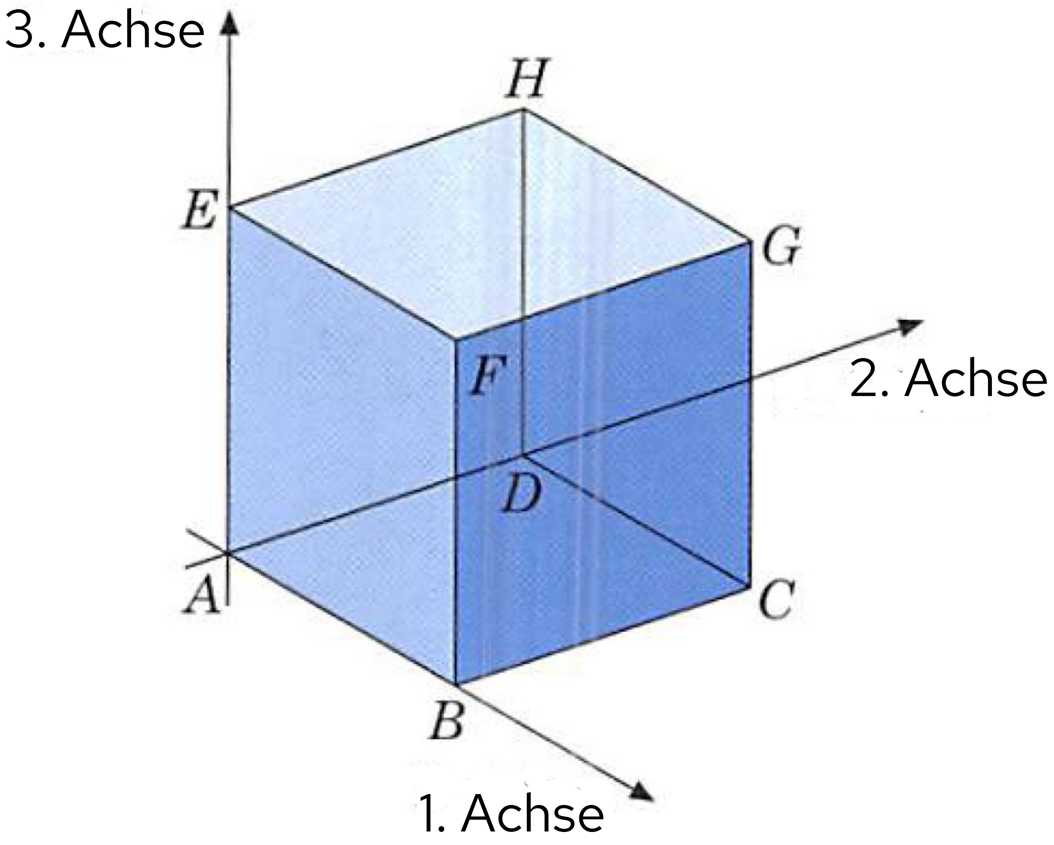
Mit Hilfe bunter Strohhalme und eines Magnetbaukastens lassen sich auf einfach Weise Kantenmodelle herstellen. Die Magnetstäbchen müssen ggf. mit etwas Papier umwickelt werden, so dass sie nicht so leicht herausrutschen. Damit alles zusammen passt, müssen vorher die Kantenlängen berechnet und die Strohhalme entsprechend zugeschnitten werden.



Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Lineare Algebra, Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel, 2010, 20

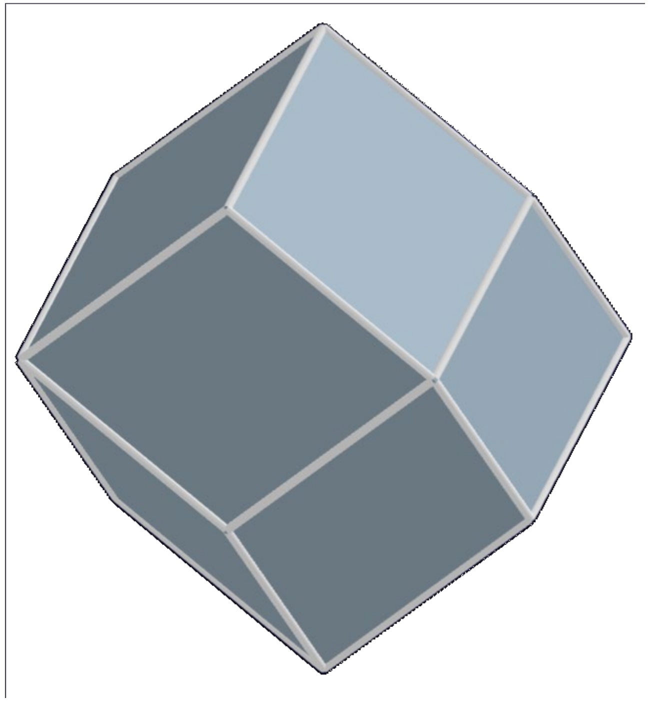
Von Koordinaten zu Vektoren

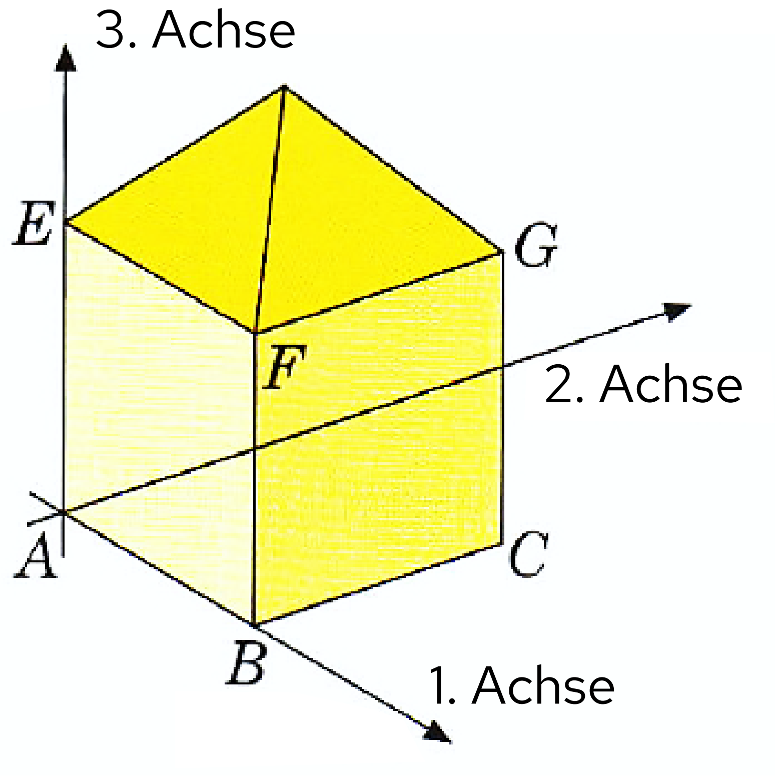




Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 14
Malle, G. (2005). Von Koordinaten zu Vektoren. *Mathematik lehren, 133*, 4-7

Rhombendodekaeder



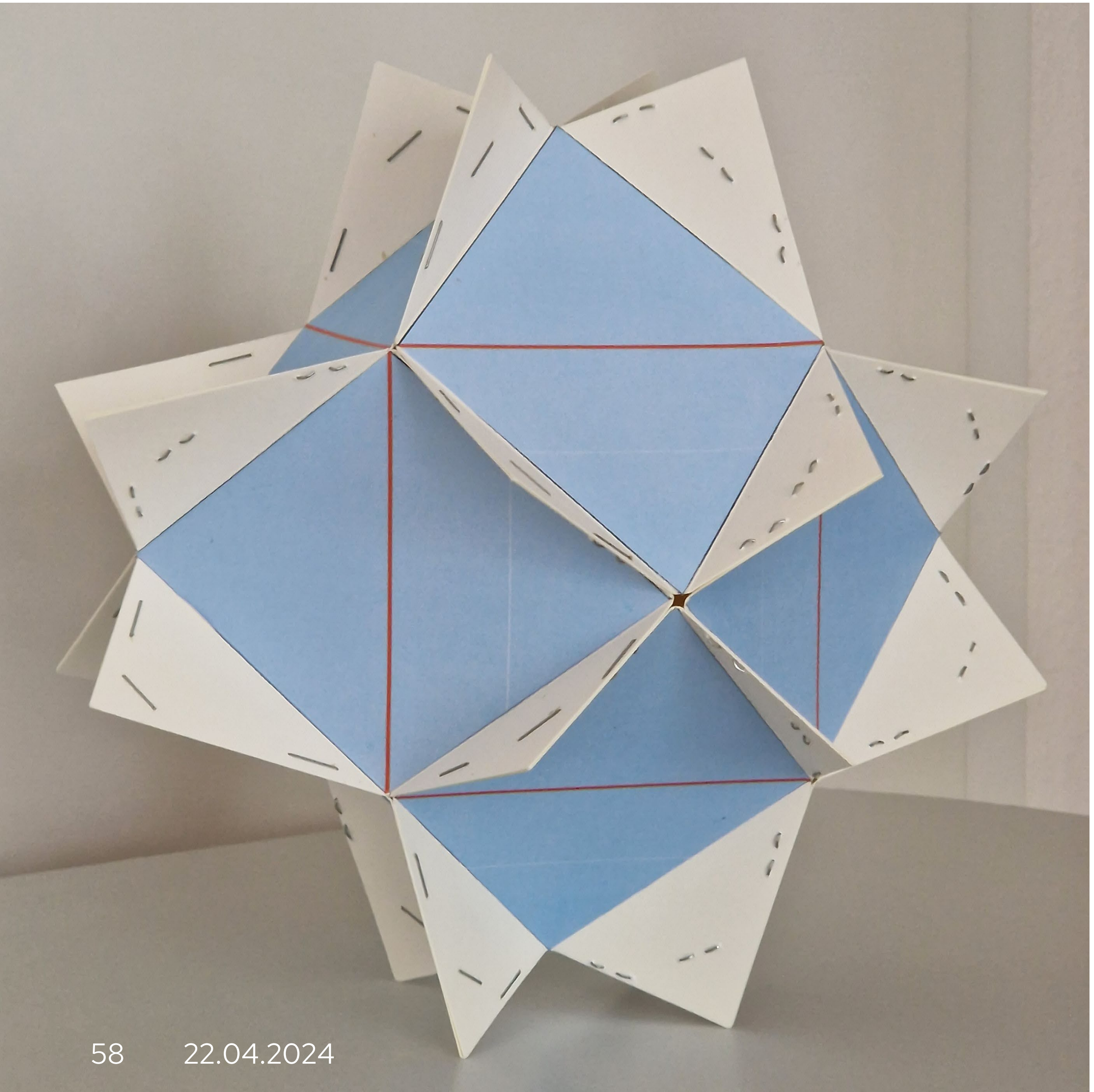


Rhombendodekaeder
Errichtet man über jeder der sechs Flächen eines Würfels eine gerade quadratische Pyramide, mit geeigneter Höhe, so erhält man ein Rhombendodekaeder. Dies ist ein von zwölf zueinander kongruenten Rauten (Rhomben) begrenzter Körper.

 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 15

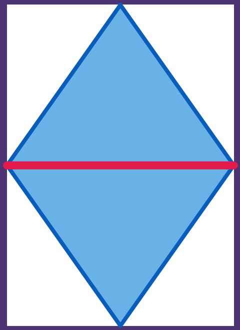
https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder

