Gleitkommazahlen (Teil 2)

Inhalt

- In diesem Video gehen wir noch einmal auf Gleitkommazahlen ein und erkunden, wie man mit ihnen rechnet.
- Konkret geht es um die Multiplikation zweier Gleitkommazahlen.

Gleitkommazahlen

- Im letzten Video haben wir Gleitkommazahlen x der Form $x = s \cdot m \cdot b^e$ kennengelernt. Wir gehen hier wieder von $b = 2$ aus.
- Das wirkt doch auf den ersten Blick vielleicht alles etwas umständlich. Wie rechnet man damit?
  - Beispiel: Multiplikation
- Wir gehen der Einfachheit halber nicht von einem der schon bekannten standardisierten Formate single oder double aus.
- Gegeben sind zwei Gleitkommazahlen x und y:

$x =$

0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$y =$

1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

- Hier ist also $r = 3$ und $p = 8$.
- Gesucht ist nun also das Produkt $x \cdot y$.

Multiplikation zweier Gleitkommazahlen

- Vorüberlegung: Für x und y gibt es eine Darstellung der Form $x = s_x \cdot m_x \cdot 2^{e_x}$ sowie $y = s_y \cdot m_y \cdot 2^{e_y}$.
- Hiermit gilt dann:
  $x \cdot y = s_x \cdot s_y \cdot m_x \cdot m_y \cdot 2^{e_x} \cdot 2^{e_y} = s_x \cdot s_y \cdot m_x \cdot m_y \cdot 2^{e_x + e_y}$
- Wir bestimmen nun der Reihe nach die notwendigen Größen:

$x =$												
	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$y =$												
	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

- Somit ist $s_x \cdot s_y = (-1)^0 \cdot (-1)^1 = 1 \cdot (-1) = -1$.
- Der Bias beträgt $B = 2^{r-1} - 1 = 2^{3-1} - 1 = 4 - 1 = 3 = [11]_2$.
- Aus $E = e + B$ folgt $e = E - B$.
- Somit gilt $e_x + e_y = E_x + E_y - B - B$.
- Wir berechnen direkt den mit Bias versehenen neuen Exponenten:
  $E_x + E_y - B = [101]_2 + [010]_2 - [11]_2 = [111]_2 - [11]_2 = [100]_2$
- Der größte Aufwand besteht nun also darin, die beiden Mantissen miteinander zu multiplizieren.

Multiplikation zweier Gleitkommazahlen

$x =$

0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$y =$

1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

- Multiplikation der beiden Mantissen mit der „Schulmethode“:

```
    1, 1  0  1 · 1, 1  1  0  1
------------------------------
    1, 1  0  1
       1  1  0  1
          1  1  0  1
             0  0  0  0
                1  1  0  1
------------------------------
 1  0, 1  1  1  1  0  0  1
```

- Jetzt müssen wir die neue Mantisse noch normalisieren (so dass sie zwischen 1 und 2 liegt).
- Verschiebe hierzu das Komma um eine Stelle nach links und erhöhe den Exponenten zum Ausgleich um 1.

Multiplikation zweier Gleitkommazahlen

- Insgesamt also erhalten wir für $x \cdot y$ also folgende Zahl:
  - Exponentbits: 101
  - Vorzeichenbit: 1
  - Mantissenbits: 01111001

$x =$

0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0

$y =$

1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

$x \cdot y =$

1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1

- Wir prüfen einmal alles:
  - $x = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^{1+4-3} \qquad = 6{,}5$
  - $\cdot$
  - $y = -1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^{2-3} \qquad = -0{,}90625$
  - $=$
  - $x \cdot y = -1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256}\right) \cdot 2^{1+4-3} \qquad = -5{,}890625$

Zusammenfassung

- Mit Gleitkommazahlen kann man rechnen!
- Hierzu sind spezielle Schritte erforderlich, in denen man die Vorzeichen, Mantissen und Exponenten verarbeiten muss.
- Hierbei ist die Verarbeitung der Mantissen am aufwendigsten.