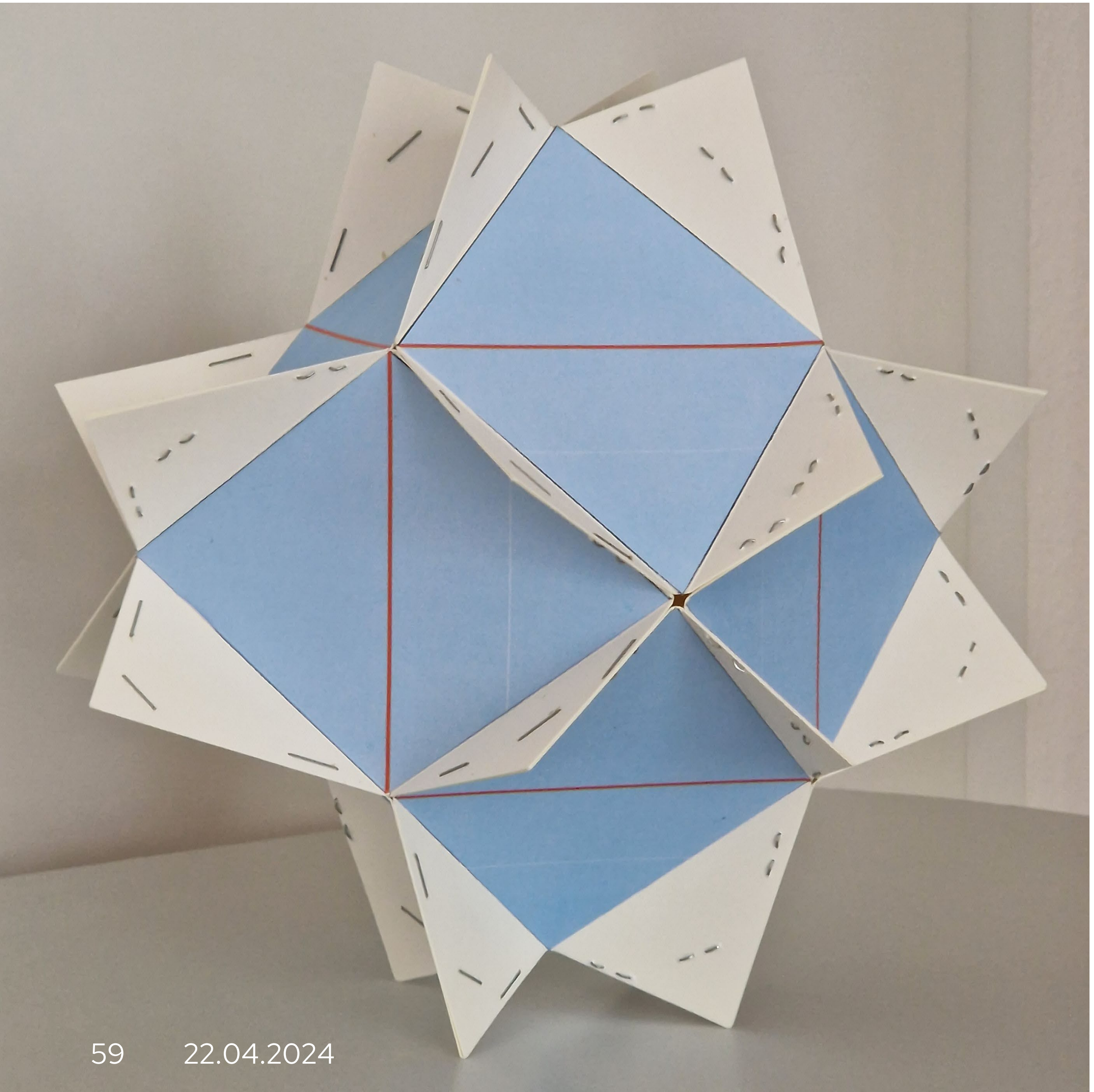


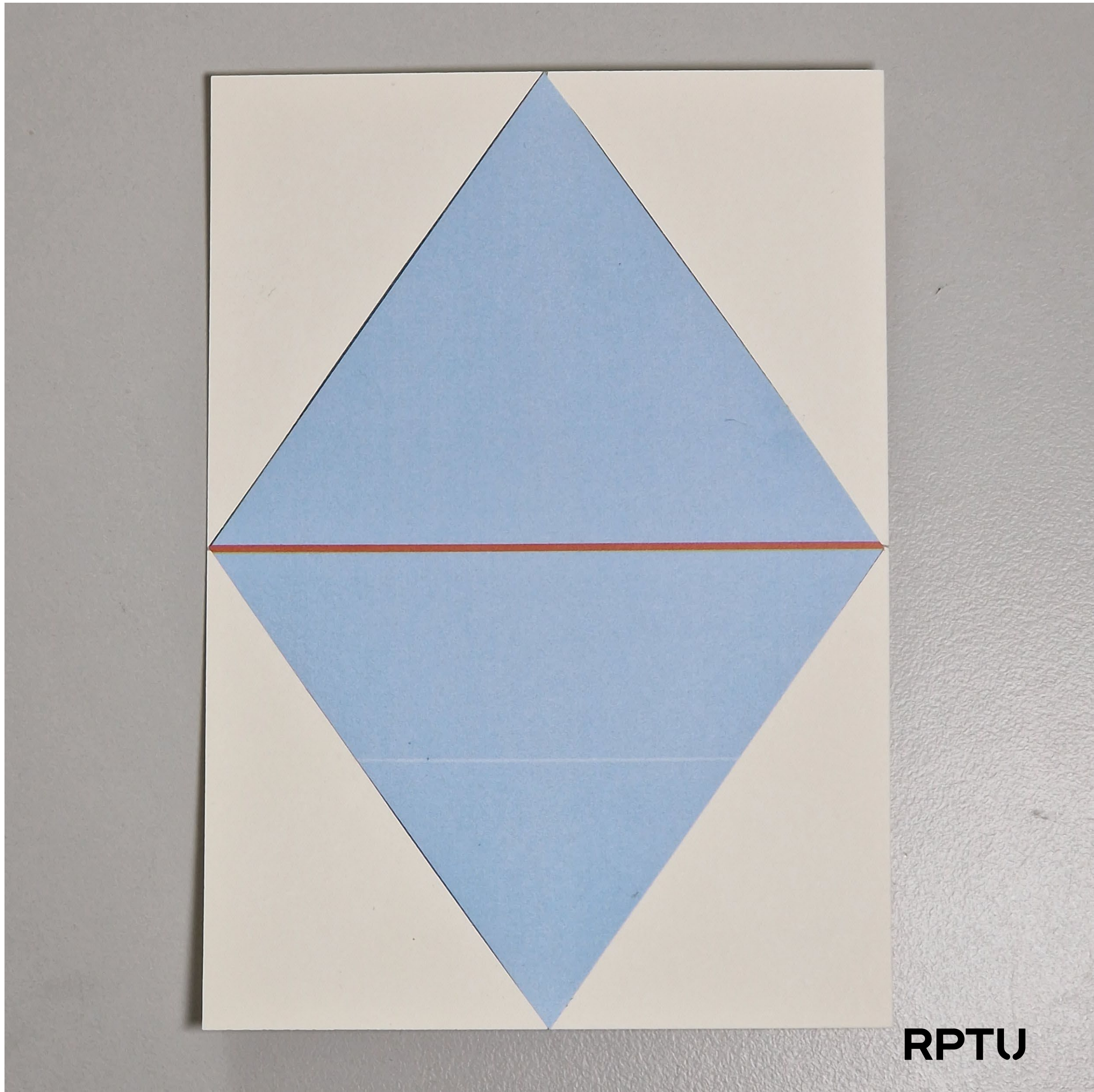
Rhombendodekaeder aus Postkarten

- Mittelpunkte benachbarter Seiten verbinden.
- Ergebnis: Eine Raute (Rhombus) und vier rechtwinklige Dreiecke.
- Kürzere Diagonale in die Raute einzeichnen.
- Rechtwinklige Dreiecke an der Hypotenuse nach oben falten.
- Geeignete Anzahl an Postkarten auf diese Weise vorbereiten . (Wie viele werden benötigt?)
- Je ein rechtwinkliges Dreieck von zwei Postkarten zur Deckung bringen und zusammentackern.

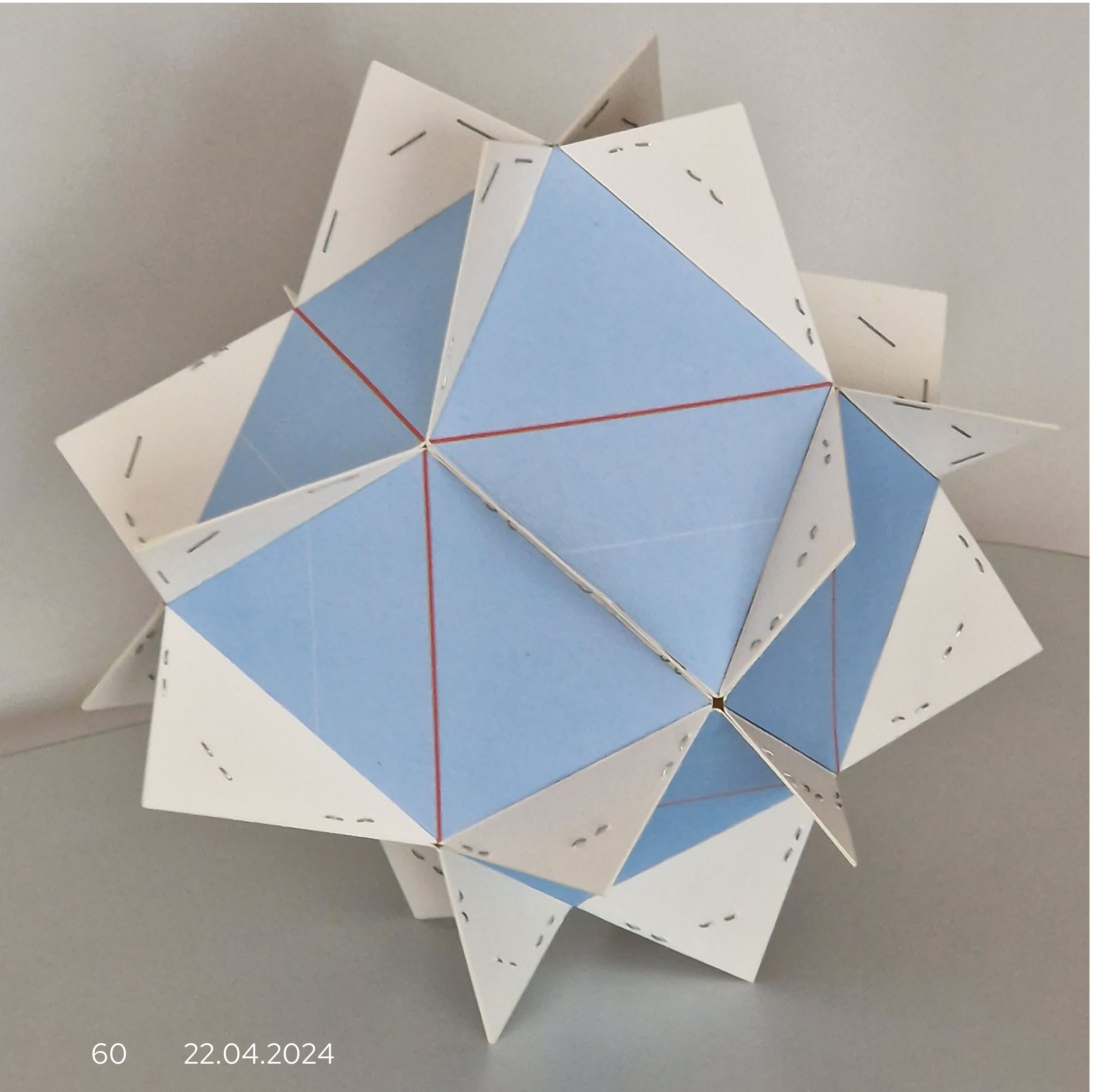


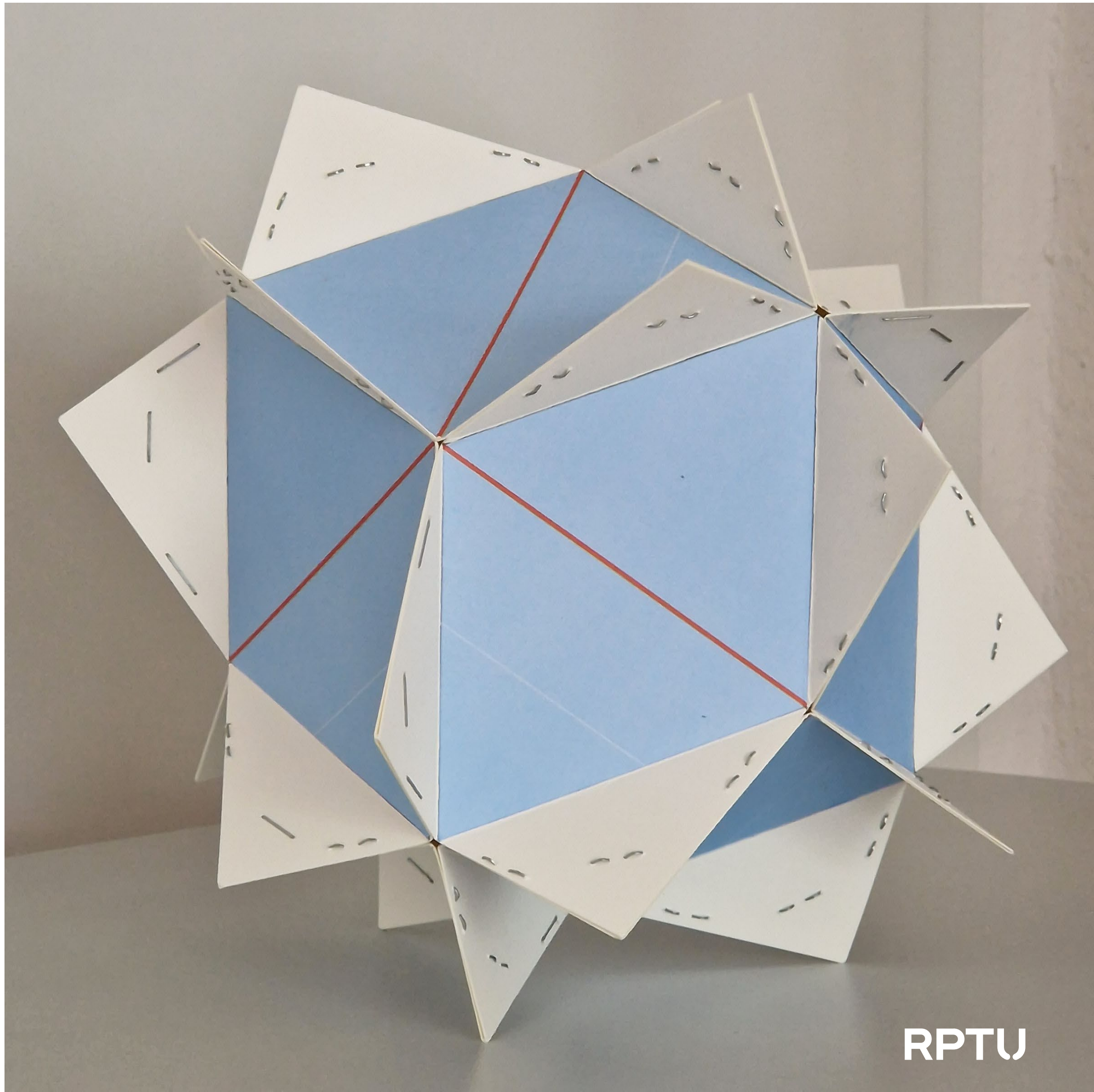
Rhombendodekaeder



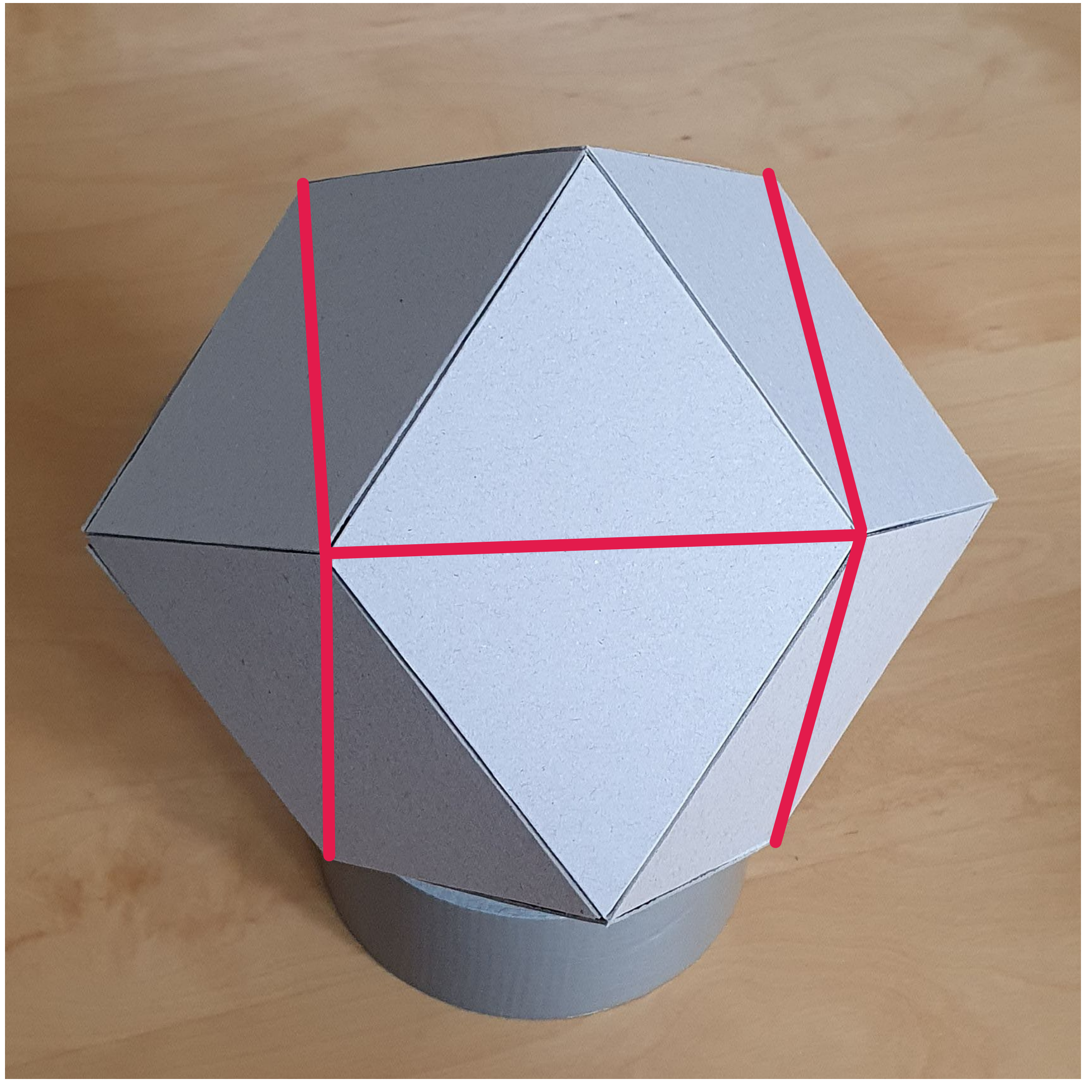


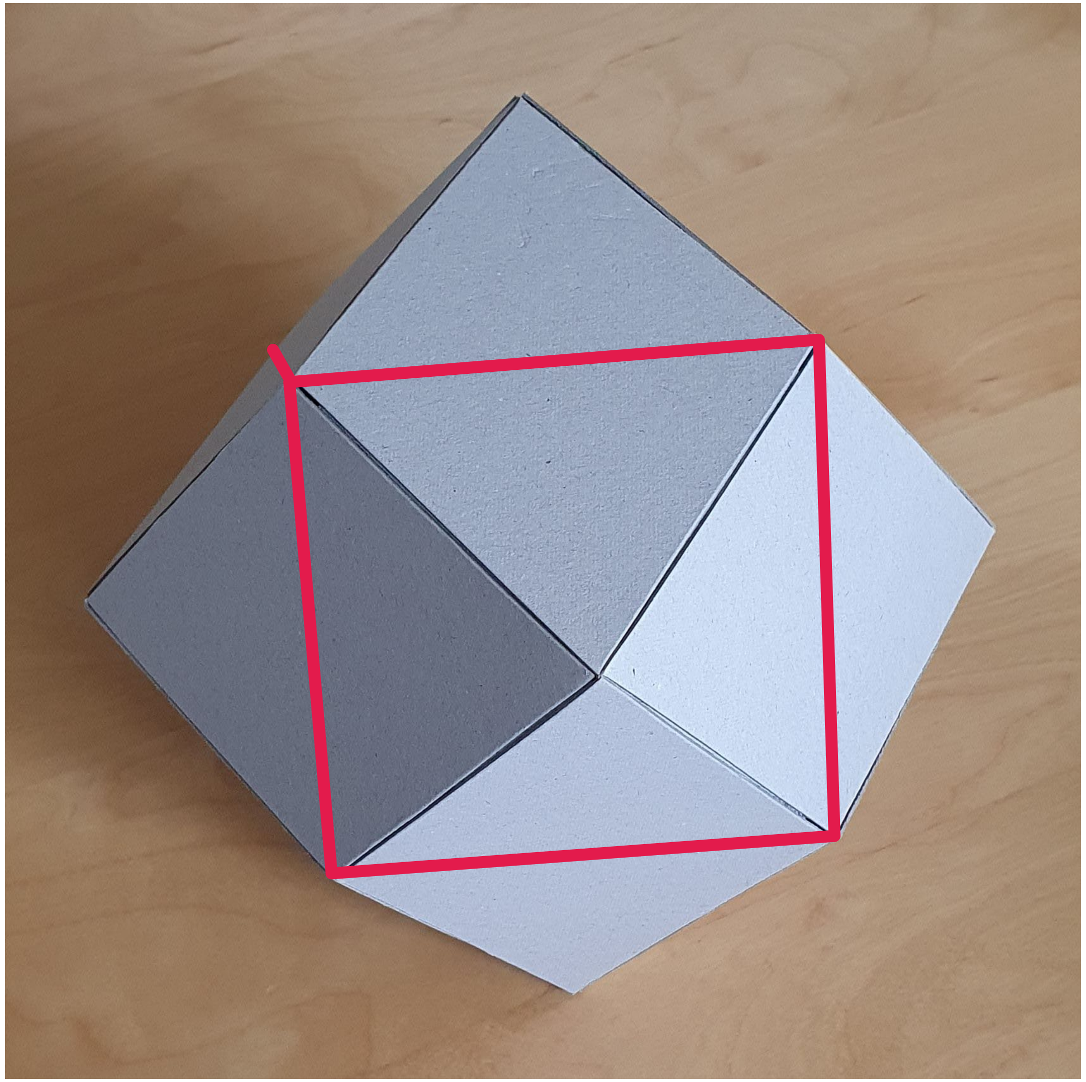
Rhombendodekaeder



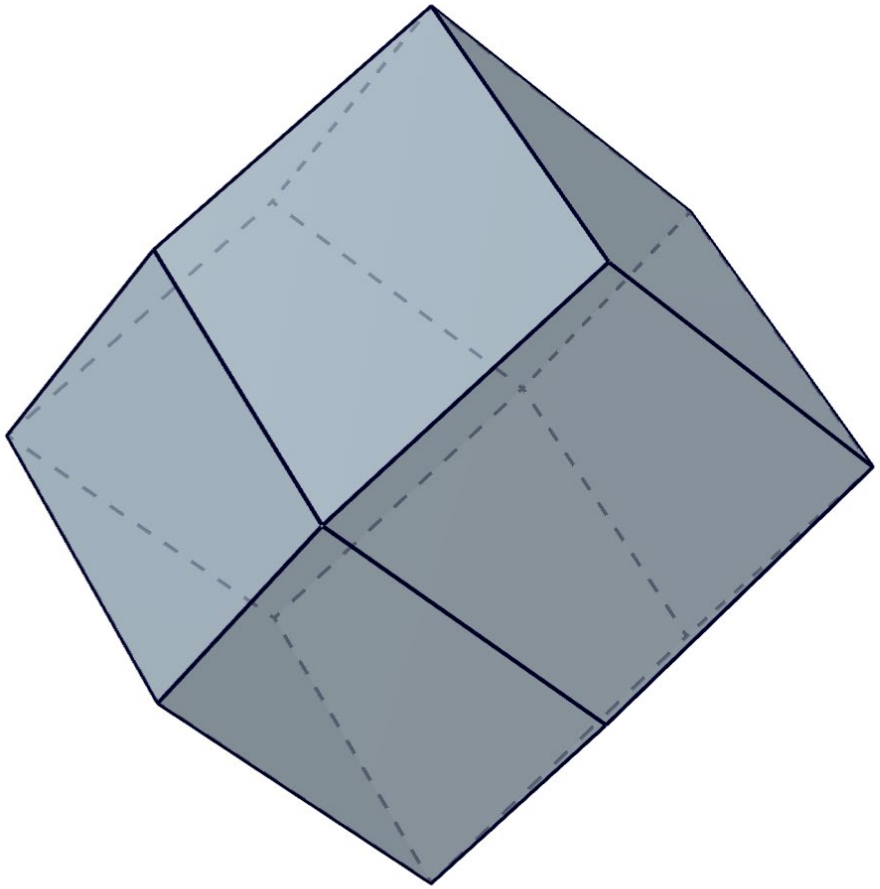


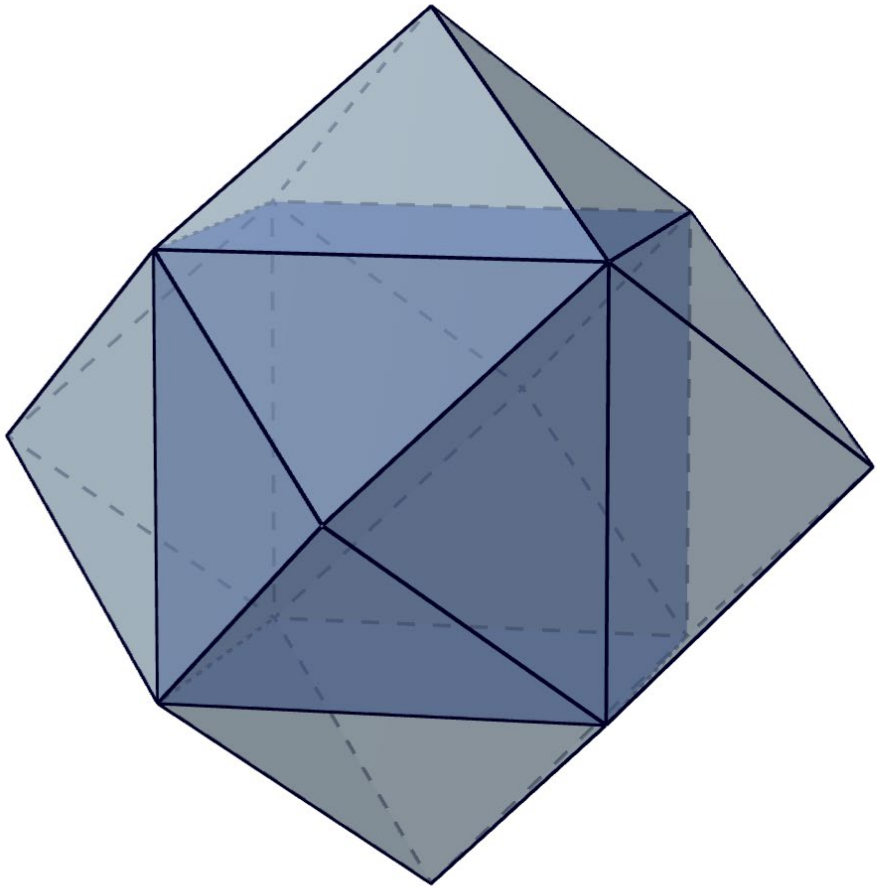
Rhombendodekaeder





Rhombendodekaeder





https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Aufgaben zum Rhombendodekaeder

GeoGebra Classroom: https://www.geogebra.org/classroom/hvaduj4r

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(1) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.

(2) **I**n welchem Verhältnis $\frac{d_{lang}}{d_{kurz}}$ stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?

(3) **B**estimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(4) **B**erechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(5) **W**ählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.

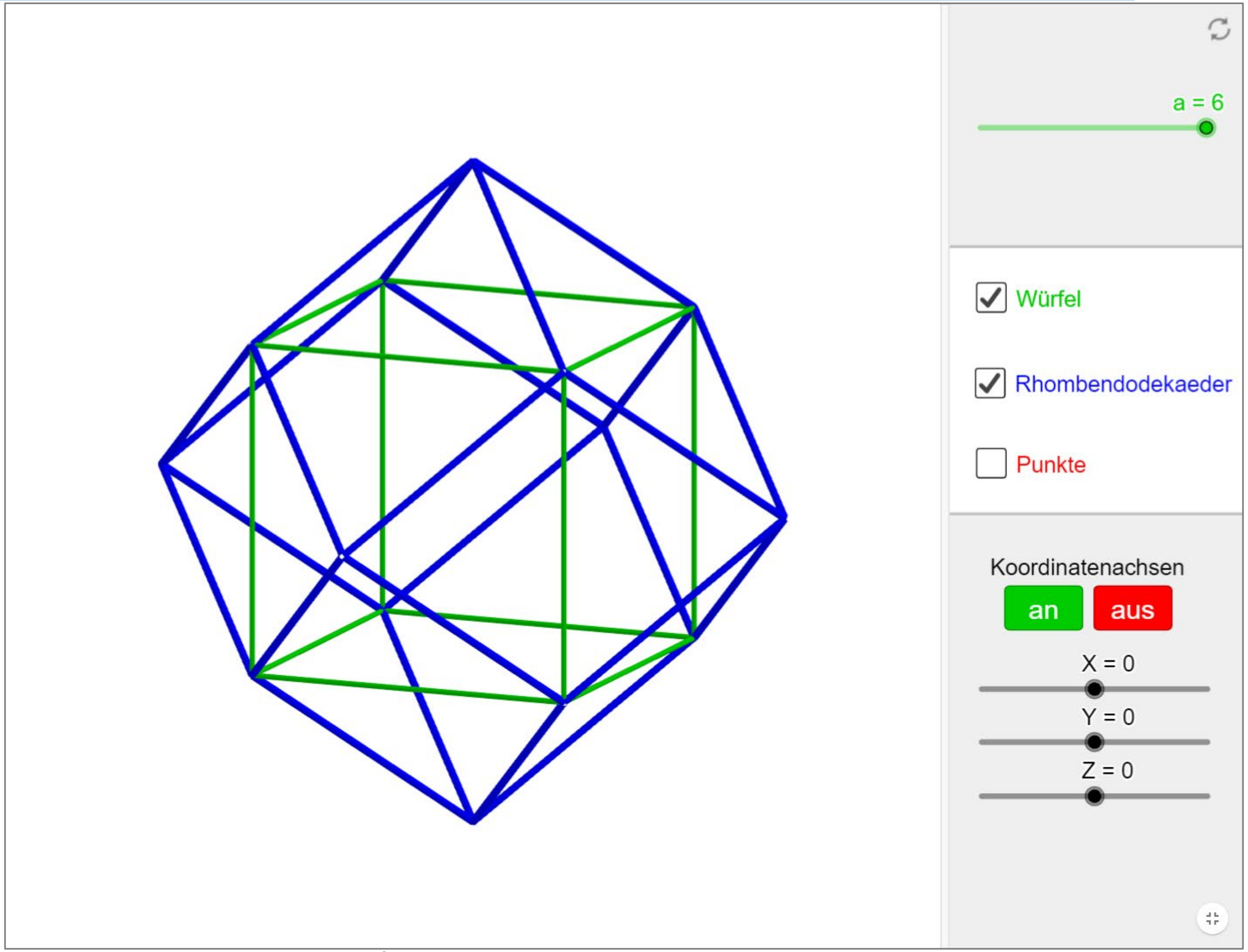
(6) **B**estimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(7) **B**erechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(8) **B**erechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.

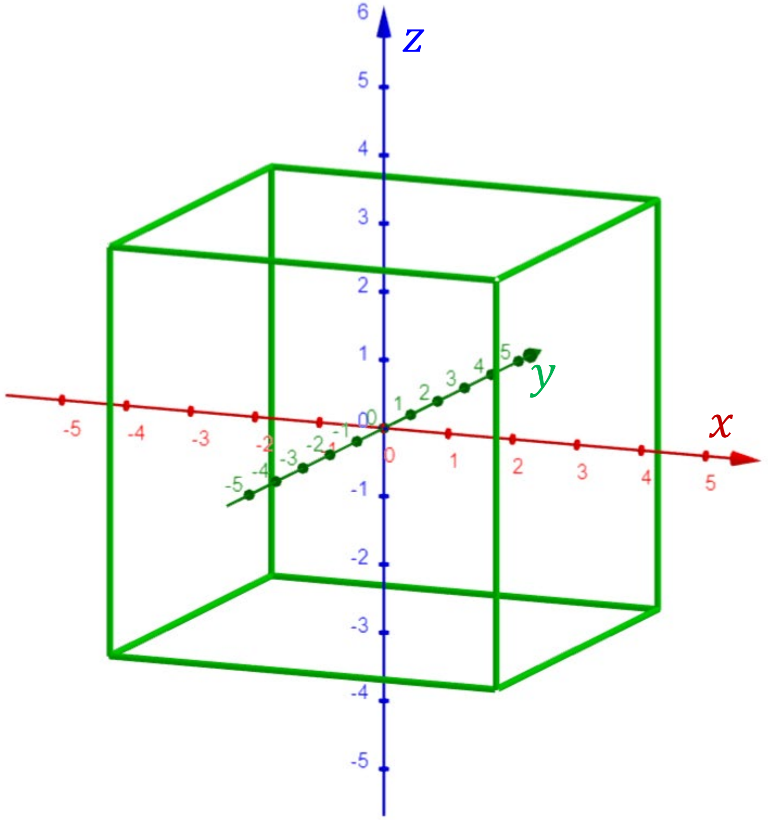
(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

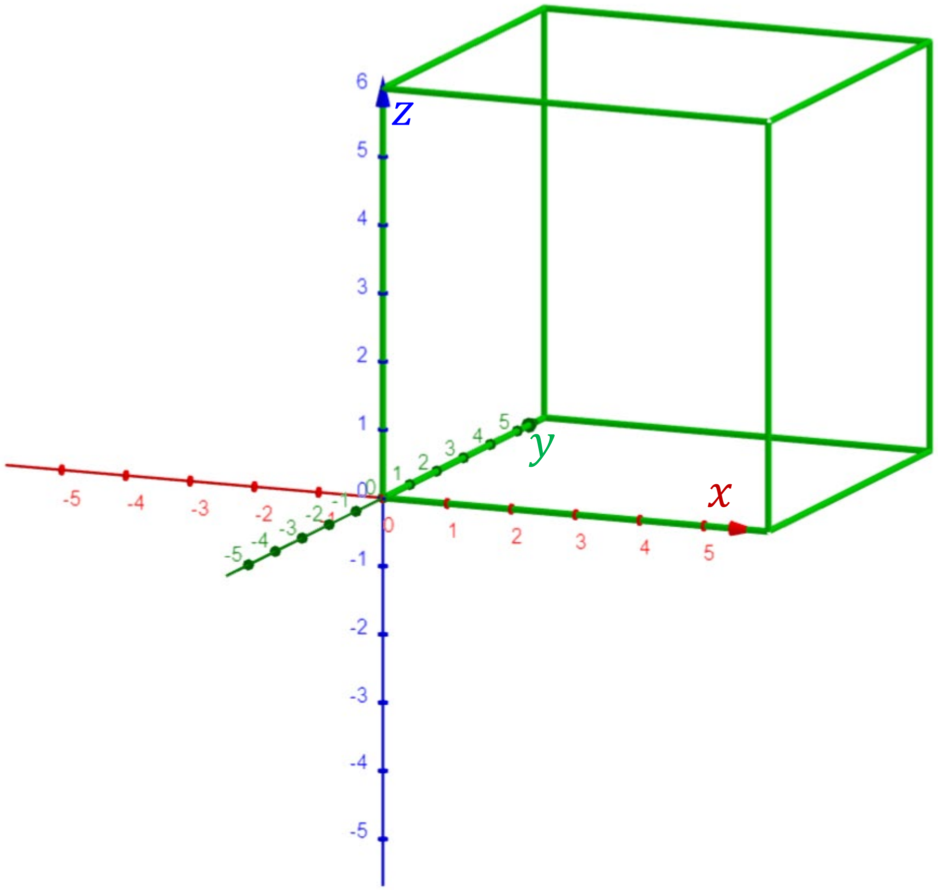
Rhombendodekaeder



 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

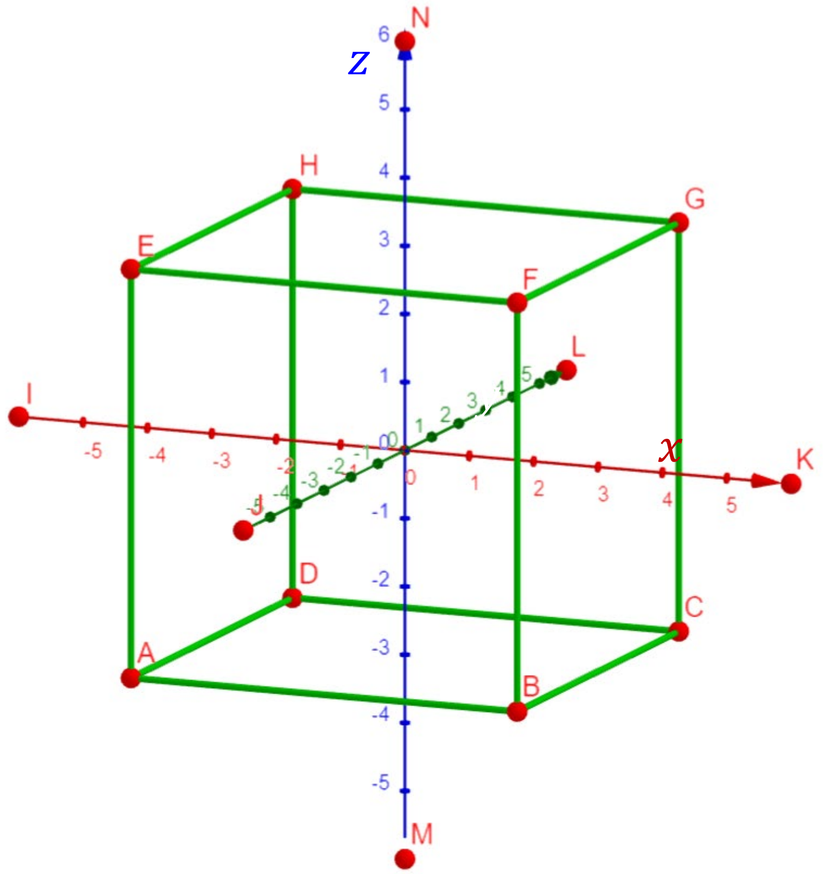
Rhombendodekaeder: Koordinatensystem





 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

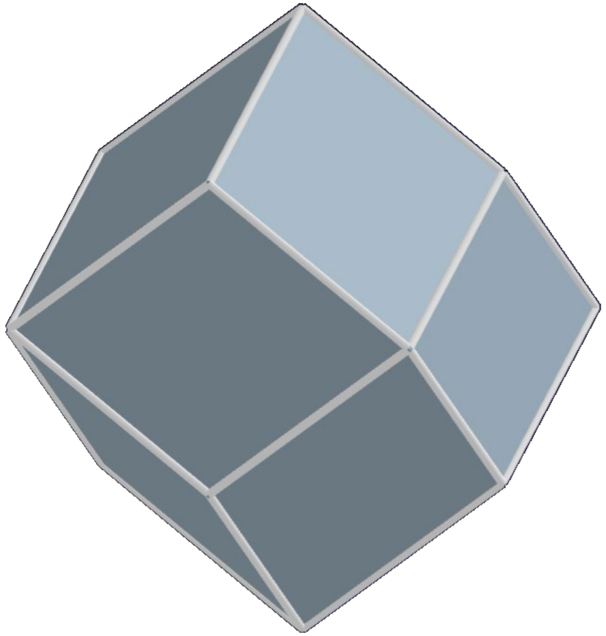
Rhombendodekaeder: Koordinaten der Eckpunkte

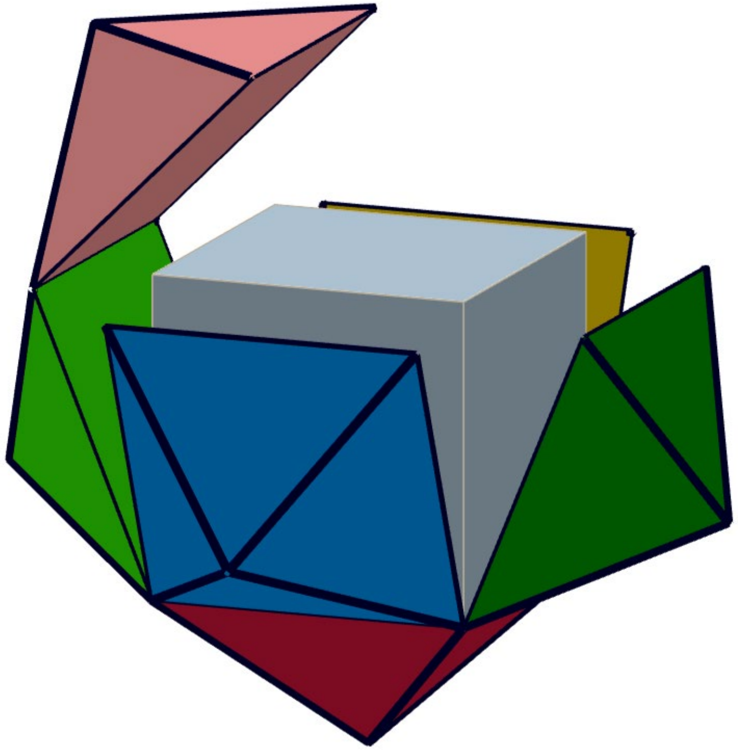


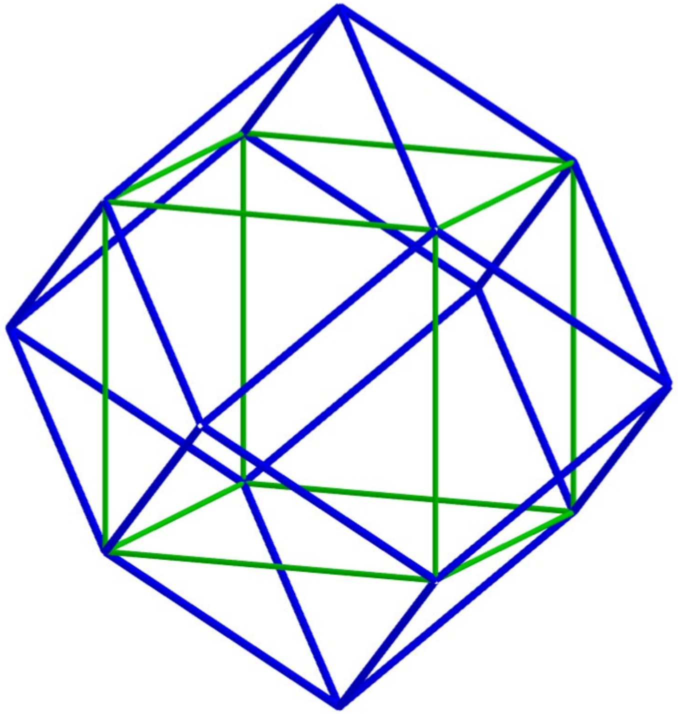
- $A = (\quad | \quad | \quad)$
- $B = (\quad | \quad | \quad)$
- $C = (\quad | \quad | \quad)$
- $D = (\quad | \quad | \quad)$
- $E = (\quad | \quad | \quad)$
- $F = (\quad | \quad | \quad)$
- $G = (\quad | \quad | \quad)$
- $H = (\quad | \quad | \quad)$

- $I = (\quad | \quad | \quad)$
- $J = (\quad | \quad | \quad)$
- $K = (\quad | \quad | \quad)$
- $L = (\quad | \quad | \quad)$
- $M = (\quad | \quad | \quad)$
- $N = (\quad | \quad | \quad)$

Rhombendodekaeder

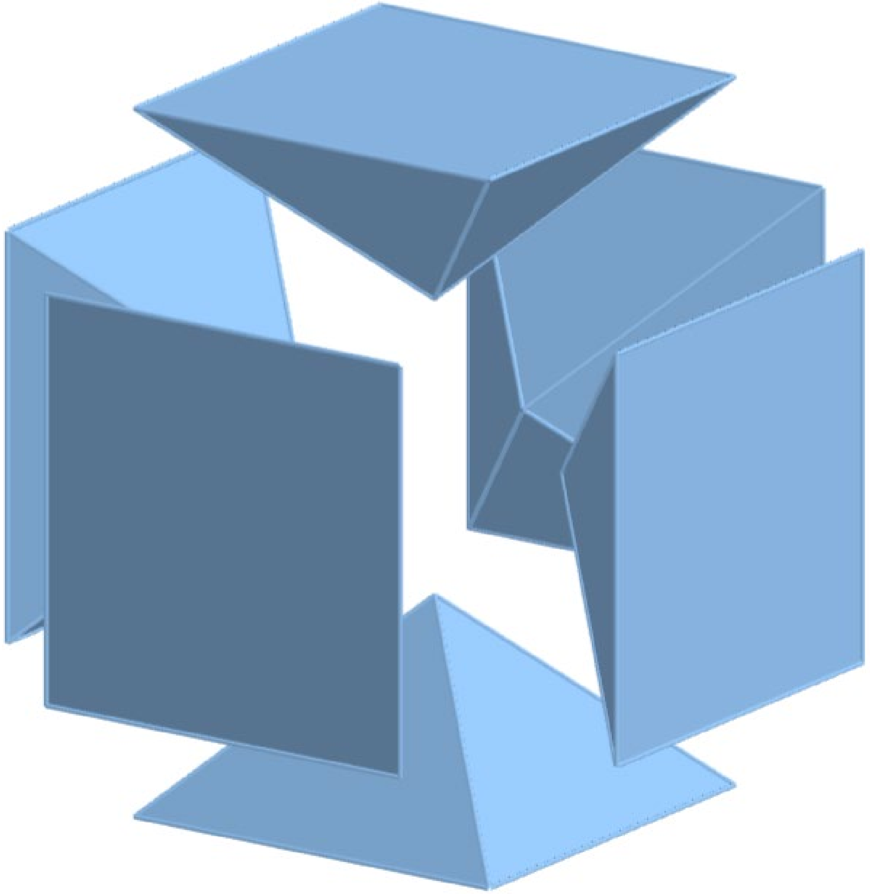


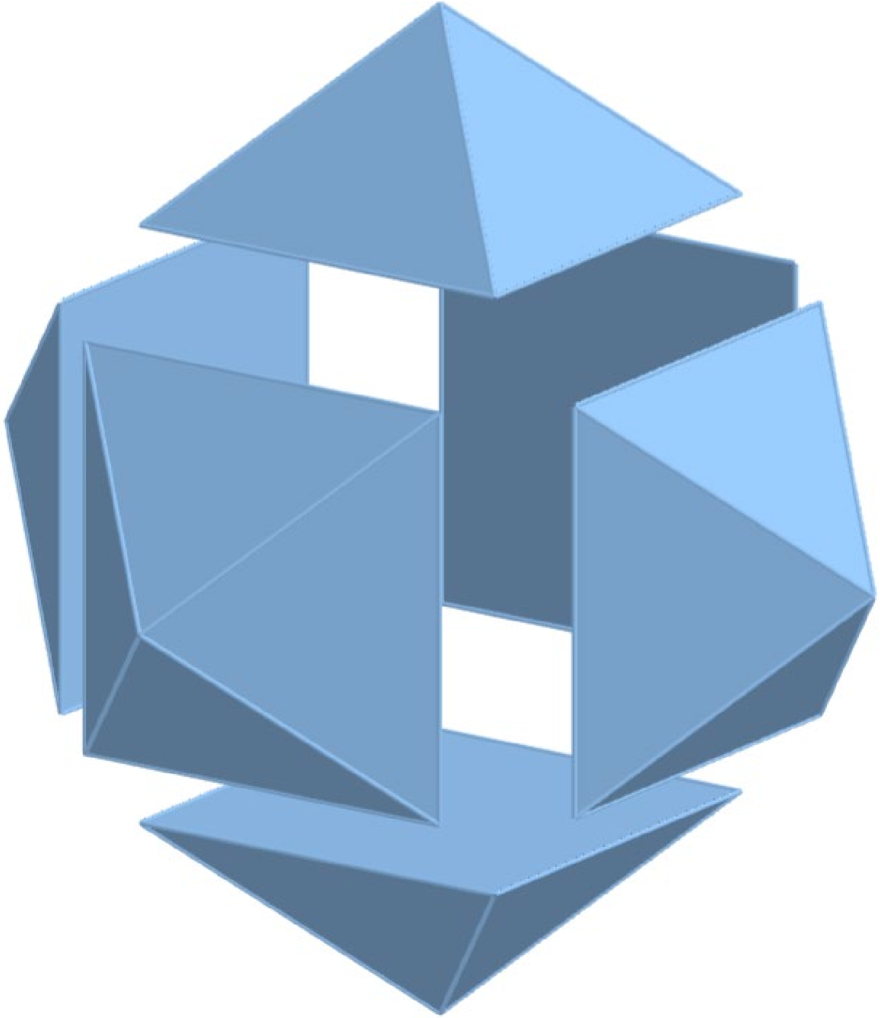




 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

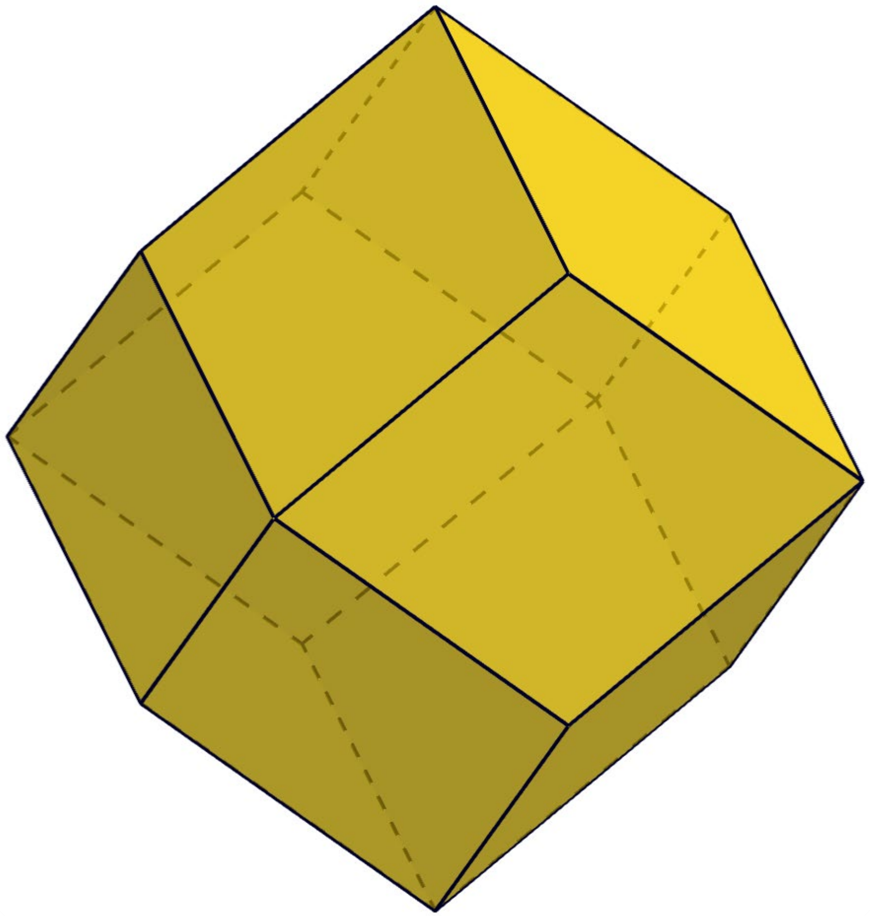
Rhombendodekaeder

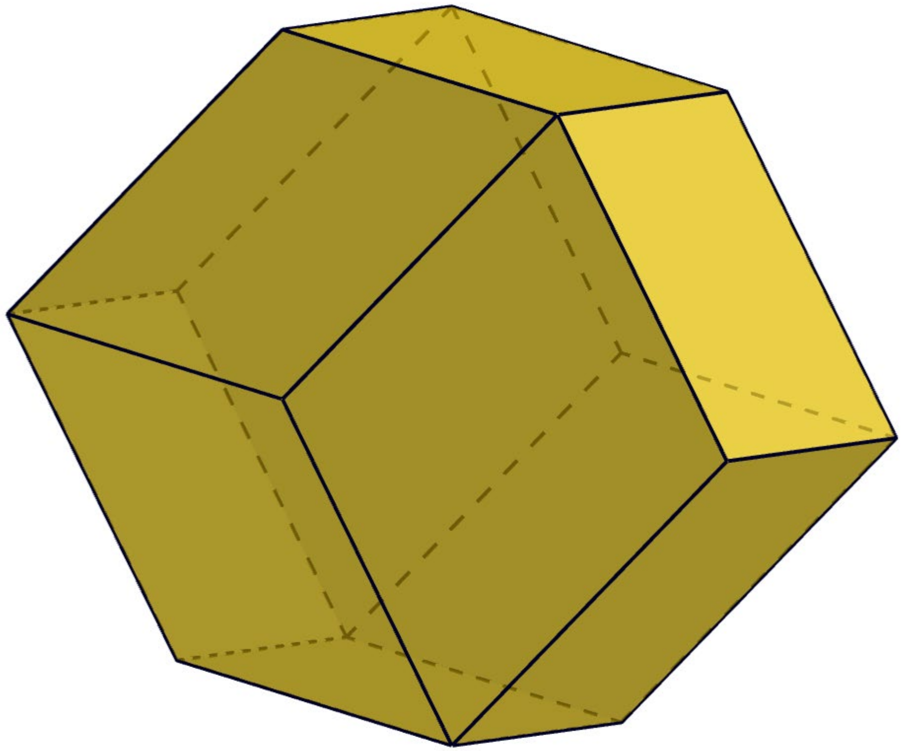




 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder





 https://www.geogebra.org/m/djzftsx7

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

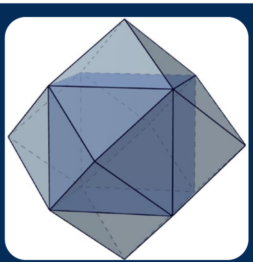
(1) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Seitenflächen des Würfels und die Rauten der Oberfläche des Rhombendodekaeders einschließen.

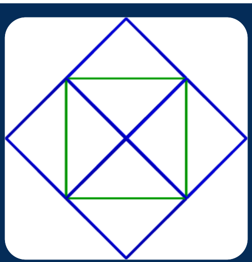
(2) **I**n welchem Verhältnis $\frac{d_{lang}}{d_{kurz}}$ stehen die Längen der Diagonalen der Rauten?

(3) **B**estimmen Sie die Höhe der Pyramiden, die auf die Seiten des Würfels aufgesetzt werden, in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(4) **B**erechnen Sie die Länge der Kanten des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a := d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

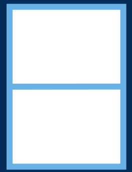
(1)





$\rho = 45°$

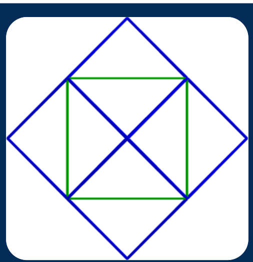
(2)



DIN-Format:

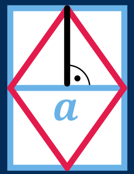
$\frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \frac{d_{kurz}}{\frac{d_{lang}}{2}} \Rightarrow \frac{d_{\text{lang}}}{d_{\text{kurz}}} = \sqrt{2}$

(3)



$h_{\text{Pyramide}} = \frac{a}{2}$

(4)



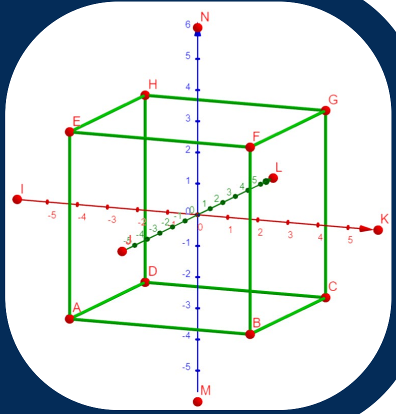
Satz des Pythagoras

$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

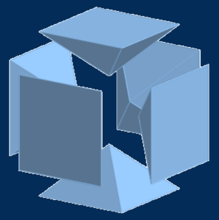
Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

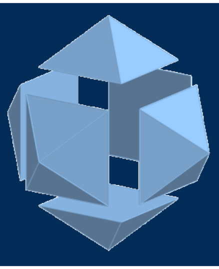
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

(5) und **(6)**
Vgl. Folien 67 und 68



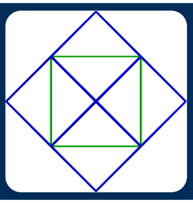
(7)





$V_{\text{Rhombendodekaeder}} = 2 \cdot a^3$

(8)



Vgl. Abschnitt 3.8
Grundvorstellungen
zum Abstand

(9)
Idee:
(1) Bestimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.
(2) Bestimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

(5) **W**ählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem, um möglichst einfache Koordinaten der Eckpunkte des Rhombendodekaeders zu erhalten.

(6) **B**estimmen Sie Koordinaten aller Eckpunkte des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(7) **B**erechnen Sie das Volumen des Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von der Länge $a \coloneqq d_{kurz}$ der kürzeren der beiden Diagonalen der Raute(n).

(8) **B**erechnen Sie den Abstand der Trägerebenen zweier gegenüberliegender Rauten des Rhombendodekaeders.

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.

(9) Lösungsidee

(*) Vgl. Kapitel 3: Skalarprodukt

a) **B**estimmen der Normalenvektoren der Trägerebenen der beteiligten Rauten.

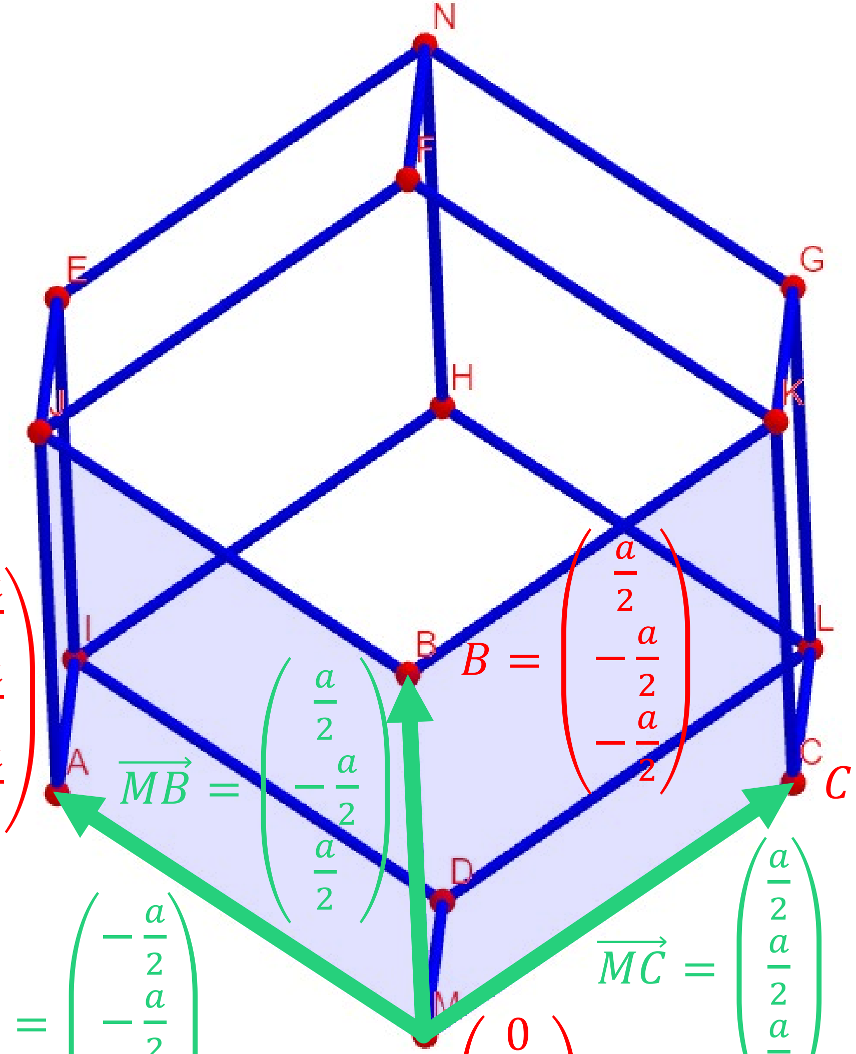
Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (*)
- Nutzung des Vektorprodukts

b) **B**estimmen des Zwischenwinkels der Normalenvektoren.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Nutzung des Skalarprodukts (*)
- Nutzung des Vektorprodukts



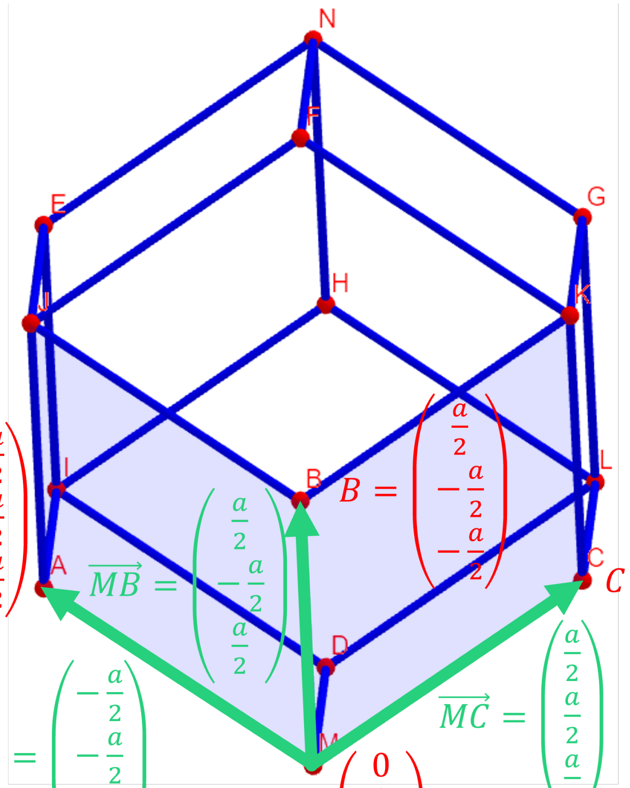
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MA} = A - M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



$A = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MA} = A - M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - 0 \\ -\frac{a}{2} - (-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_a}$ zu den Spannvektoren $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_a}$ gilt:

$$\text{(I)}\quad 0 = \overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = -\frac{a}{2} \cdot n_{a_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a_3}$$

$$\text{(II)}\quad 0 = \overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{a_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{a_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{a_3}$$

(I) + (II) liefert: $a \cdot n_{a_2} = a \cdot n_{a_3} \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{a_2} = n_{a_3}$

Wähle $n_{a_2} = n_{a_3} = 1.$

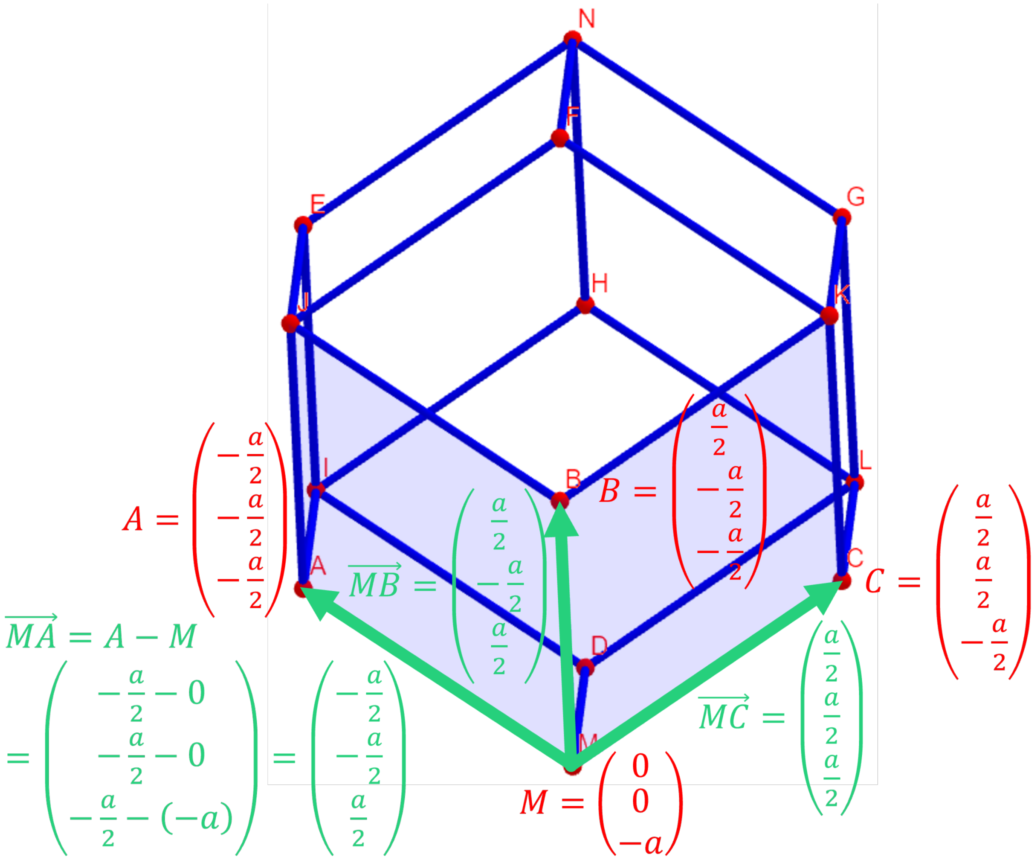
Einsetzen in (II) liefert:

$\frac{a}{2} \cdot n_{a_1} = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{a_1} = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ n_{a_2} \\ n_{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



Normalenvektor $\overrightarrow{n_b}$ zu den Spannvektoren $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$

Für den Normalenvektor $\overrightarrow{n_b}$ gilt:

$$\text{(I)}\quad 0 = \overrightarrow{n_b} \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

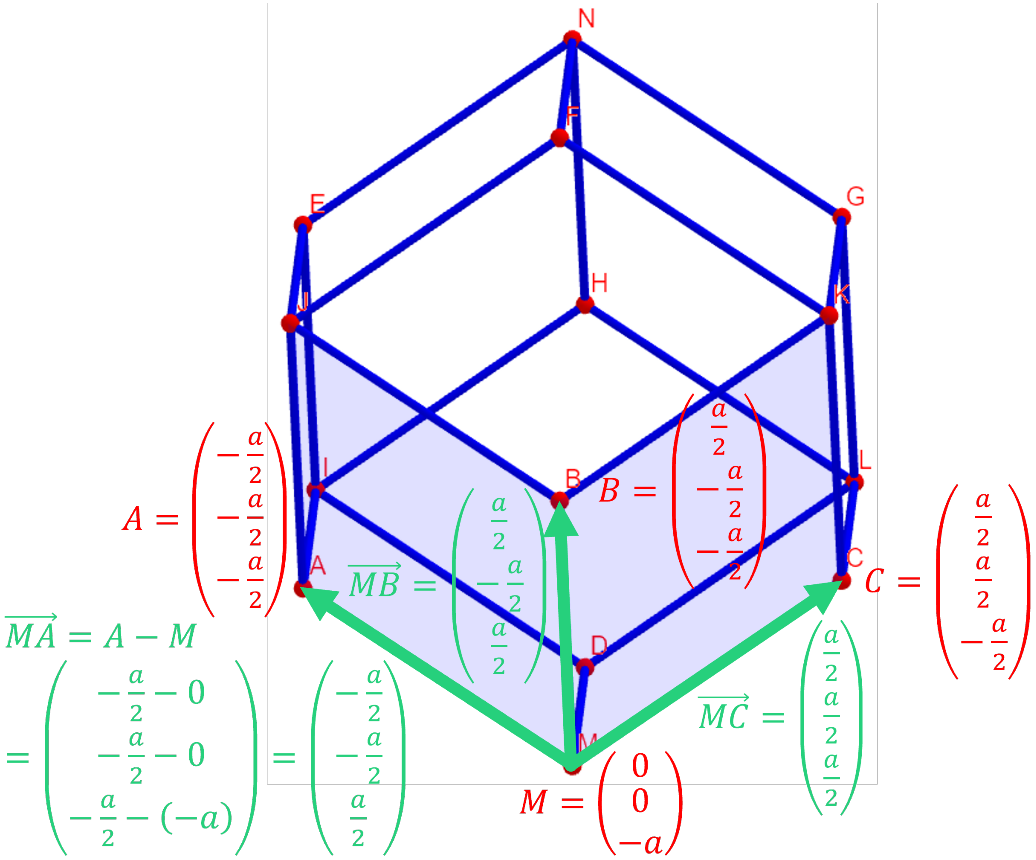
$$\text{(II)}\quad 0 = \overrightarrow{n_b} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot n_{b_1} - \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} + \frac{a}{2} \cdot n_{b_3}$$

(I) + (II) liefert: $a \cdot n_{b_1} = -a \cdot n_{b_3} \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{b_1} = -n_{b_3}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wähle } n_{b_3} = 1. \Rightarrow n_{b_1} = -1. \\ \text{Einsetzen in (I) liefert:} \\ \frac{a}{2} \cdot n_{b_2} = 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} n_{b_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} n_{b_1} \\ n_{b_2} \\ n_{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



Der Winkel zwischen den von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ sowie von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ aufgespannten Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ dieser Ebenen.

Bestimmung des Winkels $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = \angle\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- Mit Hilfe des Skalarprodukts ergibt sich:

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{n_a} \cdot \overrightarrow{n_b}}{|\overrightarrow{n_a}| \cdot |\overrightarrow{n_b}|} = \frac{n_{a_1} \cdot n_{b_1} + n_{a_2} \cdot n_{b_2} + n_{a_3} \cdot n_{b_3}}{\sqrt{n_{a_1}^2 + n_{a_2}^2 + n_{a_3}^2} \cdot \sqrt{n_{b_1}^2 + n_{b_2}^2 + n_{b_3}^2}}$$

$$= \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

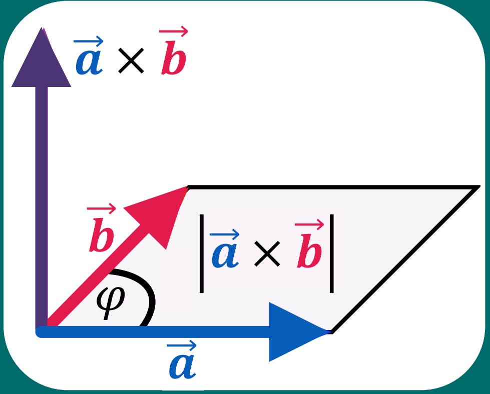
- Daraus folgt für $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b})$ und damit für den Winkel, den die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten des Rhombendodekaeders miteinander einschließen:

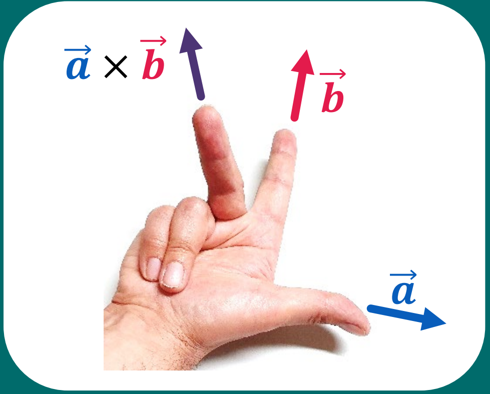
$$\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = 60°$$

Exkurs: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet (**Rechte-Hand-Regel**).
- Die Länge dieses Vektors entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.





- Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vorgehensweise bei der Berechnung:

1. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2} \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

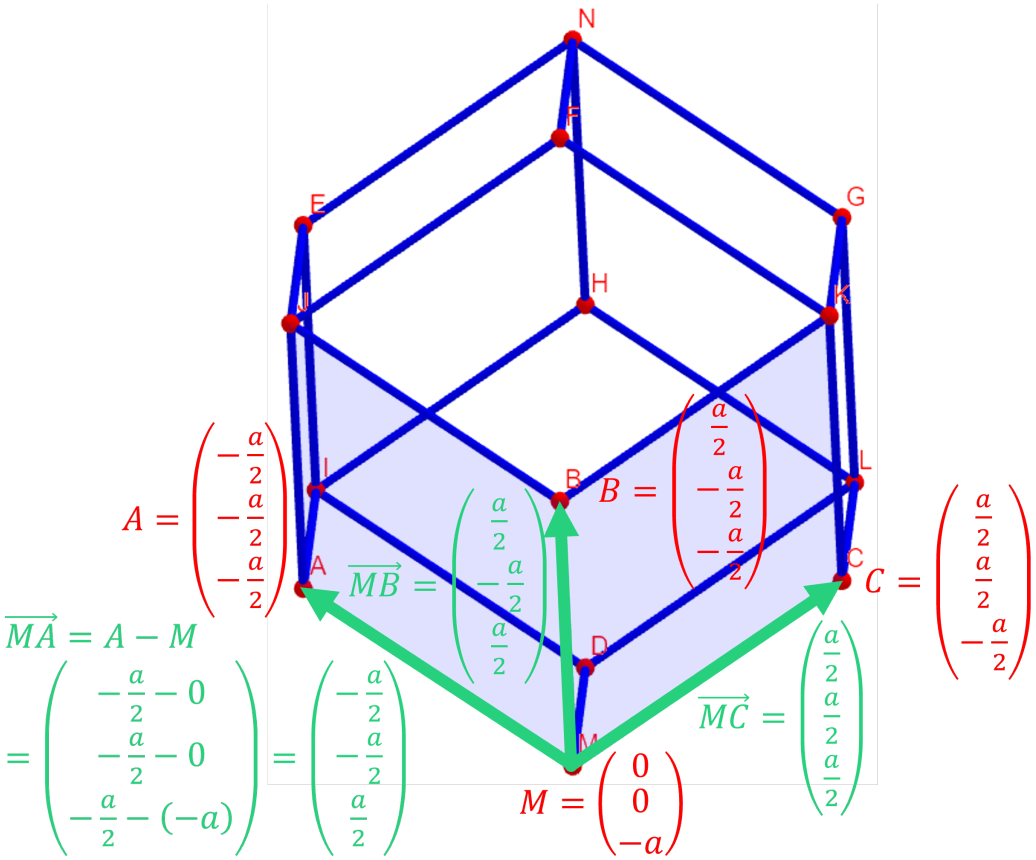
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ \cancel{b_2} \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ \boxed{-(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1)} \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

3. Schritt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ \boxed{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{pmatrix}$$

Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) Bestimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



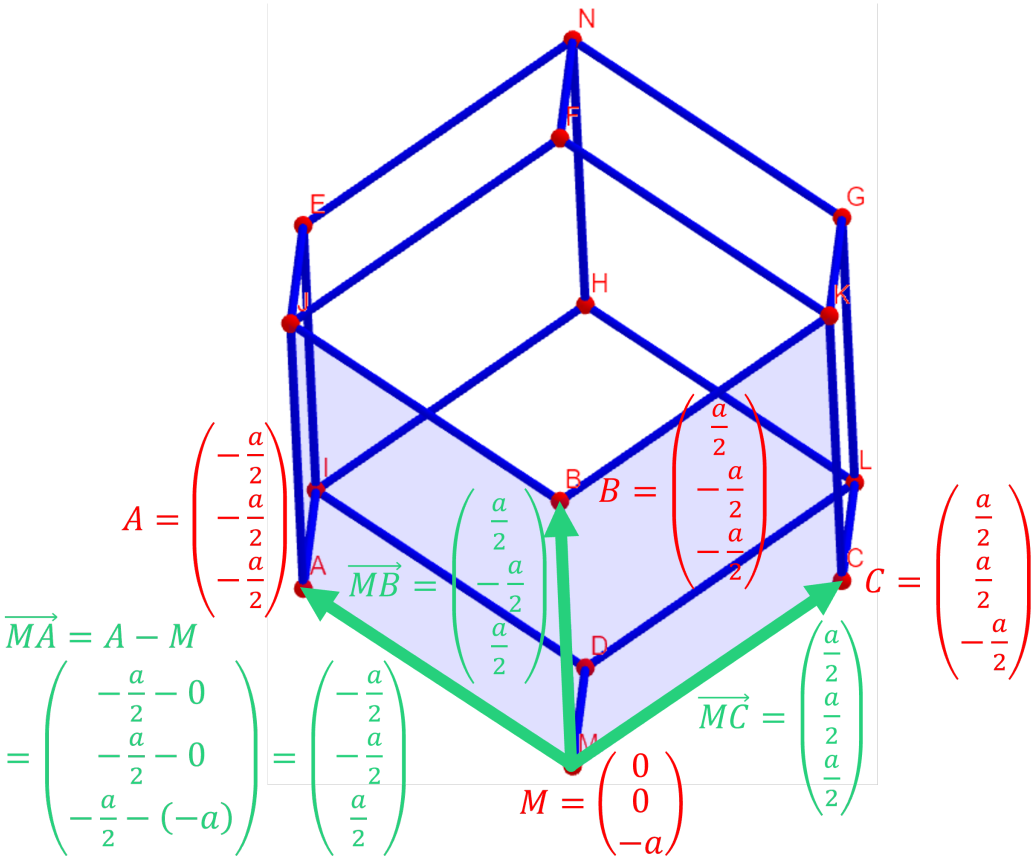
Bestimmung der Normalenvektoren $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ der von $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MB}$ sowie von $\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MB}$ aufgespannten Ebenen und deren Zwischenwinkel $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b})$ mit dem Vektorprodukt.

- $$\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \\ -\left(-\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- $$\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ -\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Damit ergeben sich folgende Normalenvektoren:

$$\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

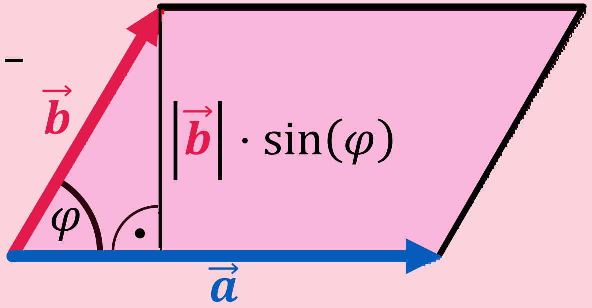
Rhombendodekaeder
Lösungshinweise zu den Aufgaben

(9) **B**estimmen Sie die Raumwinkel, die die Trägerebenen zweier benachbarter Rauten miteinander einschließen.



- Der Betrag $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ gibt den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt Parallelogramms an.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi)$$



- Damit ergibt sich für den Zwischenwinkel φ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

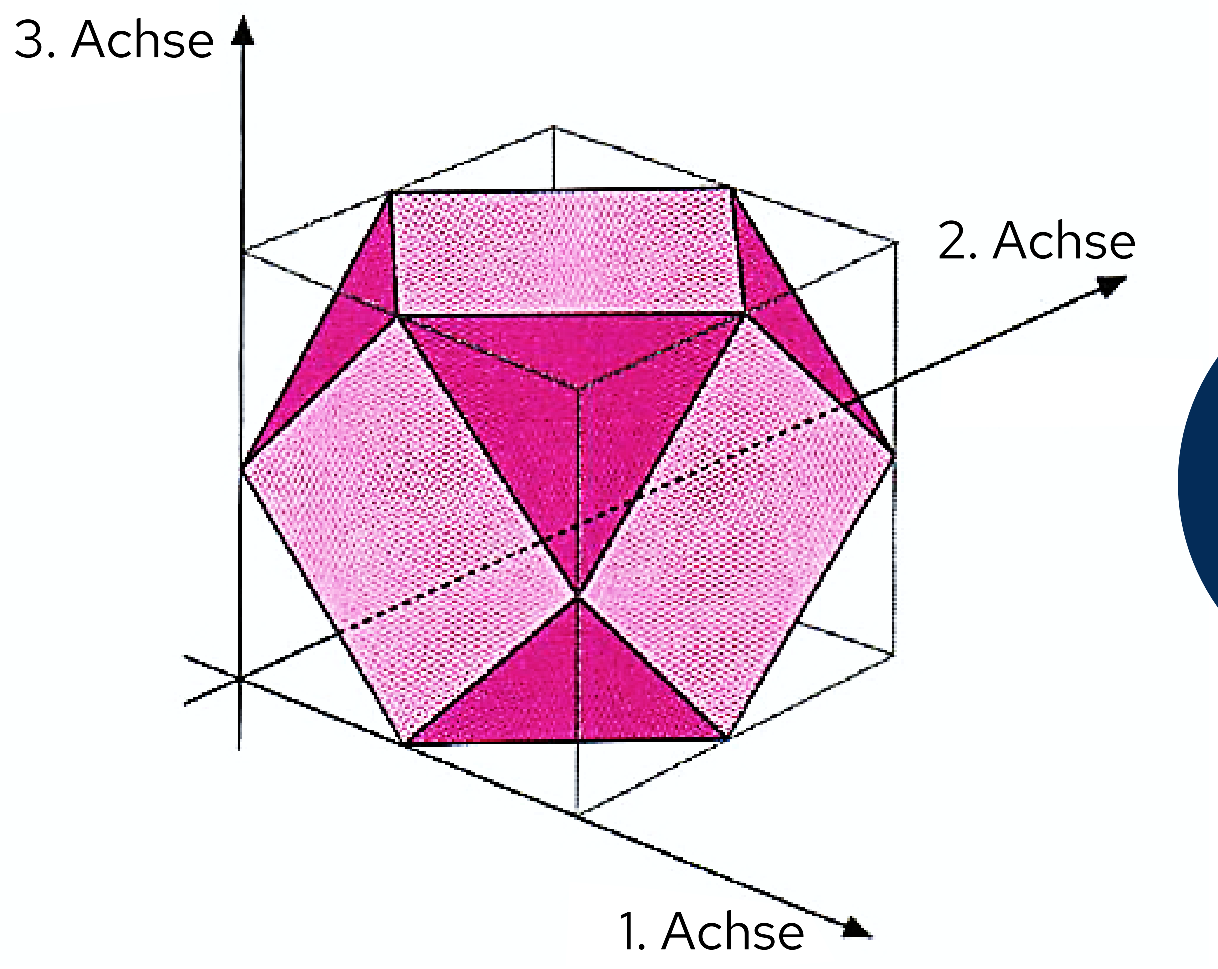
$$\sin(\varphi) = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

- Mit den Werten von $\overrightarrow{n_a}$ und $\overrightarrow{n_b}$ der vorherigen Folie folgt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\left|\overrightarrow{n_a} \times \overrightarrow{n_b}\right|}{\left|\overrightarrow{n_a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_b}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Daraus folgt: $\varphi = \angle(\overrightarrow{n_a}, \overrightarrow{n_b}) = 60°$

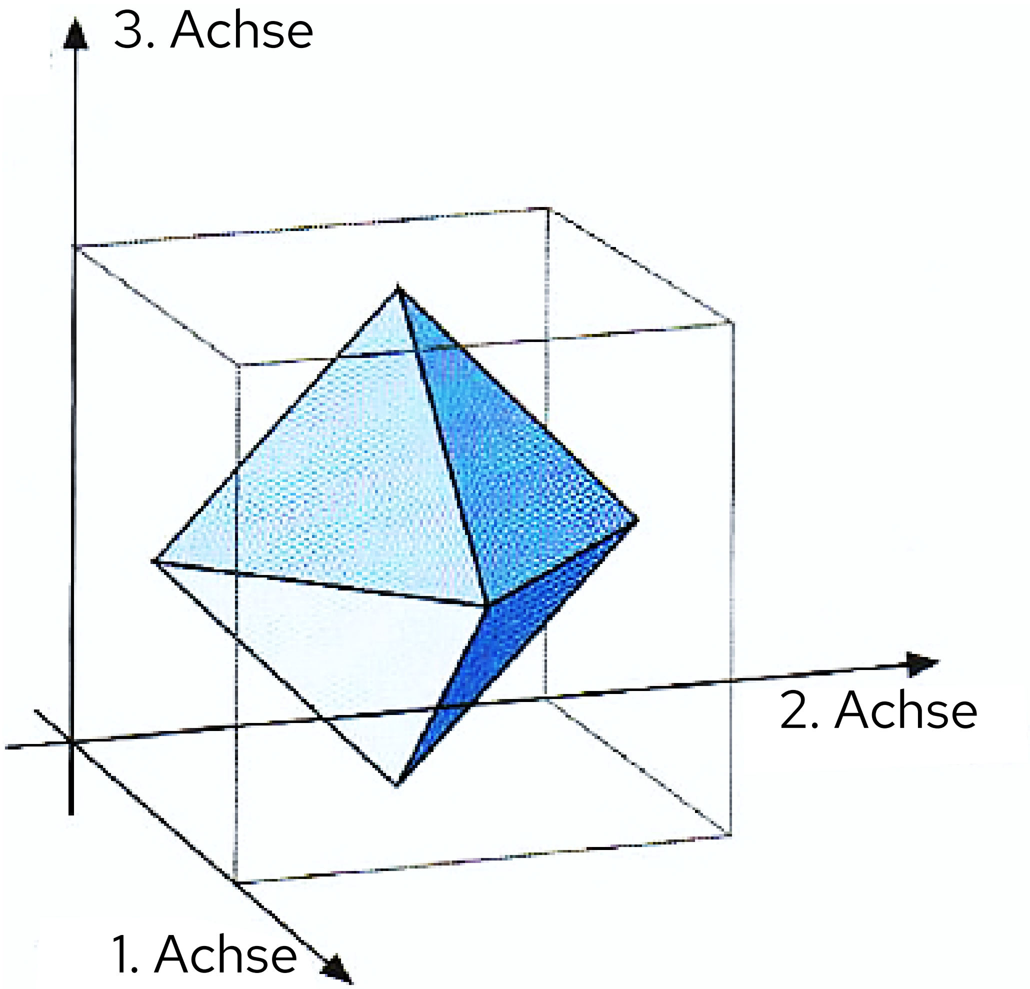
Würfel und Kuboktaeder



Kuboktaeder
Die Mittelpunkte der zwölf Würfelkanten sind die Eckpunkte des Kuboktaeders, eines Körpers, der von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.

 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt*, *133*, 15

Würfel und Oktaeder



Oktaeder
Die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte des Oktaeders, einer von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzten Doppelpyramide.

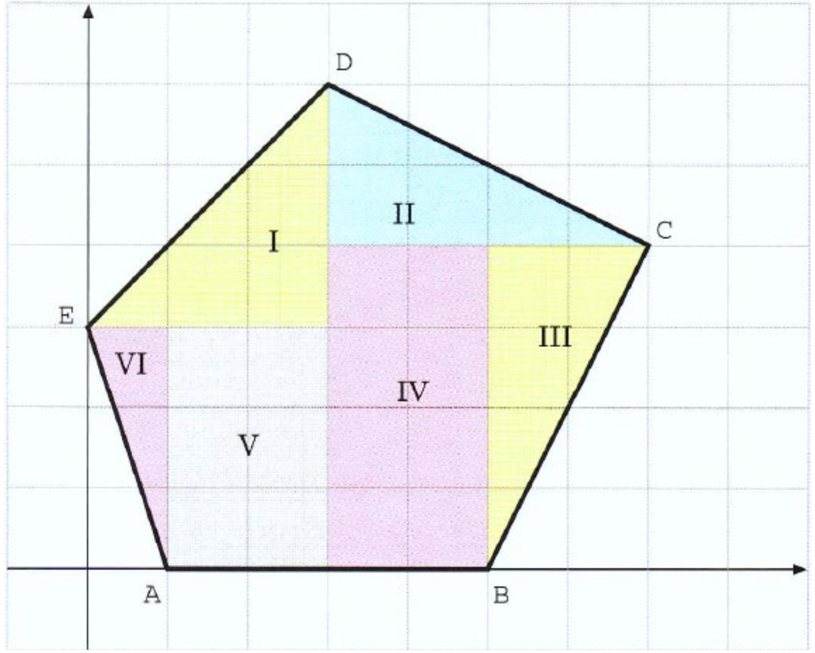
 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 15

Flächenberechnungen

Aufgabe: Es soll der Flächeninhalte eines Fünfecks $ABCDE$ bestimmt werden, von dem wir die Koordinaten der Eckpunkte kennen (Rasterquadrate haben die Seitenlänge 1.). Führe beide Lösungsansätze weiter aus.

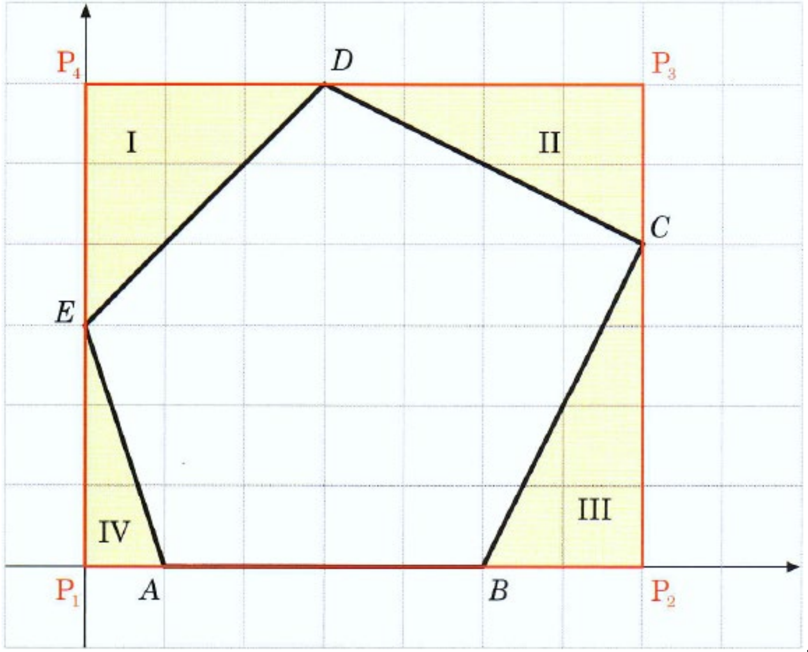
Sandras Lösungsvorschlag

$A_{\text{Fünfeck}} = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + A_V + A_{VI}$



Olivers Lösungsvorschlag

$A_{\text{Fünfeck}} = A_{P_1P_2P_3P_4} - (A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV})$

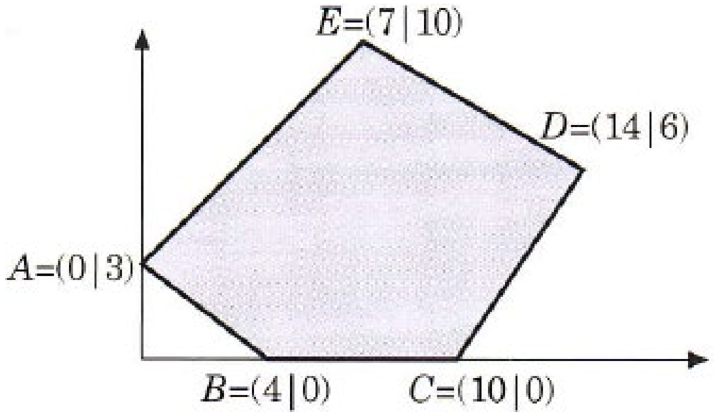


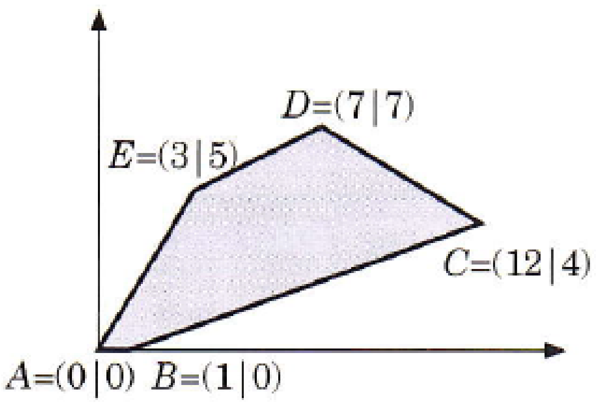
Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt*, *133*, 12

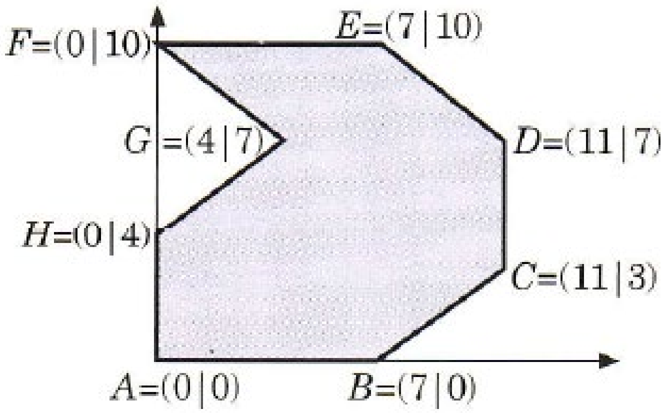
Flächenberechnungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aufgabe: Berechne die Flächeninhalte der Vierecke.



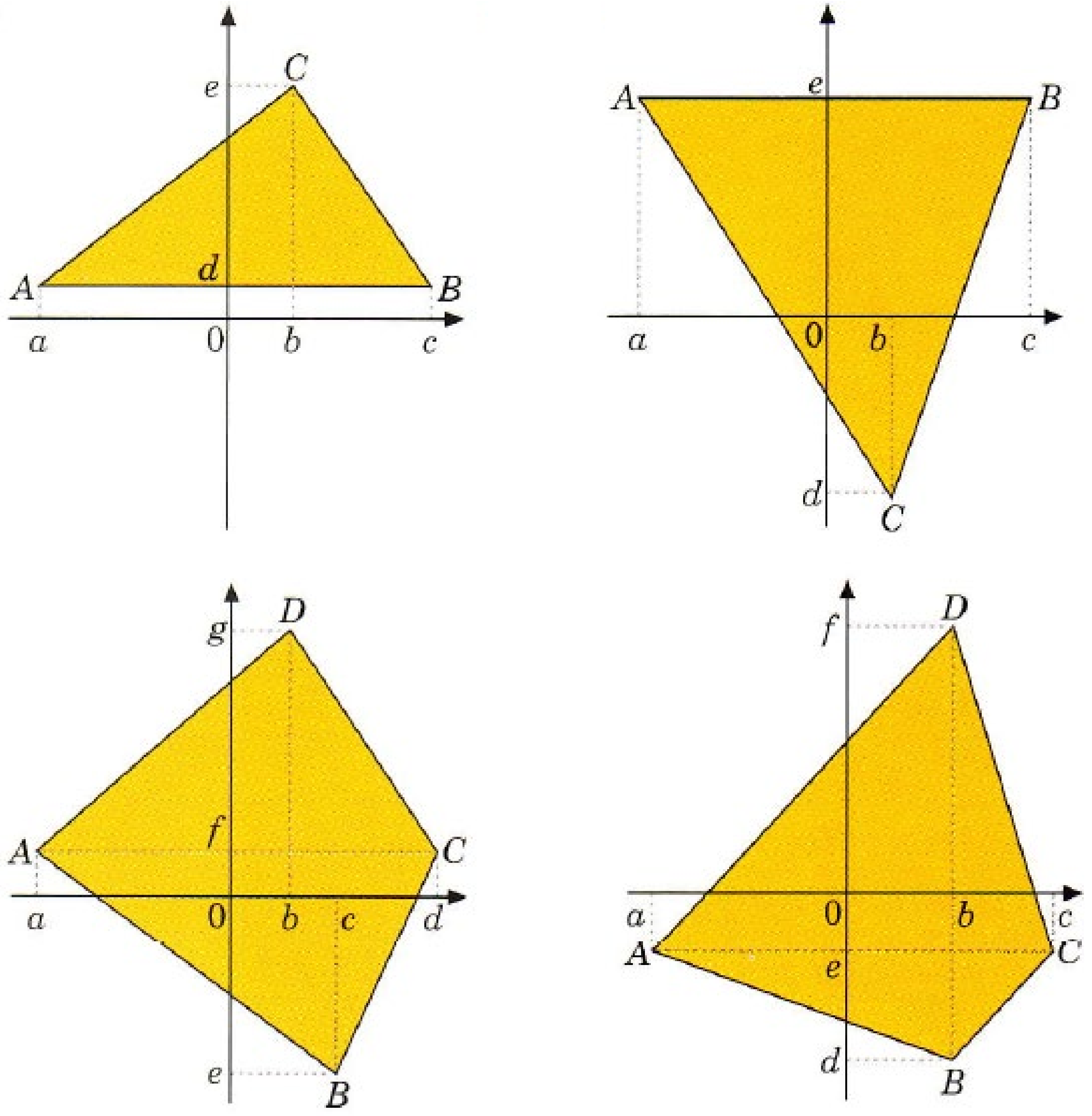




 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 12

Flächenberechnungen

Aufgabe:
Drücke die Koordinaten der Eckpunkte und die Flächeninhalte der Figuren mit den gegebenen Variablen aus.



 Koth, M. & Malle, G. (2005). Koordinaten. *Mathe-Welt, 133*, 12

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU